Fonction d'une variable réelle

1. Fonction d'une variable réelle : généralités
   - Définitions
   - Fonctions et opérations
   - Fonctions et ordre
   - Propriétés particulières
   - Monotonie
   - Limites
   - Limites et opérations
   - Limites et ordre
   - Limites à gauche et à droite
   - Formes indéterminées

2. Fonction d'une variable réelle, continuité
   - Définition
   - Continuité et opérations
   - Continuité et composition
   - Prolongement par continuité
   - Fonctions croissantes
   - Continuité sur un intervalle
   - Continuité sur un intervalle fermé et borné
   - Fonctions monotones

Définitions

Fonction d'une variable réelle

Une fonction réelle, de variable réelle est une application d'une partie U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction d'une variable réelle

Une fonction réelle, de variable réelle est une application d'une partie U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On écrira :

$$U \subset \mathbb{R}, \qquad f: \begin{array}{ccc} U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Fonction d’une variable réelle

Une fonction réelle, de variable réelle est une application d’une partie U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On écrira :

$$U \subset \mathbb{R}, \qquad f : \begin{array}{ccc} U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque : U est souvent la plus grande partie de $\mathbb{R}$ où f est calculable (définie).

Exemples

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = x^2
\end{array}
$$

Exemples

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = x^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
f: & U & \longmapsto & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x}
\end{array}
$$

Exemples

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f: U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Dans ce cas $U = \mathbb{R}^*$.

On dit souvent « le domaine de définition de f » : $\mathcal{D}_f$.

Exemples

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Dans ce cas $U = \mathbb{R}^*$.

On dit souvent « le domaine de définition de f » : $\mathcal{D}_f$.

$$U = \mathbb{R}_+ \qquad f: \begin{array}{ccc} U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Fonctions et opérations

Somme et produit des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$. On définit :

- La somme :

$$\begin{array}{rccc} f+g : & U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$

Somme et produit des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$. On définit :

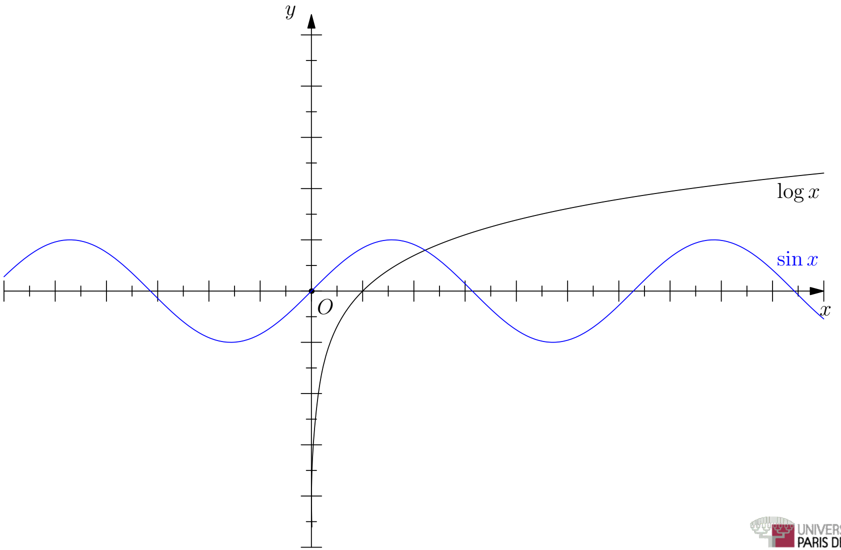
- La somme :

$$\begin{array}{rccc} f+g: & U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

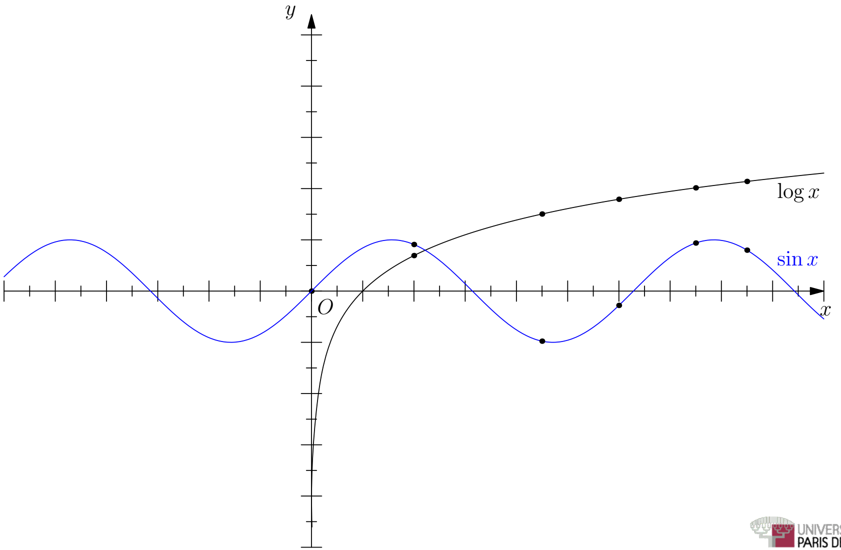
- Le produit :

$$\begin{array}{rccc} f.g: & U & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f.g(x) = f(x).g(x) \end{array}$$

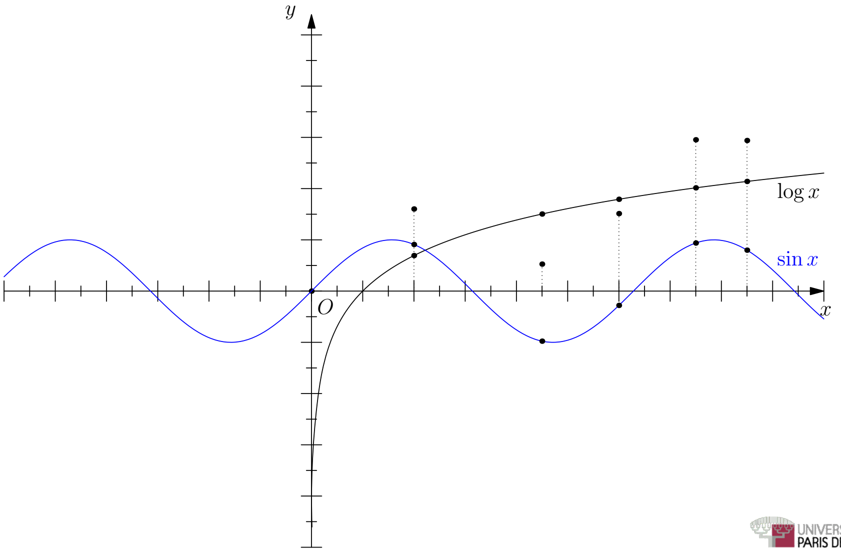
$h(x) = \log x + \sin x$



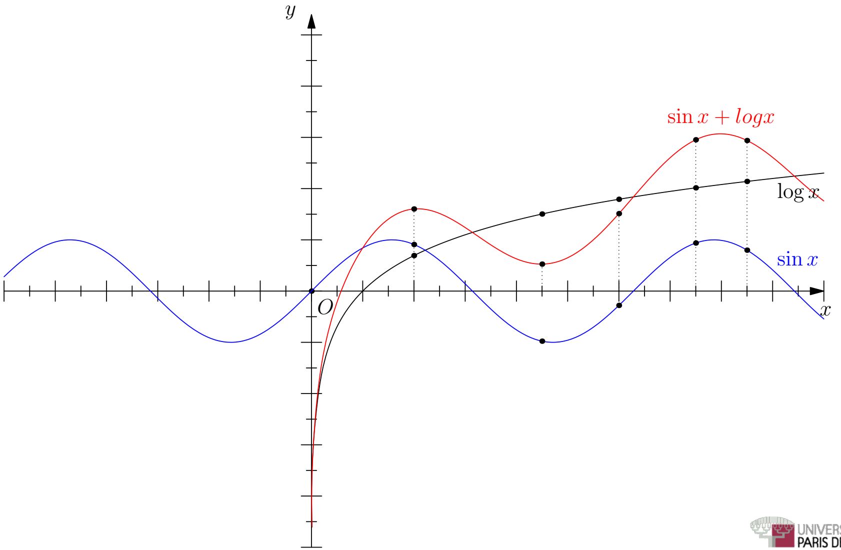
$h(x) = \log x + \sin x$



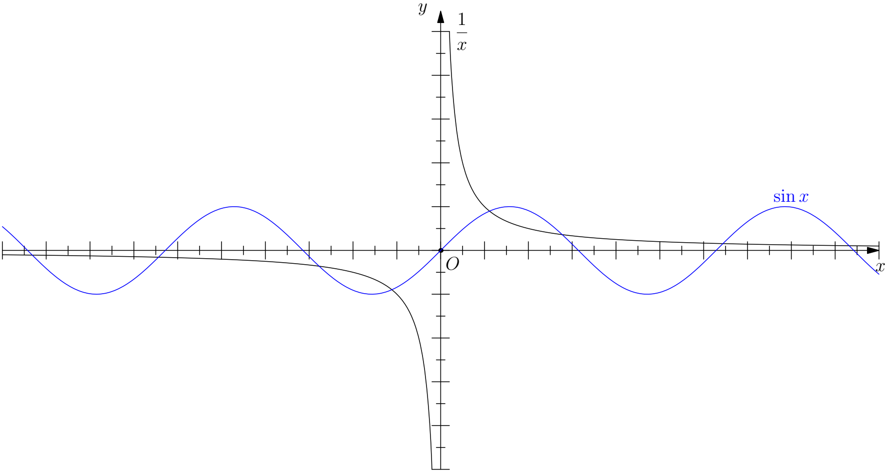
$h(x) = \log x + \sin x$



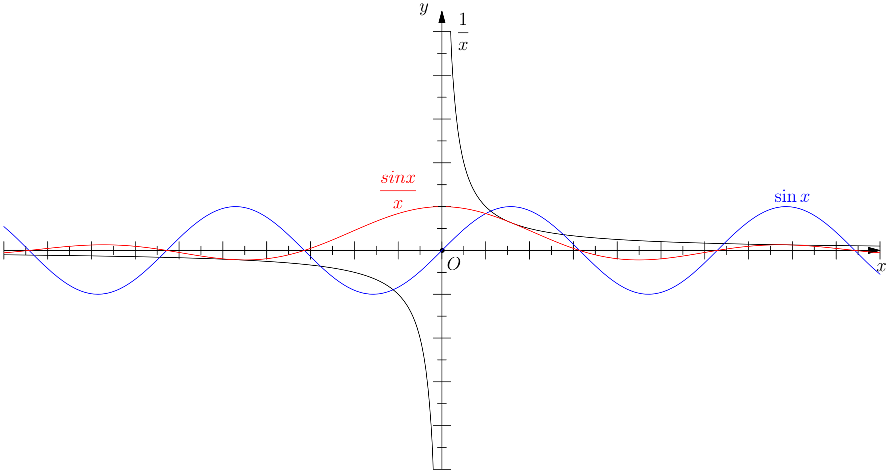
$h(x) = \log x + \sin x$



$h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



$h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



Fonctions et ordre

Comparaison des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est inférieure à g sur U si :

