Études de fonctions

1 Études de fonctions
- $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- $f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, 1[$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1,1[$
   1.2 $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1,1[$

   1.2 $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

   La fonction est impaire, l'étude sur $[0,1[$ suffit.

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad (1+x)(1-x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in]-1, 1[$

   1.2 $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

   La fonction est impaire, l'étude sur $[0, 1[$ suffit.

   1.3 limites aux bornes, calcul de : $\lim_{x\to 1} f(x)$

$f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   - 1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
     Il faut que :
     $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1\,,1[$
   - 1.2 $f(-x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

     La fonction est impaire, l'étude sur $[0\,,1[$ suffit.
   - 1.3 limites aux bornes, calcul de : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
     - $f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$

$f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x>0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x}>0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in]-1,1[$

   1.2 $f(-x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$

   La fonction est impaire, l'étude sur $[0,1[$ suffit.

   1.3 limites aux bornes, calcul de : $\lim\limits_{x\to1} f(x)$
   - $f(x)=(x+1)(x-1)\ln(1+x)-(x+1)(x-1)\ln(1-x)$
   - $\lim\limits_{u\to0} u\ln(u)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to1}\big((x-1)\ln(1-x)\big)=0$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, 1[$

   1.2 $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

   La fonction est impaire, l'étude sur $[0, 1[$ suffit.

   1.3 limites aux bornes, calcul de : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
   - $f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$
   - $\lim\limits_{u \to 0} u\ln(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1} \big((x-1)\ln(1-x)\big) = 0$
   - $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction logarithme est définie pour $x > 0$.
   Il faut que :
   $\frac{1+x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+x)(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, 1[$

   1.2 $f(-x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$

   La fonction est impaire, l'étude sur $[0, 1[$ suffit.

   1.3 limites aux bornes, calcul de : $\lim_{x\to 1} f(x)$
   - $f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$
   - $\lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\left((x-1)\ln(1-x)\right) = 0$
   - $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

On étudiera f sur $[0, 1]$ en posant $f(1) = 0$ et on complètera par symétrie par rapport à $(0, 0)$ (fonction impaire).

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. La dérivée :

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée :

$$f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2-1}{1+x} - \left(2x\ln(1-x) + \frac{x^2-1}{1-x}(-1)\right)$$

$f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x)=(x+1)(x-1)\ln(1+x)-(x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(1+x)+\frac{x^2-1}{1+x}-\left(2x\ln(1-x)+\frac{x^2-1}{1-x}(-1)\right)\\ &= 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2 \end{aligned}$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(1+x) + \frac{x^2-1}{1+x} - \left(2x\ln(1-x) + \frac{x^2-1}{1-x}(-1)\right) \\ &= 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2 \\ &= 2x\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(1+x) + \frac{x^2-1}{1+x} - \left(2x\ln(1-x) + \frac{x^2-1}{1-x}(-1)\right) \\ &= 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2 \\ &= 2x\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Sur $]0,1[$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)} \end{aligned}$$

$f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)-\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}\\&=\frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}\end{aligned}$$

g est donc strictement croissante sur $]0,1[$.

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

g est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Étude du signe de :

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)} \end{aligned}$$

g est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \in]0, 1[: \; g(x_0) = 0$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée $f'(x) = 2x\left(\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{x}\right) = 2x\,g(x)$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée $f'(x) = 2x\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 2x\,g(x)$
   - s'annule donc une seule fois en $x_0 \in]0,1[$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée $f'(x) = 2x\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 2x\,g(x)$
   - s'annule donc une seule fois en $x_0 \in]0,1[$
   - si $0 < x < x_0$, $f'(x) < 0$ et si $x_0 < x < 1$, $f'(x) > 0$

$f(x)=(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x)=(x+1)(x-1)\ln(1+x)-(x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée $f'(x)=2x\Big(\ln\big(\dfrac{1+x}{1-x}\big)-\dfrac{1}{x}\Big)=2x\,g(x)$
   - s'annule donc une seule fois en $x_0\in]0,1[$
   - si $0<x<x_0$, $f'(x)<0$ et si $x_0<x<1$, $f'(x)>0$
   - On a prolongé par continuité f en 1 : il faut étudier la dérivabilité au point de prolongement :

