

## Feuille de TD n 6 : Formule de Taylor, développements limités

### Exercice 1

- 1) Retrouver l'expression de la dérivée de arcsin.
- 2) En utilisant la formule de Taylor, calculer le développement limité de arcsin à l'ordre 2 au voisinage de 0.

### Exercice 2

- 1) A partir de la dérivée de  $\sin x$  et  $\cos x$  retrouver l'expression de la dérivée de  $\tan x$ .
- 2) En déduire la dérivée de  $\arctan x$ .
- 3) En utilisant la formule de Taylor calculer le développement limité de la dérivée de  $\arctan x$  au voisinage de 0, à l'ordre 4. En déduire le développement limité de  $\arctan x$  à l'ordre 5 au voisinage de 0.

### Exercice 3

- 1) Rappeler le développement limité de  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0, à l'ordre 4, et le développement limité de  $\cos x$  au voisinage de 0, à l'ordre 4.
- 2) En déduire le développement limité de  $\ln(\cos x)$  au voisinage de 0 à l'ordre 4.

### Exercice 4

Donner le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

- 1)  $\ln(1+(x(x-1)))$  à l'ordre 5.
- 2)  $\frac{1}{1-3x-x^3}$  à l'ordre 6.
- 3)  $\frac{\sin x}{1+3x}$  à l'ordre 3.
- 4)  $\frac{\sin^2 x}{1-x^2}$  à l'ordre 4.
- 5)  $\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$  à l'ordre 5.
- 6)  $\operatorname{sh}(x^2) \operatorname{ch}(x)$  à l'ordre 3

### Exercice 5

Calculer le développement limité au voisinage de 0 de

- 1)  $\frac{3x^2+3x+2}{1+x^2}$  à l'ordre 4.
- 2)  $\frac{3x+1}{2+3x+x^2}$  à l'ordre 6.

### Exercice 6

- 1) Calculer le développement limité au voisinage de 0 de à l'ordre 6 de  $\frac{\ln(1+x)}{1-x^2+x^4}$ .
- 2) En déduire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 6 de  $(1+x)^{\frac{1}{1-x^2+x^4}}$ .

### Exercice 7

- 1) Calculer le développement limité de  $e^{\frac{x \sin x}{2}} - e^{1-\cos x}$  à l'ordre 4, au voisinage de 0.
- 2) En calculant le développement limité de  $\frac{x \sin x}{2} - (1 - \cos x)$  au voisinage de 0 à un ordre suffisant, déterminer la limite de 0 de :

$$\frac{e^{\frac{x \sin x}{2}} - e^{1-\cos x}}{\frac{x \sin x}{2} - (1 - \cos x)}$$

### Exercice 8

Calculer les développements limités suivants :

- 1)  $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$  en 0, à l'ordre 3.
- 2)  $\exp(\sin x)$  en 0, à l'ordre 4.
- 3)  $\ln(4-8x+x^2)$  en 0, à l'ordre 4.

**Exercice 9** Vrai ou faux ?

1) Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $k$  au voisinage de 0, alors  $f''$  admet un développement limité d'ordre  $(k - 2)$  au voisinage de 0.

2) Si  $f_1 \sim g_1$  et  $f_2 \sim g_2$  alors  $f_1 - f_2 \sim g_1 - g_2$ .

3) Si  $f$  possède un développement limité au voisinage de  $a$  à l'ordre  $n$ , alors  $f$  possède un développement limité au voisinage de  $a$  à l'ordre  $k$  pour tout  $k \leq n$ .

4) Soit  $f \in \mathcal{C}^n([-1, 1])$ , alors il existe une fonction notée  $o$  t.q.  $\lim_{x \rightarrow 0}(o(x^n)) = 0$  tel que, pour tout  $x \in [-1, 1]$  :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + o(x^n)$$

**Exercice 10**

Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - \sin x}{\operatorname{sh} x - \arcsin x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x \ln x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \ln(1 + \frac{x^2}{2}))}{x^4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1 + \sin^2 x)}{x^2}$

**Exercice 11**

Soit  $f$  la fonction  $x \rightarrow \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x}$ .

1) Quel est le domaine de définition de  $f$  ?

2) Donner le développement limité de  $f$  en 0, à l'ordre 2.

3) Calculer la limite de  $f$  en 0. En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

**Exercice 12**

Si une fonction est  $n$  fois dérivable en 0, alors elle admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. Nous allons montrer que la réciproque est fautive. Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(0) = 0, f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0.$$

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

2) Montrer que  $f$  n'est pas deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

3) En utilisant  $|f(x)| \leq |x|^3$ , montrer que  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 13**

Calculer les développements limités suivants, au voisinage de 0 :

1)  $e^{\cos x} - 1$  à l'ordre 6.

2)  $\sqrt{\cos x}$  à l'ordre 4.

3)  $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$  à l'ordre 3 (à l'ordre 4 si vous êtes courageux!).