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g(x)$$

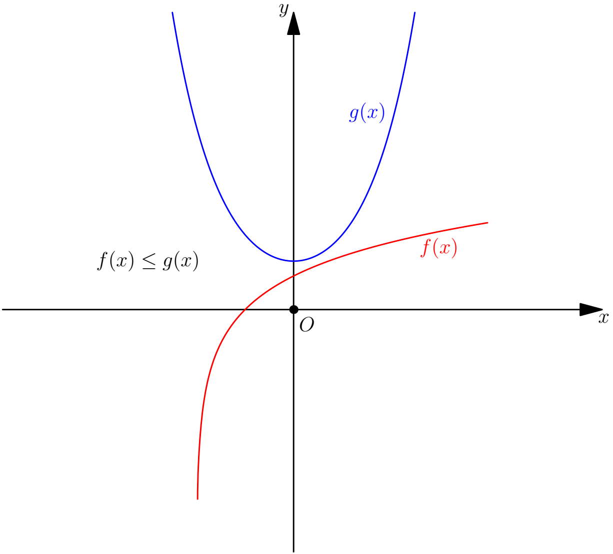
Comparaison des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est inférieure à g sur U si :

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g(x)$$

Notation : $f \leq g$



y
$g(x)$
$f(x)$
$f(x) \leq g(x)$
O
x

Comparaison des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}$.

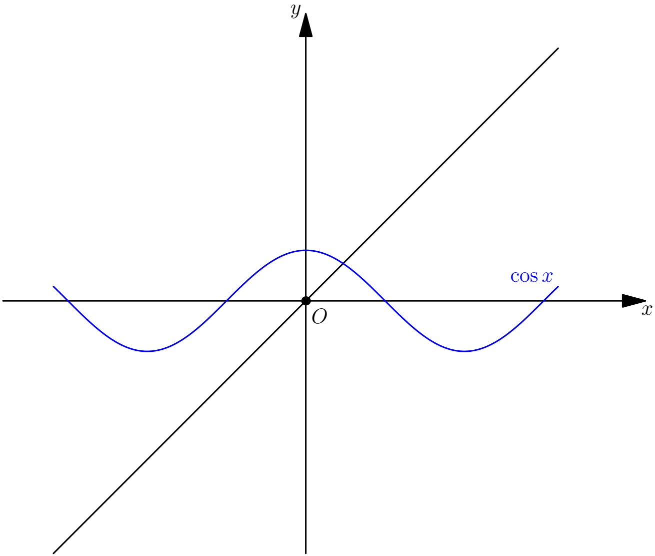
On dit que f est inférieure à g sur U si :

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g(x)$$

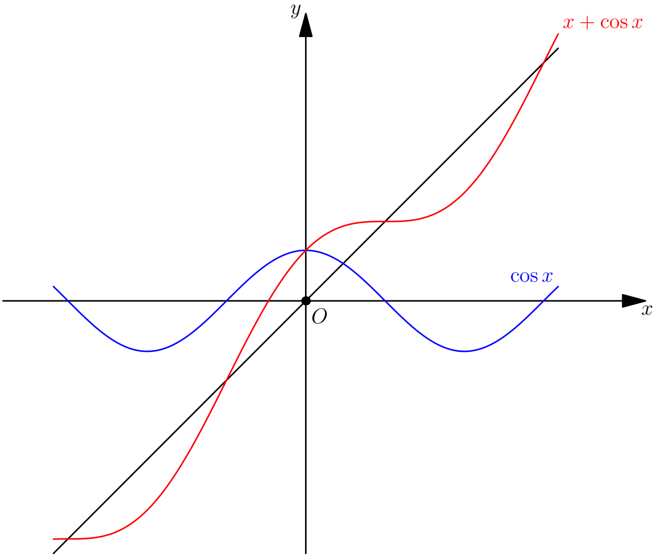
Notation : $f \leq g$

Remarque : Deux fonctions ne sont pas toujours comparables.

Comparaison des fonctions



Comparaison des fonctions



Propriétés particulières

Parité, imparité, périodicité

Soit $U \subset \mathbb{R}$ une partie telle que : $\forall x \in U, \quad -x \in U$ et f une fonction définie sur U.

On dit que :

- f est paire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$

Parité, imparité, périodicité

Soit $U \subset \mathbb{R}$ une partie telle que : $\forall x \in U, \quad -x \in U$ et f une fonction définie sur U.

On dit que :

- f est paire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$
- f est impaire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = -f(x)$

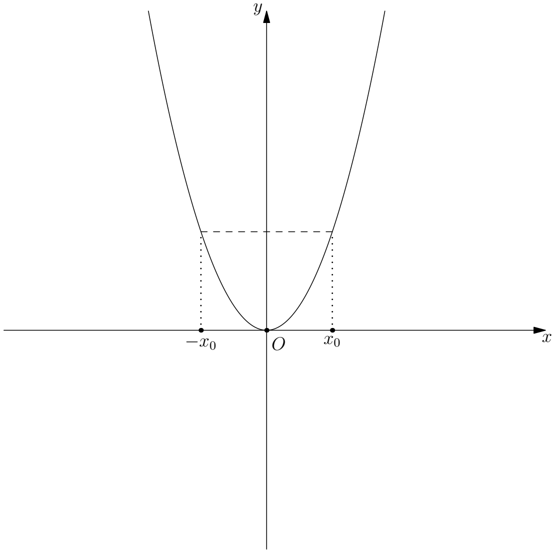
Parité, imparité, périodicité

Soit $U \subset \mathbb{R}$ une partie telle que : $\forall x \in U, \quad -x \in U$ et f une fonction définie sur U.

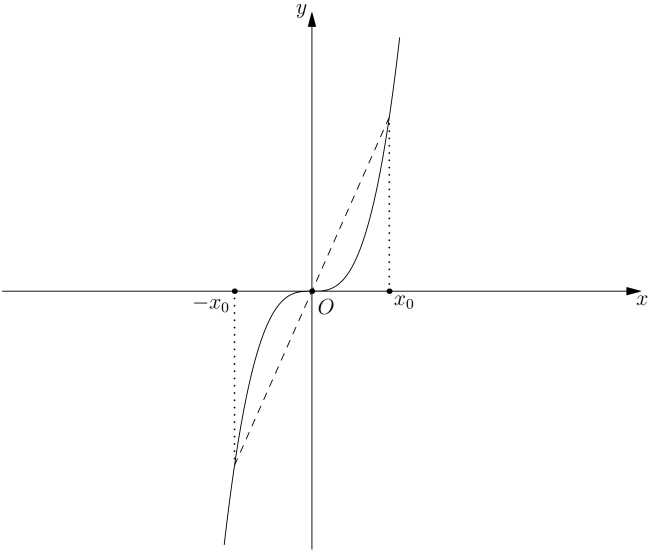
On dit que :

- f est paire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = f(x)$
- f est impaire si : $\forall x \in U, \quad f(-x) = -f(x)$
- f est T-périodique si : $\exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in U : \quad f(x+T) = f(x)$

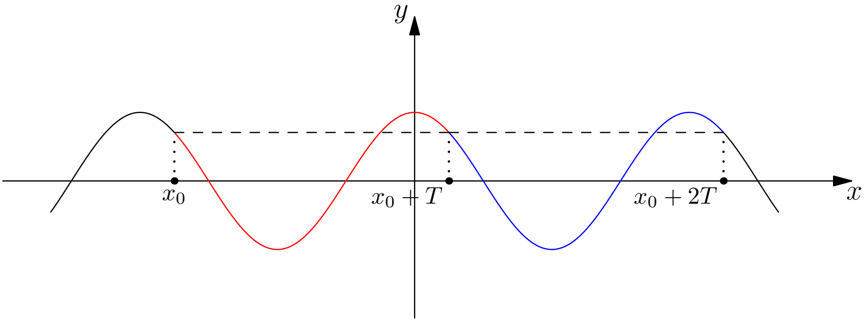
Fonction paire



Fonction impaire



Fonction périodique



Monotonie

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U, \quad V \neq \emptyset$.

On dit que :

- f est croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U, \quad V \neq \emptyset$.

On dit que :

- f est croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$
- f est décroissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U, \quad V \neq \emptyset$.

On dit que :

- f est croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$
- f est décroissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$
- f est strictement croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x > y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$

Fonctions croissantes et décroissantes

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}$ et $V \subset U, \quad V \neq \emptyset$.

On dit que :

- f est croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$
- f est décroissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x \geq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$
- f est strictement croissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x > y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$
- f est strictement décroissante sur V si :
  $\forall x, y \in V, \quad x > y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U.

- Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f + g$ est croissante sur U

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U.

- Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f+g$ est croissante sur U
- Si f et g sont croissantes sur U et si f et g sont positives sur U, le produit $f.g$ est croissant sur U

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U.

- Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f+g$ est croissante sur U
- Si f et g sont croissantes sur U et si f et g sont positives sur U, le produit $f.g$ est croissant sur U
- Si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, si leur composée $f \circ g$ existe, alors $f \circ g$ est croissante

Monotonie et opérations

Proposition : Soit f et g deux fonctions définies sur U.

- Si f et g sont croissantes sur U, la somme $f+g$ est croissante sur U
- Si f et g sont croissantes sur U et si f et g sont positives sur U, le produit $f.g$ est croissant sur U
- Si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, si leur composée $f \circ g$ existe, alors $f \circ g$ est croissante
- Si une des deux fonctions, f ou g, est croissante et l'autre décroissante et si leur composée existe, alors $f \circ g$ est décroissante

Limites

Limite en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

Limite en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I, \quad x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Limite en un point

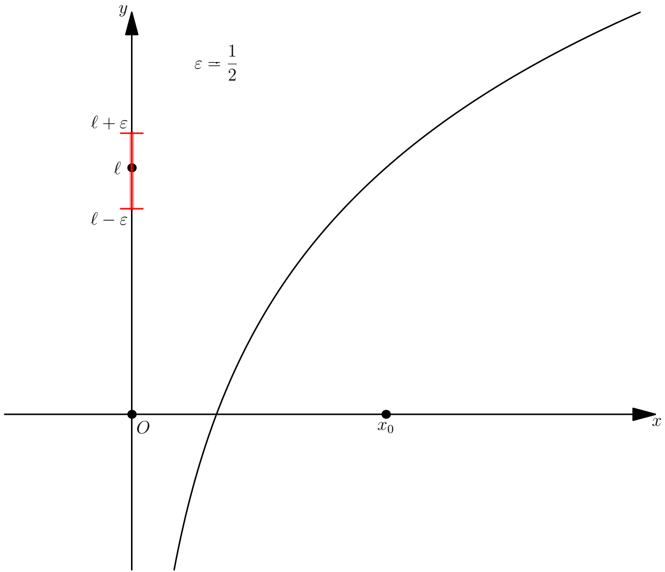
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

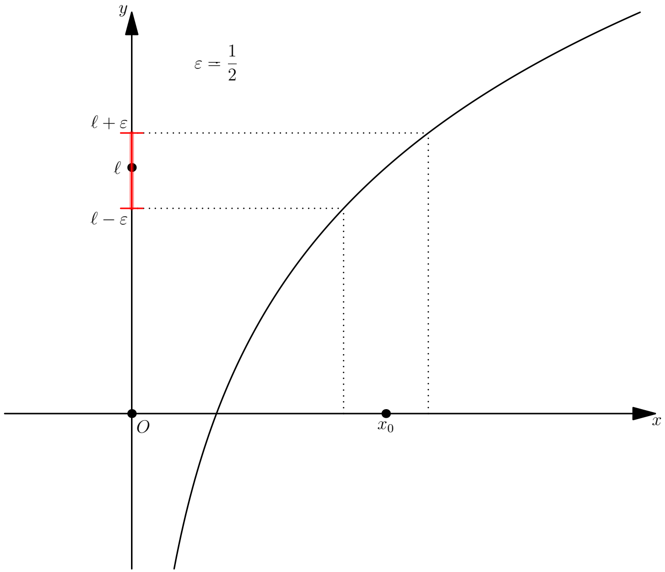
On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

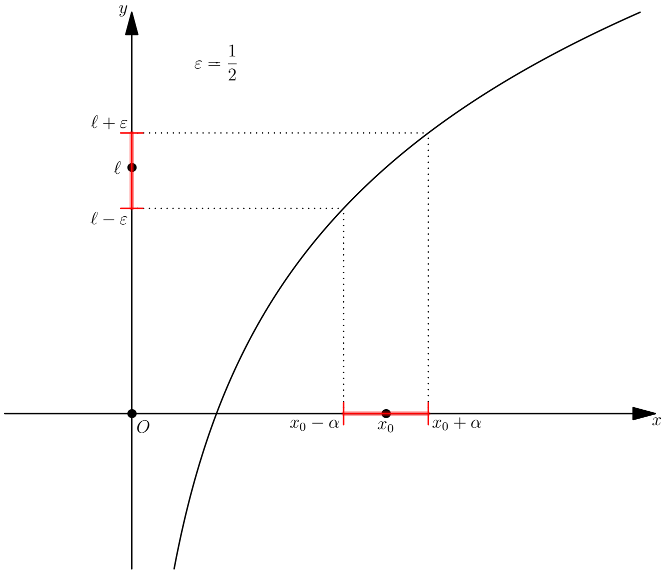
$$(x \in I, \quad x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

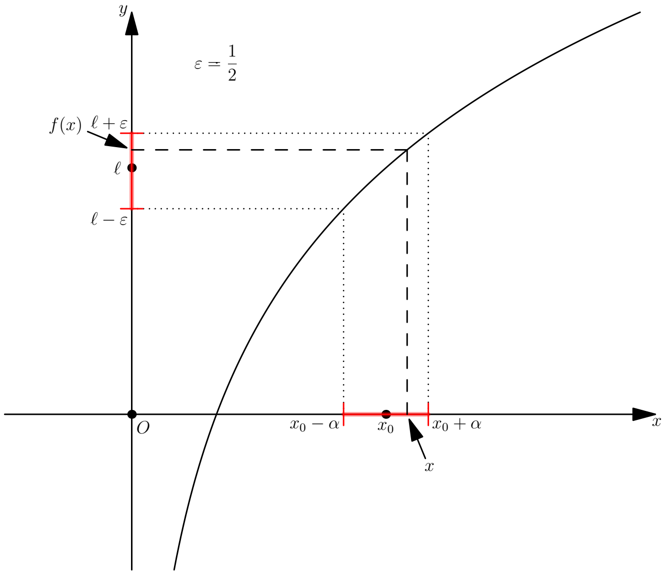
On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

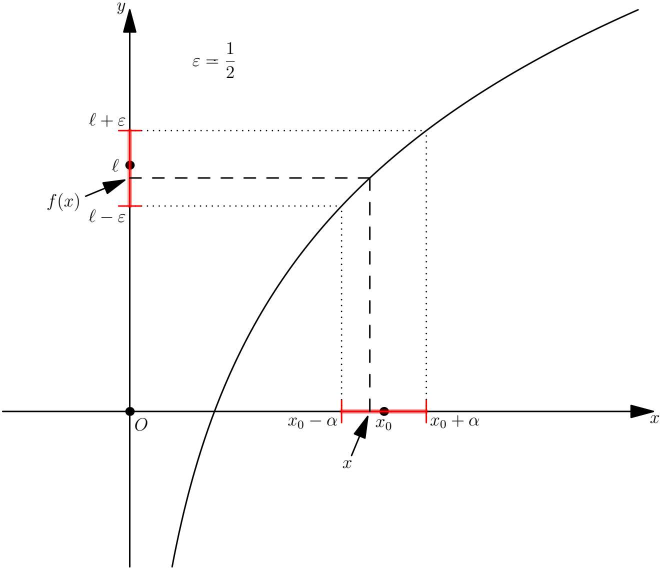


y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
x_0
x

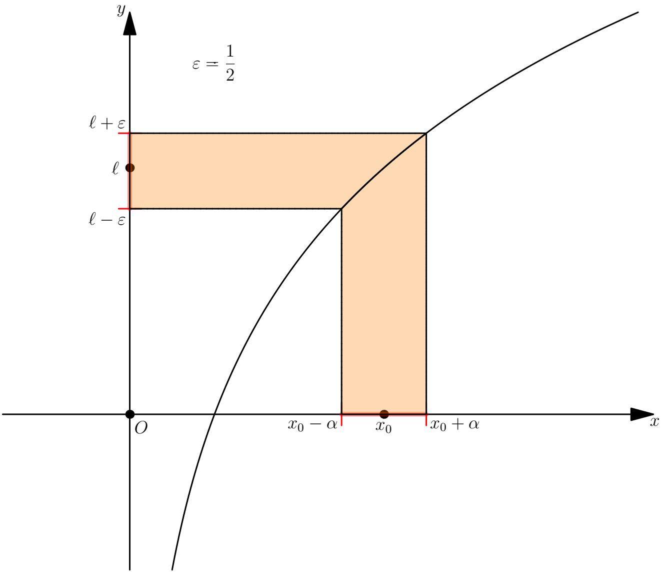

y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
x_0
x


y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x

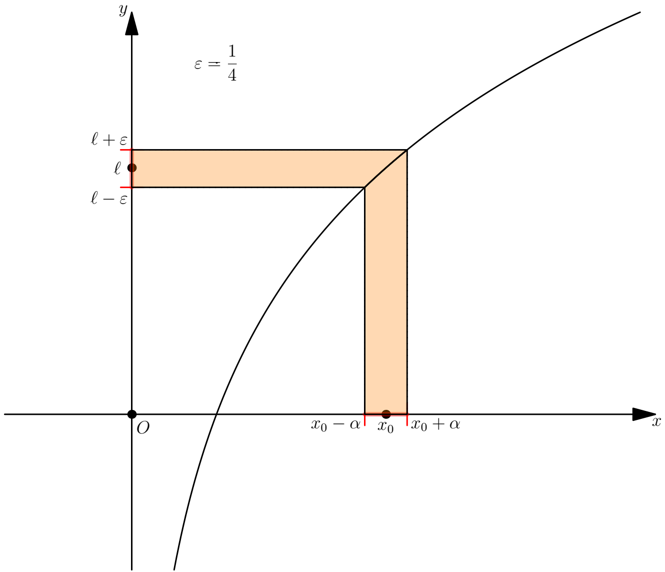

y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$f(x)$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x
x