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = (x+1)(x-1)\ln(1+x) - (x+1)(x-1)\ln(1-x)$$

2. La dérivée $f'(x) = 2x\Big(\ln\big(\dfrac{1+x}{1-x}\big) - \dfrac{1}{x}\Big) = 2x\,g(x)$
   - s'annule donc une seule fois en $x_0 \in]0,1[$
   - si $0 < x < x_0$, $\quad f'(x) < 0 \quad$ et si $\quad x_0 < x < 1$, $\quad f'(x) > 0$
   - On a prolongé par continuité f en 1 : il faut étudier la dérivabilité au point de prolongement :

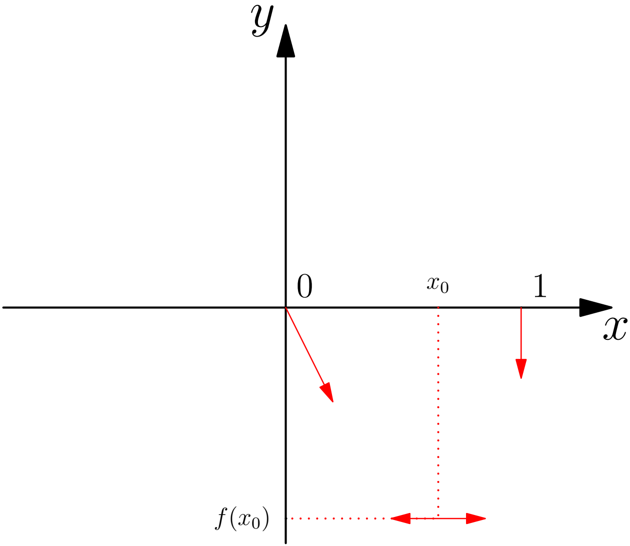
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x+1)\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big) = +\infty$$

$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

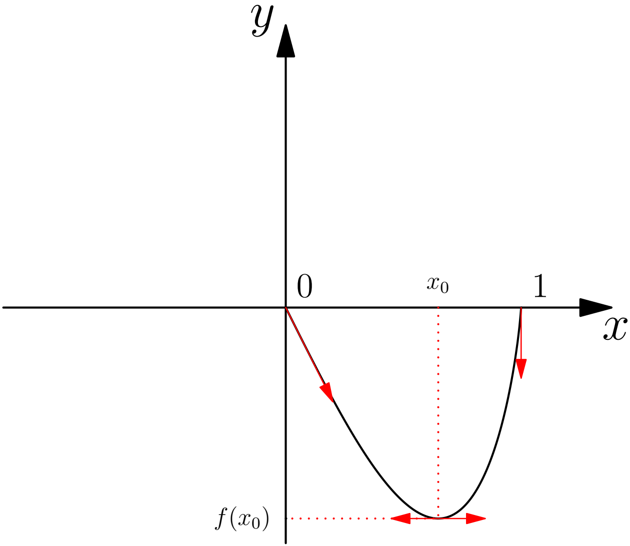
3. Tableau des variations.

x	0		x_0		1
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	0

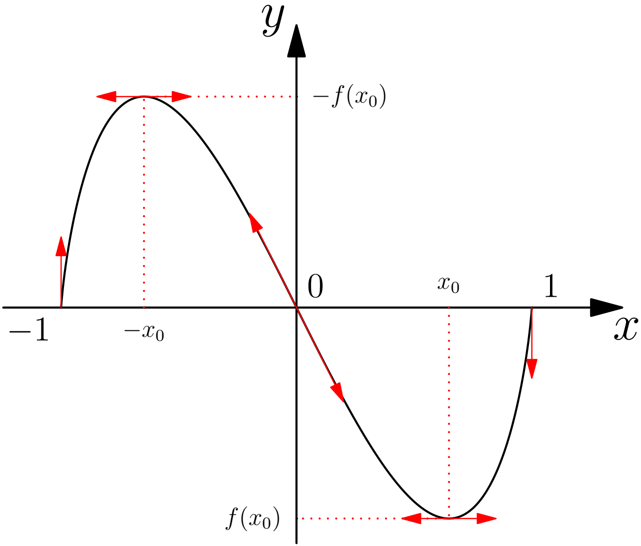
$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$