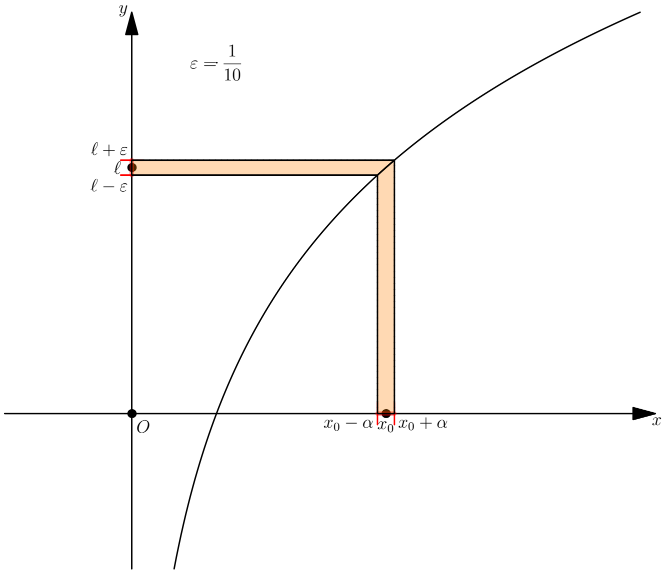
y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$f(x)$
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x
x

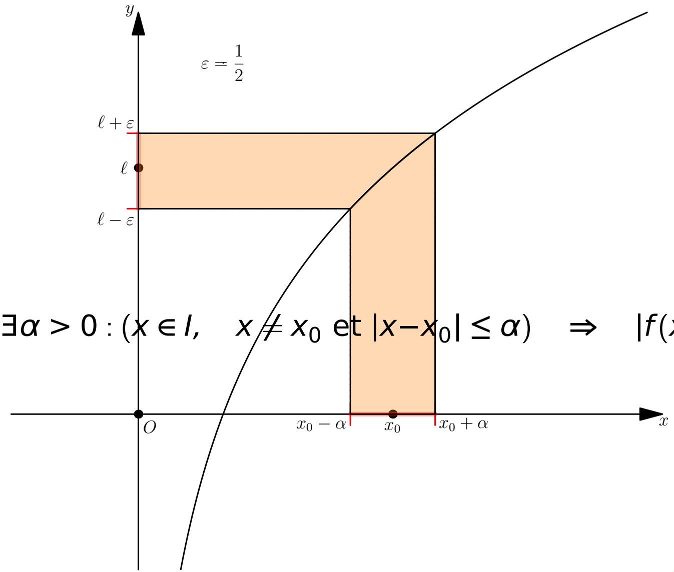


y
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x



y
$\varepsilon = \frac{1}{4}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x


y
$\varepsilon = \frac{1}{10}$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
O
$x_0 - \alpha$
x_0
$x_0 + \alpha$
x



$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : (x \in I, \quad x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

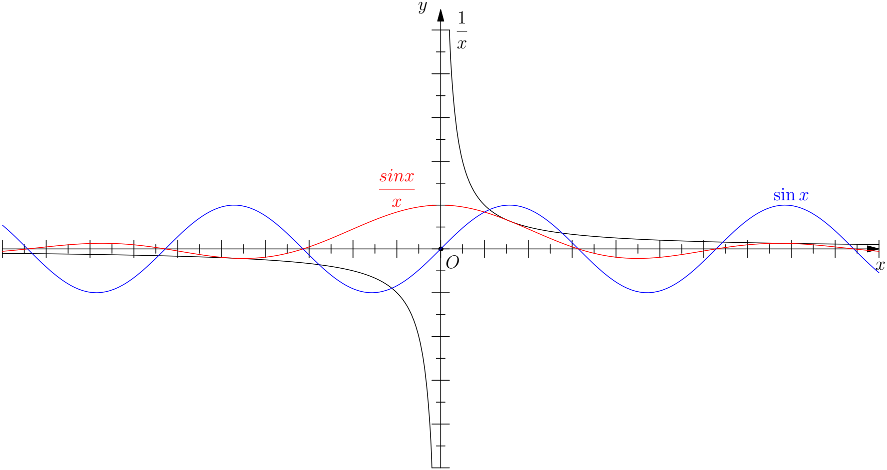
Remarque : La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour avoir une limite en x_0.

Remarque : La fonction f n'a pas besoin d'être définie en x_0 pour avoir une limite en x_0.

Par exemple, f peut être définie sur un intervalle $I =]x_0, a[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$



Limite finie quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$.

Soit $f : \quad I \longmapsto \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $r > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \geq r) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Limite finie quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty\,,+\infty[$ ou $[a\,,+\infty[$ ou $]a\,,+\infty[$.

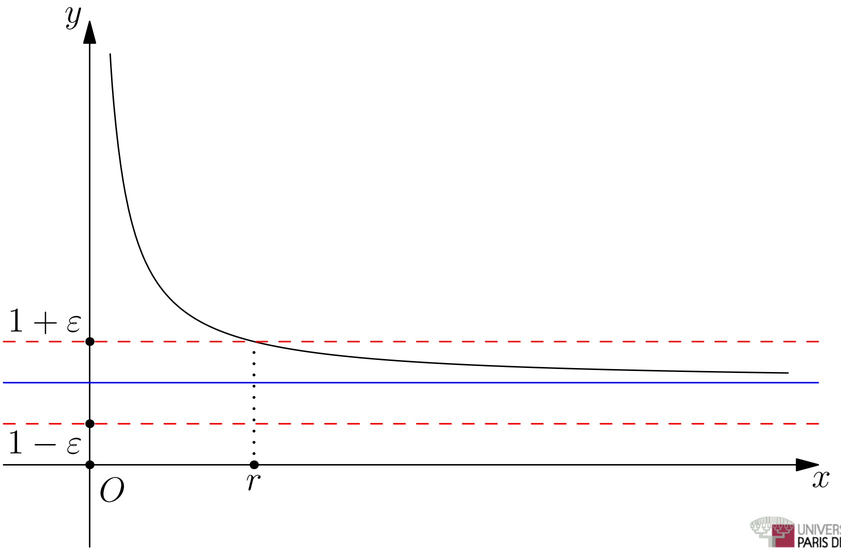
Soit $f: \quad I \longmapsto \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$, si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $r > 0$ qui a la propriété suivante :

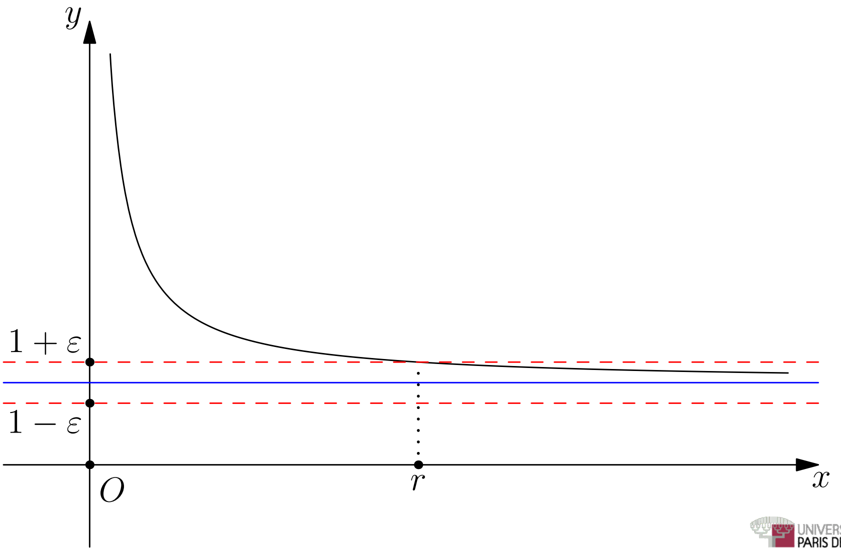
$$(x \in I \text{ et } x \geq r) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

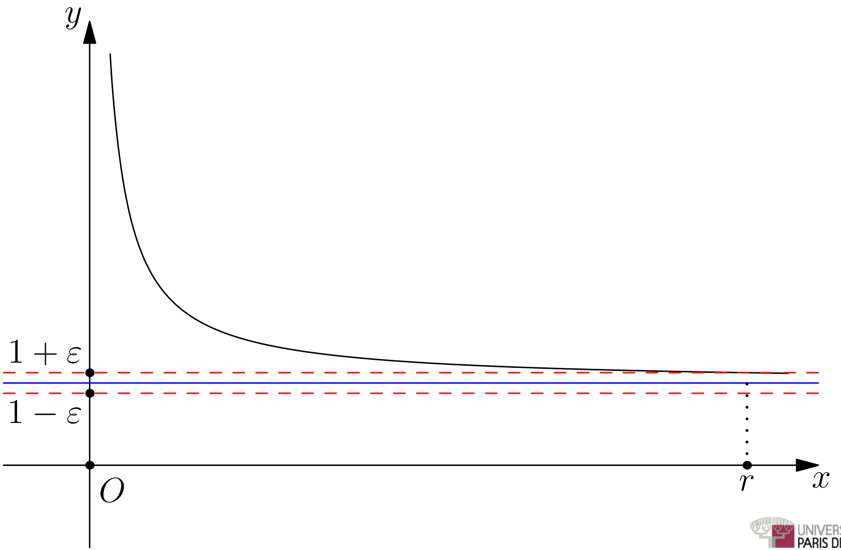
Limite finie quand x tend vers $+\infty$



Limite finie quand x tend vers $+\infty$



Limite finie quand x tend vers $+\infty$



Limite finie quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Soit $f: \quad I \longmapsto \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $r < 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \leq r) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Limite finie quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,a[$ ou $]-\infty\,,a]$.

Soit f : $I \longmapsto \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers $-\infty$, si :
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $r < 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \leq r) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Unicité de la limite

Proposition : Si une fonction f a une limite, cette limite est unique.

Unicité de la limite

Démonstration

Supposons que f ait 2 limites différentes, ℓ et ℓ', en x_0

Unicité de la limite

Démonstration

Supposons que f ait 2 limites différentes, ℓ et ℓ', en x_0

$|\ell - \ell'| > 0$ On pose $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$.

Unicité de la limite

Démonstration

Supposons que f ait 2 limites différentes, ℓ et ℓ', en x_0

$|\ell - \ell'| > 0$ On pose $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0.$

$$\exists \alpha > 0, \quad (x \in I, \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} |f(x) - \ell| & \leq & \frac{|\ell-\ell'|}{3} \\ |f(x) - \ell'| & \leq & \frac{|\ell-\ell'|}{3} \end{array}$$

Unicité de la limite

Démonstration

Supposons que f ait 2 limites différentes, ℓ et ℓ', en x_0

$|\ell - \ell'| > 0$ On pose $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$.

$$\exists \alpha > 0, \quad (x \in I, \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lcl} |f(x) - \ell| & \leq & \frac{|\ell-\ell'|}{3} \\ |f(x) - \ell'| & \leq & \frac{|\ell-\ell'|}{3} \end{array}$$

Alors :

$$0 < |\ell - \ell'| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leq \frac{|\ell-\ell'|}{3} + \frac{|\ell-\ell'|}{3} = \frac{2|\ell-\ell'|}{3}$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si :
$\forall A > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I, \quad x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Soit x_0 un nombre réel qui appartient à I ou qui est une extrémité de I.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si :
$\forall A > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I, \quad x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

On note : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ ou $]a,+\infty]$.

Soit $f : \quad I \longmapsto \mathbb{R}$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]a, +\infty]$.

Soit f : $\quad I \longmapsto \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, si :

$\forall A > 0$, il existe un nombre $r > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \geq r) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ ou $]a,+\infty]$.

Soit $f: \quad I \longmapsto \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, si :

$\forall A > 0$, il existe un nombre $r > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \geq r) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Notation : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Soit $f : \quad I \longmapsto \mathbb{R}$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Soit $f : \quad I \longmapsto \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, si :

$\forall A > 0$, il existe un nombre $r < 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \leq r) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Limites infinies

La fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

Soit I, l'un des intervalles : $]-\infty, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$.

Soit $f : \quad I \longmapsto \mathbb{R}$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, si :

$\forall A > 0$, il existe un nombre $r < 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \in I \text{ et } x \leq r) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A$$

Notation : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

1. quand x tend vers x_0

si : $-f$ tend vers $+\infty$

1. quand x tend vers x_0

Limites infinies

La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

2. quand x tend vers $+\infty$

si : $-f$ tend vers $+\infty$

2. quand x tend vers $+\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

3. quand x tend vers $-\infty$

si : $-f$ tend vers $+\infty$

3. quand x tend vers $-\infty$

Limites infinies

La fonction tend vers $-\infty$ ...

On dit que f tend vers $-\infty$

1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$

si : $-f$ tend vers $+\infty$

1. quand x tend vers x_0
2. quand x tend vers $+\infty$
3. quand x tend vers $-\infty$

Limites et opérations

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = \ell.\ell'$

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = \ell.\ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda.f(x) = \lambda.\ell$

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = \ell.\ell'$
- $\lim_{x \to x_0} \lambda.f(x) = \lambda.\ell$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

Soit f et g deux fonctions et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = \ell.\ell'$
- $\lim_{x \to x_0} \lambda.f(x) = \lambda.\ell$
- Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$

Proposition identique pour : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$
- Si f est minorée, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$
- Si f est minorée, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$
- Si f est minorée par un nombre strictement positif, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = +\infty$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$
- Si f est minorée, $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$
- Si f est minorée par un nombre strictement positif, $\lim_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = +\infty$
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ et si $\forall x,\quad f(x) > 0$: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Soit f et g deux fonctions.

On suppose : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$
- Si f est minorée, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$
- Si f est minorée par un nombre strictement positif, $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et si $\forall x, \quad f(x) > 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big) = +\infty$

Limites et ordre

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Supposons $\ell < 0$. On a alors : $\quad \ell < \frac{\ell}{2} < 0 \quad$ donc : $\quad -\frac{\ell}{2} > 0$.

Pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$, il existe $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon = -\frac{\ell}{2}$$

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Supposons $\ell < 0$. On a alors : $\quad \ell < \frac{\ell}{2} < 0 \quad$ donc : $\quad -\frac{\ell}{2} > 0$.

Pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$, il existe $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon = -\frac{\ell}{2}$$

Alors : $\frac{\ell}{2} \leq f(x) - \ell \leq -\frac{\ell}{2} \qquad$ c'est-à-dire : $\frac{3\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{\ell}{2} < 0$

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Supposons $\ell < 0$. On a alors : $\quad \ell < \frac{\ell}{2} < 0$ donc : $-\frac{\ell}{2} > 0$.

Pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$, il existe $\alpha > 0$ qui a la propriété suivante :

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon = -\frac{\ell}{2}$$

Alors : $\frac{\ell}{2} \leq f(x) - \ell \leq -\frac{\ell}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{3\ell}{2} \leq f(x) \leq \frac{\ell}{2} < 0$

Or f est positive...

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Théorème applicable aussi, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Limite d'une fonction positive

Théorème : Soit f une fonction et ℓ un nombre réel.

Si $\forall x, \quad f(x) \geq 0$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, alors : $\ell \geq 0$

Théorème applicable aussi, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Attention : même si $\forall x, f(x) > 0, \quad \ell \geq 0$

Limite d'une fonction positive

Corollaire : Soit f et g deux fonctions telles que : $f \leq g$.

Si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors : $\ell \leq \ell'$

Limite d'une fonction positive

Corollaire : Soit f et g deux fonctions telles que : $f \leq g$.

Si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors : $\ell \leq \ell'$

Si $f \leq g$, $\quad g - f \geq 0$...

« Théorème des gendarmes »

Théorème : Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel.
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

« Théorème des gendarmes »

Théorème : Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel.
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0$:

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

« Théorème des gendarmes »

Théorème : Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel.
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0$:

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Si $f \leq g \leq h$: $\qquad f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell$

« Théorème des gendarmes »

Théorème : Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel.
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0$:

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Si $f \leq g \leq h$: $\quad -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell \leq \varepsilon$

« Théorème des gendarmes »

Théorème : Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un nombre réel.
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0$:

$$(x \neq x_0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Si $f \leq g \leq h$: $\quad -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell \leq \varepsilon$

$$|g(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

« Théorème des gendarmes »

Corollaire : Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

« Théorème des gendarmes »

Corollaire : Soit f et g deux fonctions.

Si f est bornée et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors : $\lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0$

« Théorème des gendarmes »

Corollaire : Soit f et g deux fonctions.

Si f est bornée et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0$

$$\left(\exists M : \quad |f(x)| \leq M\right) \quad \Rightarrow \quad \left(|f(x).g(x)| \leq M.|g(x)|\right)$$

Limites à gauche et à droite

Soit $I =]a\,,b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion : $]a\,,x_0[\cup]x_0\,,b[$.

- Si pour $x \in]a\,,x_0[$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche.

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion : $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- Si pour $x \in]a, x_0[$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche.
- Si pour $x \in]x_0, b[$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion : $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- Si pour $x \in]a, x_0[$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche.
- Si pour $x \in]x_0, b[$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite.

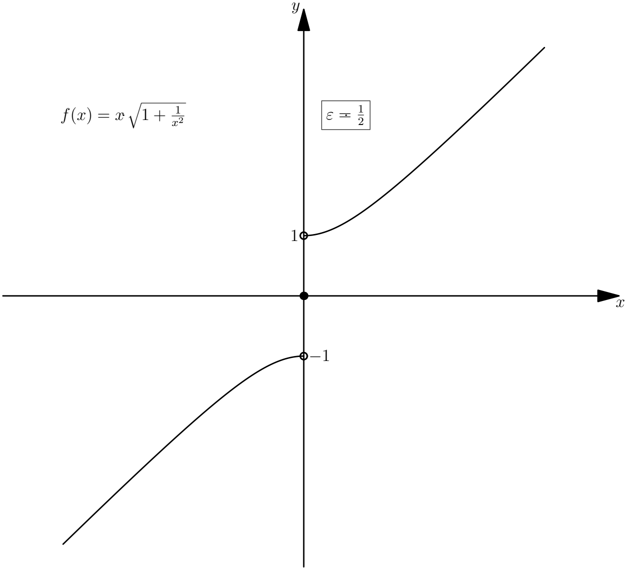
Notation : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ limite à gauche

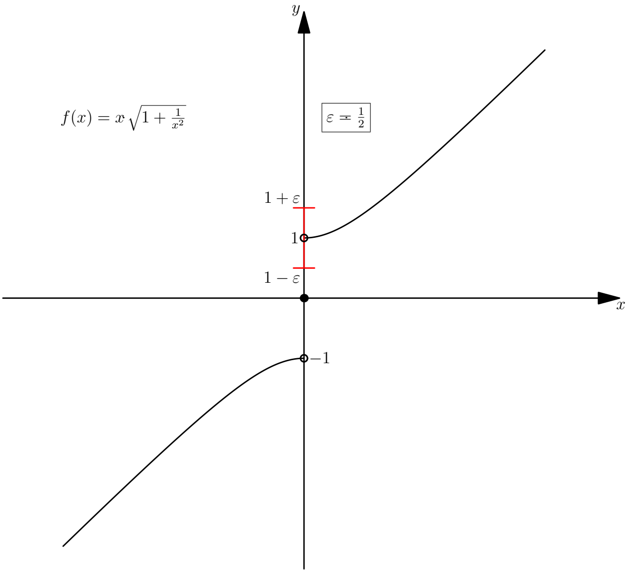
Soit $I =]a, b[$ un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur la réunion : $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

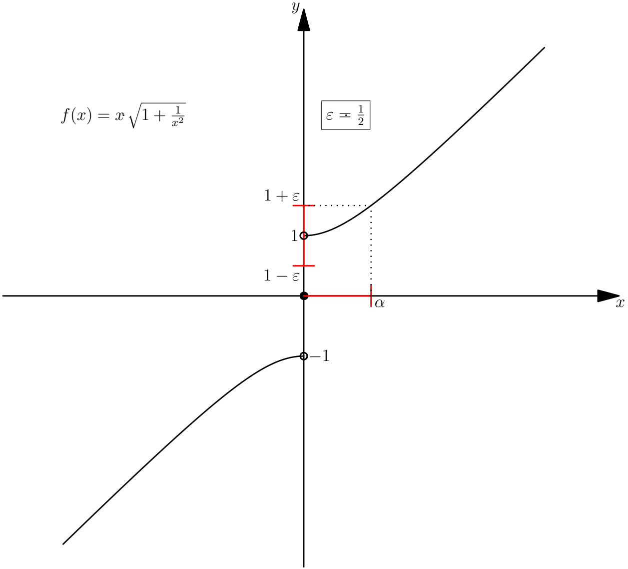
- Si pour $x \in]a, x_0[$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche.
- Si pour $x \in]x_0, b[$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite.