$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x + 2\pi) = \exp\left(\tan(x + 2\pi)\right).\cos(x + 2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x+2\pi) = \exp\left(\tan(x+2\pi)\right).\cos(x+2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x+2\pi) = \exp\big(\tan(x+2\pi)\big).\cos(x+2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

   De plus : $f(x+\pi) = -f(x)$: on fera l'étude sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on complètera par une symétrie par rapport au point : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x + 2\pi) = \exp\left(\tan(x + 2\pi)\right).\cos(x + 2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

   De plus : $f(x + \pi) = -f(x)$: on fera l'étude sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on complètera par une symétrie par rapport au point : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

   1.3 limites aux bornes :

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x+2\pi) = \exp\Big(\tan(x+2\pi)\Big).\cos(x+2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

   De plus : $f(x+\pi) = -f(x)$: on fera l'étude sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on complètera par une symétrie par rapport au point : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

   1.3 limites aux bornes :
   - $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x+2\pi) = \exp\left(\tan(x+2\pi)\right).\cos(x+2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

   De plus : $f(x+\pi) = -f(x)$: on fera l'étude sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on complètera par une symétrie par rapport au point : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

   1.3 limites aux bornes :
   - $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$
   - $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

1. Domaine de définition et domaine d'étude :
   1.1 la fonction tangente n'est définie que pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$; donc f est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

   1.2 $f(x+2\pi) = \exp\left(\tan(x+2\pi)\right).\cos(x+2\pi) = f(x)$ puisque la tangente est π-périodique et le cosinus 2π-périodique.

   On fera l'étude sur : $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

   De plus : $f(x+\pi) = -f(x)$: on fera l'étude sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on complètera par une symétrie par rapport au point : $(\frac{\pi}{2}, 0)$

   1.3 limites aux bornes :
   - $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$
   - $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

On prolongera f par continuité en $-\frac{\pi}{2}$ en posant : $f(-\frac{\pi}{2}) = 0$.

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$f'(x) = \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x)$$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$f'(x) = \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x)$$
$$= \exp(\tan x)\Big(\frac{1 - \cos x.\sin x}{\cos x}\Big)$$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x) \\ &= \exp(\tan x)\Big(\frac{1 - \cos x.\sin x}{\cos x}\Big) \\ &= \exp(\tan x)\Big(\frac{2 - \sin 2x}{2\cos x}\Big) \end{aligned}$$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x) \\
&= \exp(\tan x)\Big(\frac{1 - \cos x.\sin x}{\cos x}\Big) \\
&= \exp(\tan x)\Big(\frac{2 - \sin 2x}{2\cos x}\Big)
\end{aligned}
$$

$f'(x)$ est donc du signe de $\cos x$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x) \\ &= \exp(\tan x)\Big(\frac{1 - \cos x.\sin x}{\cos x}\Big) \\ &= \exp(\tan x)\Big(\frac{2 - \sin 2x}{2\cos x}\Big) \end{aligned}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $\cos x$: sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\quad f'(x) > 0$;

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée :

$$f'(x) = \frac{\exp(\tan x)}{\cos^2 x}\cos x + \exp(\tan x).(-\sin x)$$
$$= \exp(\tan x)\Big(\frac{1 - \cos x.\sin x}{\cos x}\Big)$$
$$= \exp(\tan x)\Big(\frac{2 - \sin 2x}{2\cos x}\Big)$$

$f'(x)$ est donc du signe de $\cos x$: sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\quad f'(x) > 0$;

f est donc strictement croissante.

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée
   - On a prolongé par continuité f en $-\frac{\pi}{2}$; étude de la dérivabilité en $-\frac{\pi}{2}$:

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée
   - On a prolongé par continuité f en $-\frac{\pi}{2}$; étude de la dérivabilité en $-\frac{\pi}{2}$:

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{2})}{x - (-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \exp(\tan x) \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}}$$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée
   - On a prolongé par continuité f en $-\frac{\pi}{2}$; étude de la dérivabilité en $-\frac{\pi}{2}$:

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{\pi}{2})}{x - (-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \exp(\tan x) \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \exp(\tan x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{x + \frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

2. La dérivée
   - On a prolongé par continuité f en $-\frac{\pi}{2}$; étude de la dérivabilité en $-\frac{\pi}{2}$:

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{2})}{x-(-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \exp(\tan x)\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \exp(\tan x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

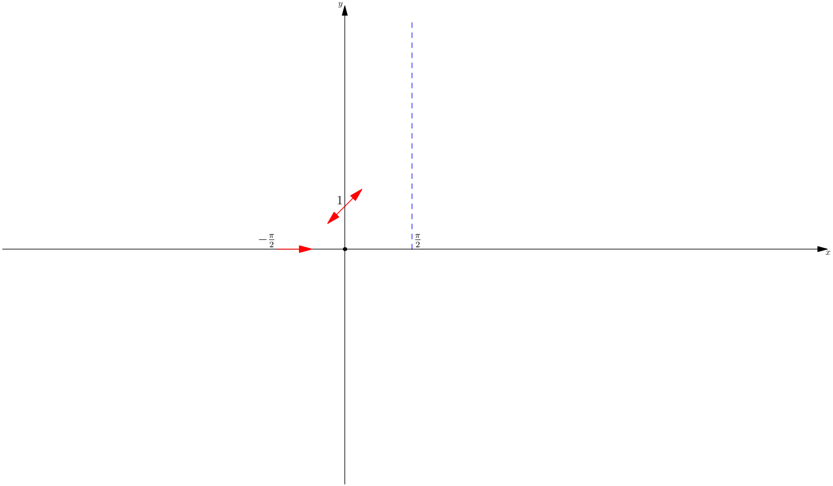
La tangente en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ est donc horizontale.

$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$

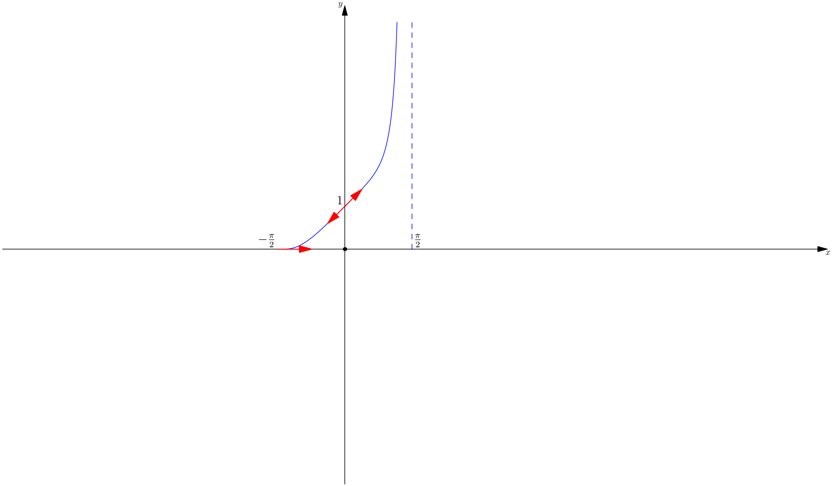
3. Tableau des variations.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	$\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

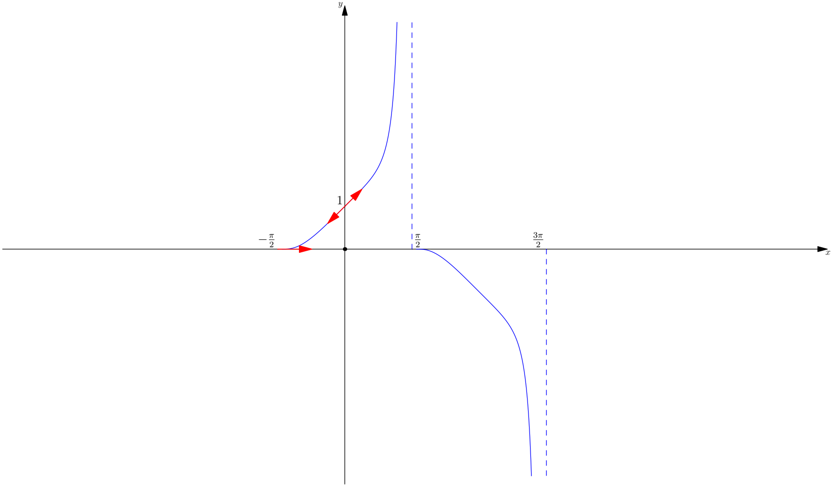
$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$



$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$



$f(x) = \exp(\tan x). \cos x$



$f(x) = \exp(\tan x).\cos x$