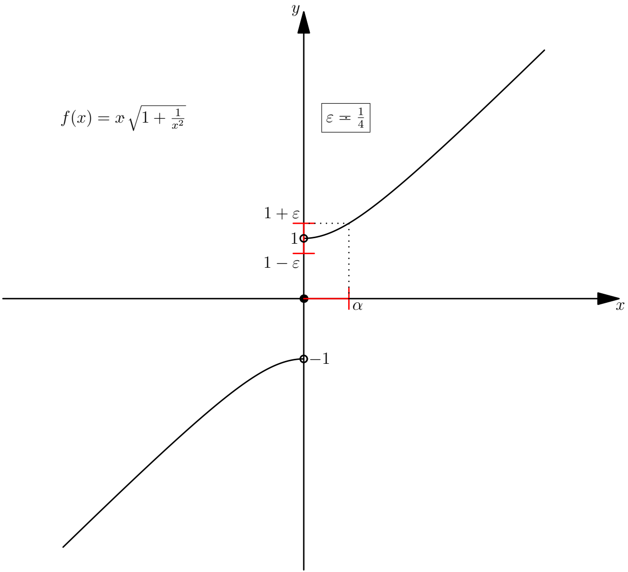
Notation : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ limite à gauche

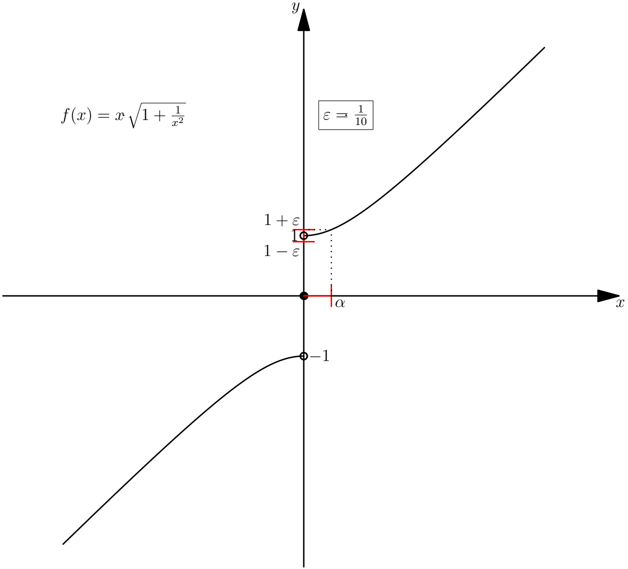
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ limite à droite

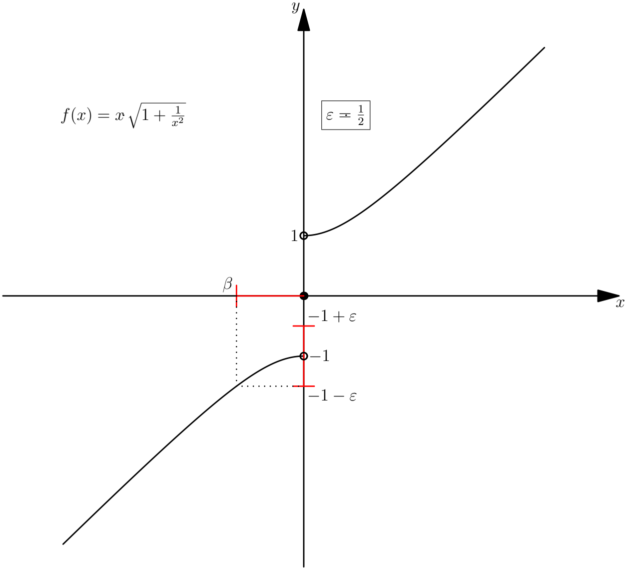

y
$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
1
x
-1

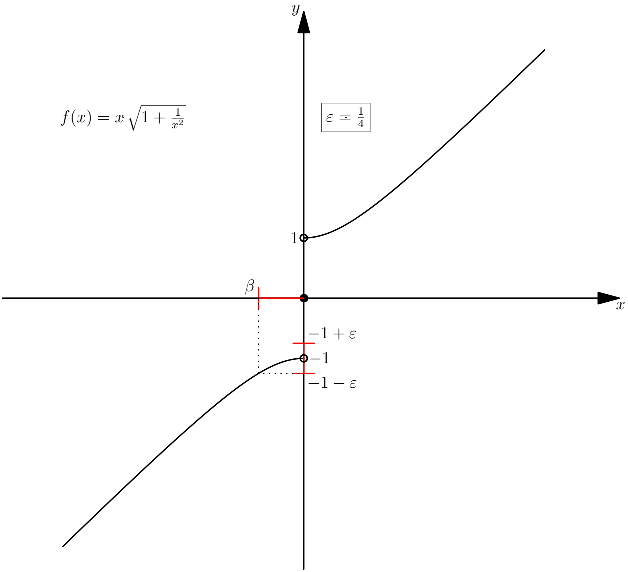

y
$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$1+\varepsilon$
1
$1-\varepsilon$
x
-1

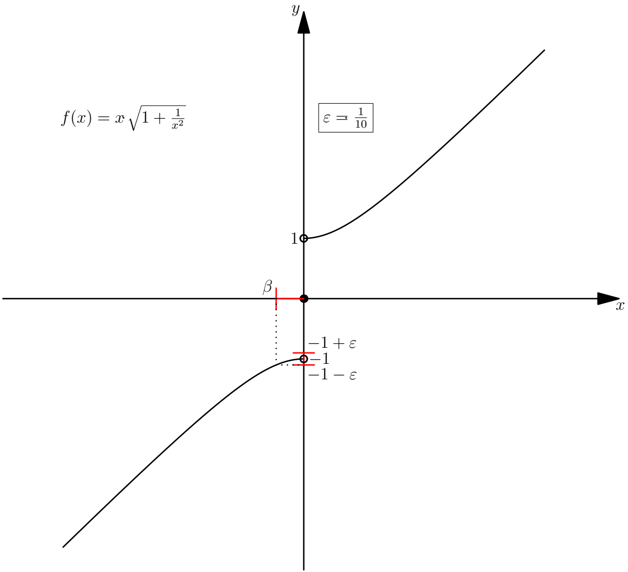

y
$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
$1+\varepsilon$
1
$1-\varepsilon$
α
x
-1


y
$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{4}$
$1+\varepsilon$
1
$1-\varepsilon$
α
x
-1


$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{10}$
y
x
$1+\varepsilon$
1
$1-\varepsilon$
α
-1


y
$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{2}$
1
β
x
$-1+\varepsilon$
-1
$-1-\varepsilon$


y
$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{4}$
1
β
x
$-1 + \varepsilon$
-1
$-1 - \varepsilon$


$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$
$\varepsilon = \frac{1}{10}$
y
x
1
β
$-1+\varepsilon$
-1
$-1-\varepsilon$

Formes indéterminées

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $\quad (\infty - \infty)$

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty - \infty)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty - \infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ $(\frac{0}{0})$

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty - \infty)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ $(\dfrac{0}{0})$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\dfrac{\infty}{\infty})$

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty - \infty)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ $(\dfrac{0}{0})$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\dfrac{\infty}{\infty})$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)}$ si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ (1^{∞})

Formes indéterminées

On n'a pas de critère pour :

- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big)$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\infty - \infty)$
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(0.\infty)$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $(\frac{0}{0})$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ $(\frac{\infty}{\infty})$
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)}$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ (1^{∞})
- $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)}$ si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (∞^{0})

Exercices

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\sqrt{x} - x\right)$

Exercices

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\sqrt{x} - x\right)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)\right)$

Exercices

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - x\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\sqrt{x} - x\right)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\ln(x+1) - \ln(x^2+1)\right)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercices

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(\sqrt{x}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\right)$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exercices

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(\sqrt{x}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\right)$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

Continuité

Fonction continue

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A.

- Si $x_0 \in A$ on dit que *f est continue en x_0* si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Fonction continue

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A.

- Si $x_0 \in A$ on dit que *f est continue en x_0* si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que *f est continue sur A* si f est continue en tout point de A.

Fonction continue

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A.

- Si $x_0 \in A$ on dit que *f est continue en x_0* si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que *f est continue sur A* si f est continue en tout point de A.

$\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ ayant la propriété suivante :

$$(x \in A \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Continuité de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions continues sur A et $\lambda \in \mathbb{R}$

Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in A$ (sur A), alors :

- La fonction $f + g$ est continue en x_0 (sur A)

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Continuité de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions continues sur A et $\lambda \in \mathbb{R}$

Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in A$ (sur A), alors :

- La fonction $f+g$ est continue en x_0 (sur A)
- La fonction $f.g$ est continue en x_0 (sur A)

Continuité de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions continues sur A et $\lambda \in \mathbb{R}$

Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in A$ (sur A), alors :

- La fonction $f + g$ est continue en x_0 (sur A)
- La fonction $f.g$ est continue en x_0 (sur A)
- La fonction $\lambda.f$ est continue en x_0 (sur A)

Continuité de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions continues sur A et $\lambda \in \mathbb{R}$

Supposons que f et g sont continues en $x_0 \in A$ (sur A), alors :

- La fonction $f + g$ est continue en x_0 (sur A)
- La fonction $f.g$ est continue en x_0 (sur A)
- La fonction $\lambda.f$ est continue en x_0 (sur A)
- Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0 (sur A)

Continuité de $g \circ f$

Théorème : Soit $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : B \longmapsto \mathbb{R}$

On suppose que $f(A) \subset B$ et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in B$

Si g est continue en ℓ, alors : $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(l)$

Continuité de $g \circ f$

g est continue en ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 : \quad (y \in B \text{ et } |y - \ell| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(\ell)| \leq \varepsilon$$

Continuité de $g \circ f$

f a pour limite ℓ en x_0 :

$$\alpha > 0$$

$$\exists \beta > 0 : \quad (x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \beta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \alpha$$

Continuité de $g \circ f$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 : \quad (y \in B \text{ et } |y - \ell| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(\ell)| \leq \varepsilon$$

$$\exists \beta > 0 : \quad (x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \beta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \alpha$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \beta > 0 :$$

$$(x \in A, x \neq x_0, |x - x_0| \leq \beta) \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(\ell)| \leq \varepsilon$$

Continuité de $g \circ f$

Corollaire 1 : La composée de deux fonctions continues est continue.

Continuité de $g \circ f$

Corollaire 1 : La composée de deux fonctions continues est continue.

Corollaire 2 : Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si u_n est convergente vers $L \in I$
2. Si f est continue

Alors L vérifie : $f(L) = L$

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a, b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a, b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell = g(a)$$

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a,b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \ell = g(a)$ $\quad$ g est continue en a

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $]a,b[$ et ℓ un nombre réel.

Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

On définit la fonction g sur $[a,b[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,b[\\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell = g(a)$ $\quad g$ est continue en a

g est le prolongement par continuité de f en a.

Exercices

Utilisation des opérations

Soit f une fonction définie sur $]1\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x^2+1}$$

f est continue sur $]1\,,+\infty[$

Exercices

Utilisation des opérations

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - \sin x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercices
Utilisation des limites

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = & \dfrac{x^3+8}{x+2} \quad \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) & = & 12 \end{cases}$$

Théorème : Soit $f : [a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors :

Théorème : Soit $f : [a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b

Théorème : Soit $f : [a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b
  2. $\lim_{x \to b} f(x) = \sup\{y = f(x) \mid x \in [a, b[\} = \sup_{x \in [a, b[} f(x)$

Théorème : Soit $f : [a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

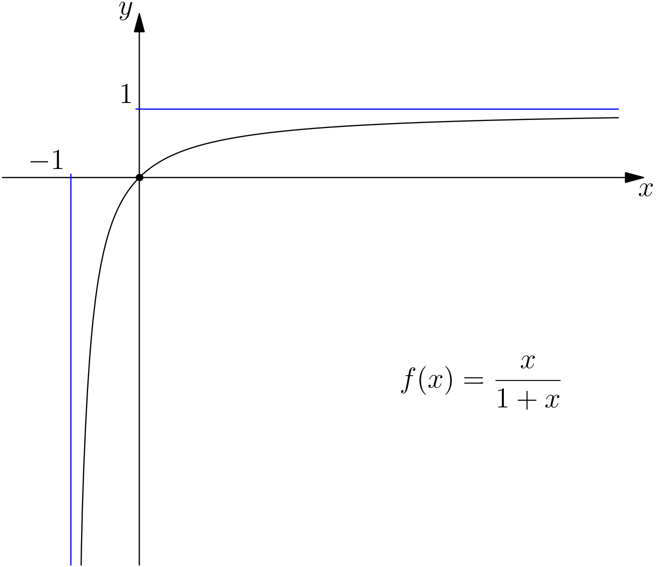
- Si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b
  2. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\{y = f(x) \mid x \in [a, b[\} = \sup\limits_{x \in [a, b[} f(x)$
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

Théorème : Soit $f : [a, b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est majorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers b
  2. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\{y = f(x) \mid x \in [a, b[\} = \sup\limits_{x \in [a, b[} f(x)$
- Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

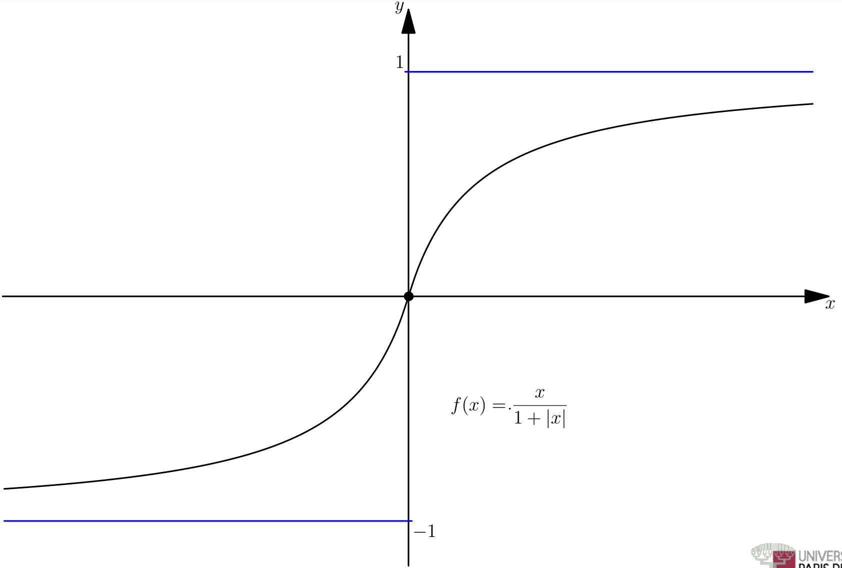
Théorème valide si on remplace b par $+\infty$

Fonction croissante majorée, non minorée



$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Fonction croissante majorée et minorée



Théorème : Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :

Théorème : Soit $f :]a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a

Théorème : Soit $f :]a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a
  2. $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{y = f(x) \mid x \in]a, b]\} = \inf_{x \in]a, b]} f(x)$

Théorème : Soit $f :]a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a
  2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\{y = f(x) \mid x \in]a, b]\} = \inf\limits_{x \in]a,b]} f(x)$
- Si f n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

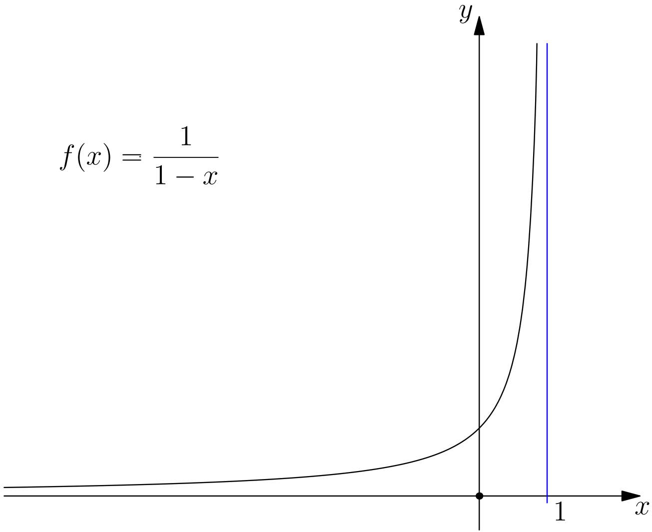
Théorème : Soit $f :]a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- Si f est minorée, alors :
  1. f a une limite quand x tend vers a
  2. $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{y = f(x) \mid x \in]a,b]\} = \inf_{x \in]a,b]} f(x)$
- Si f n'est pas minorée, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

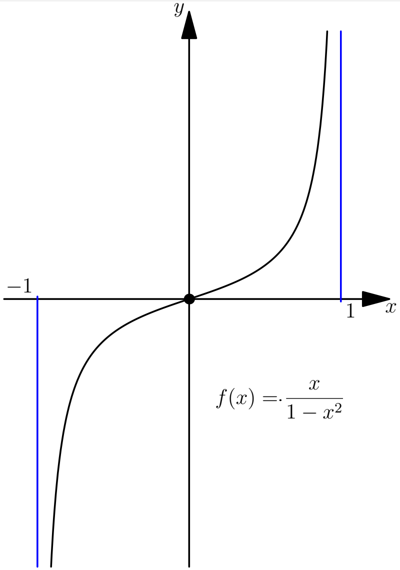
Théorème valide si on remplace a par $-\infty$

Fonction croissante minorée, non majorée

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



Fonction croissante ni majorée, ni minorée

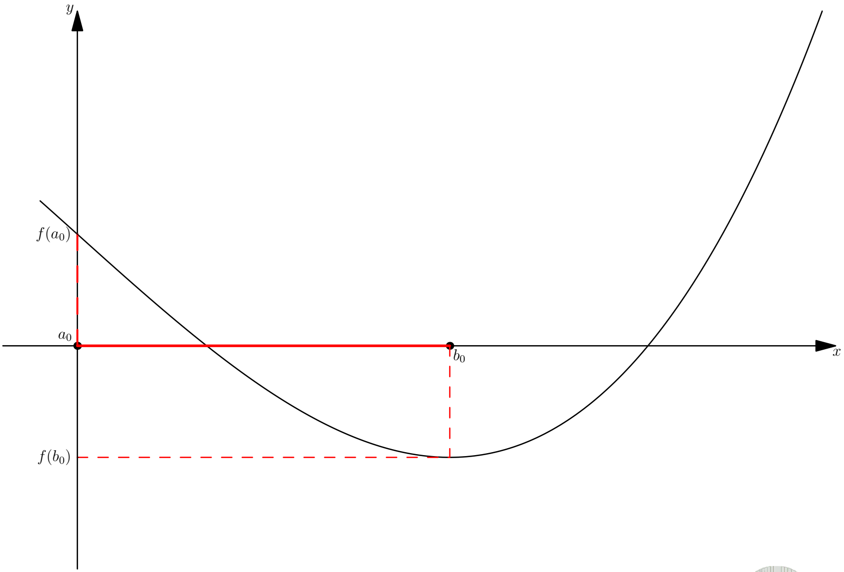


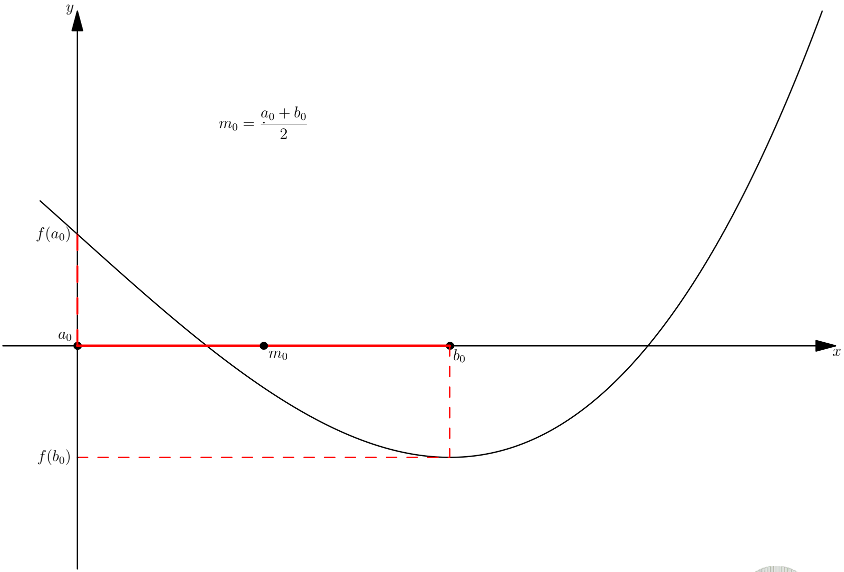
Proposition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

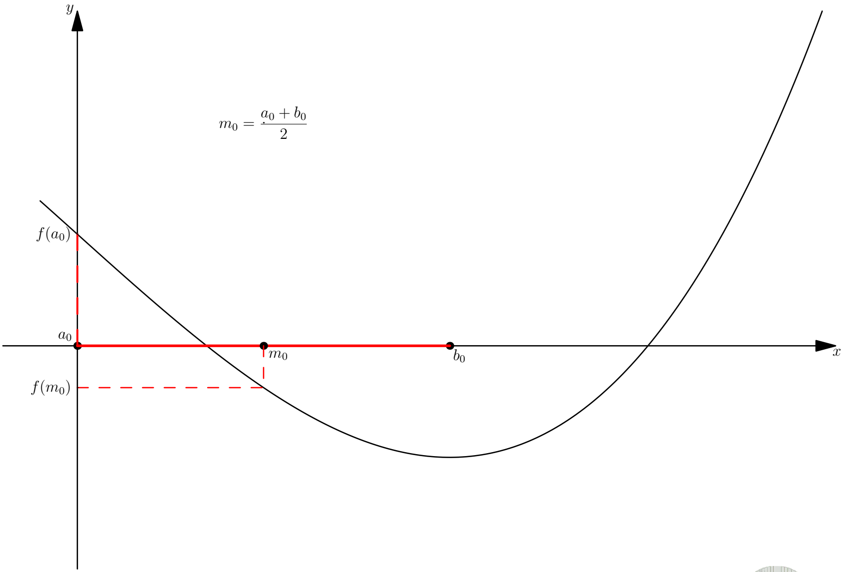
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont non-nuls et de signes contraires,

alors :

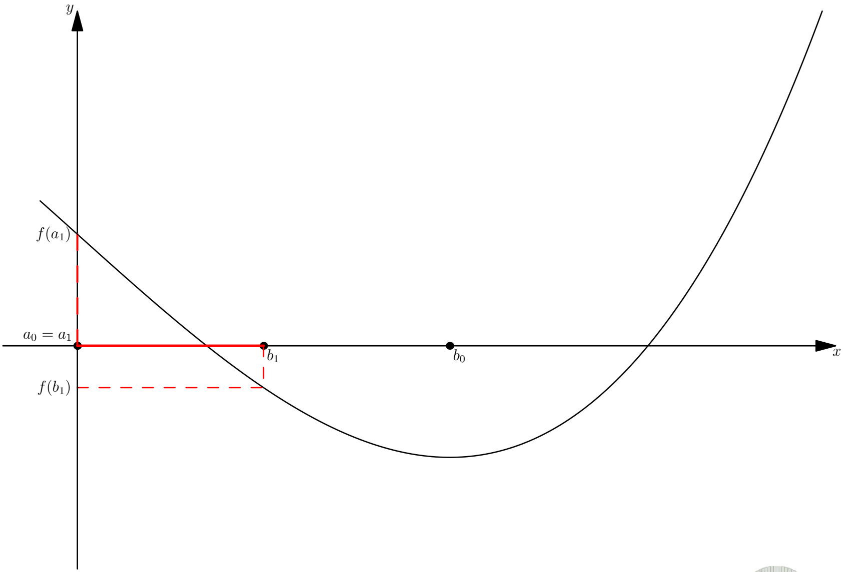
il existe au moins un nombre $c \in]a\,,b[$ tel que $f(c) = 0$.

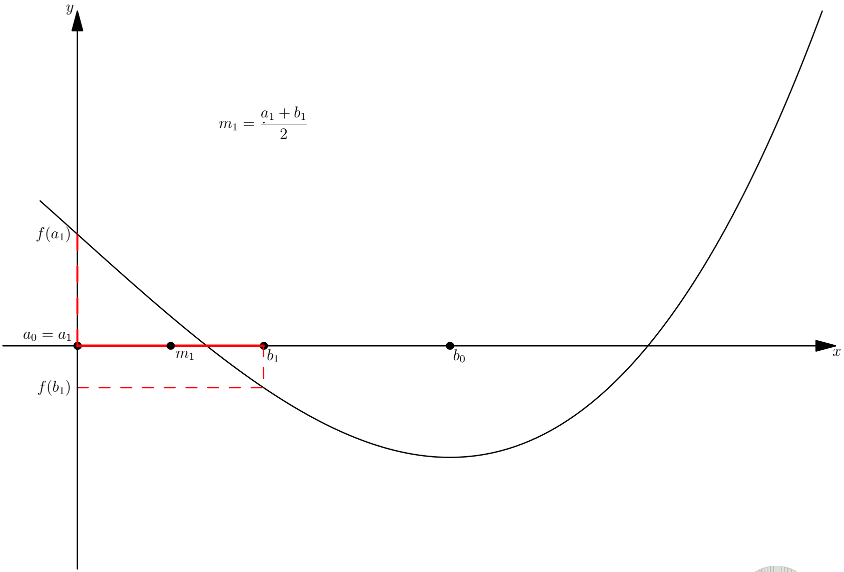

y
$f(a_0)$
a_0
b_0
x
$f(b_0)$


y
$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
$f(a_0)$
a_0
m_0
b_0
x
$f(b_0)$

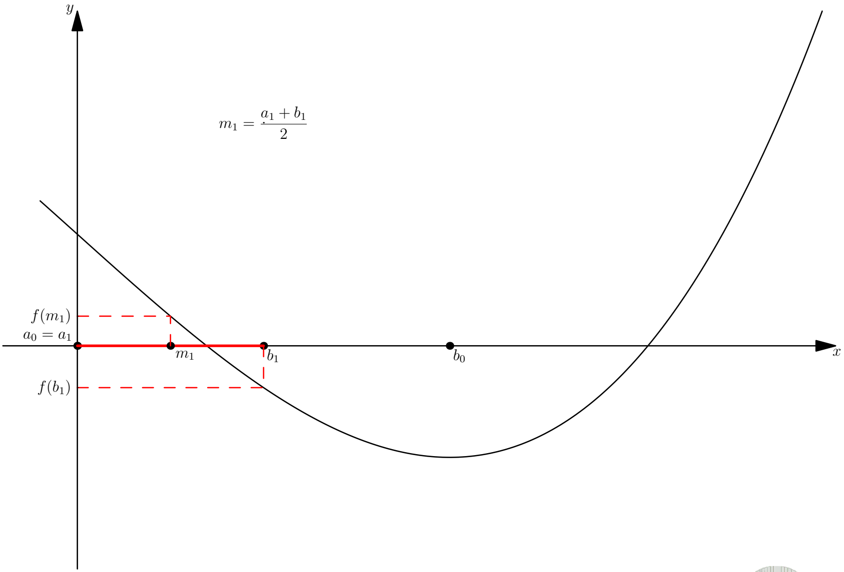


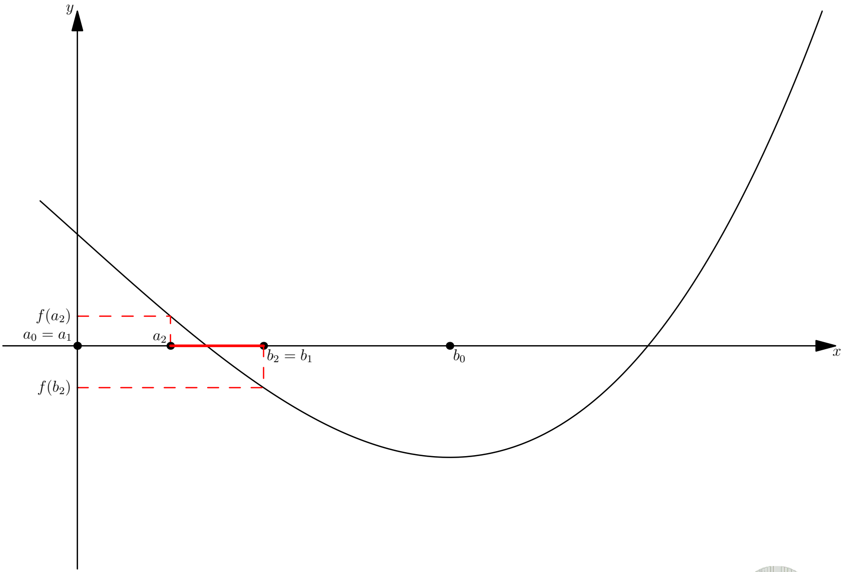
y
$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
$f(a_0)$
a_0
m_0
b_0
x
$f(m_0)$

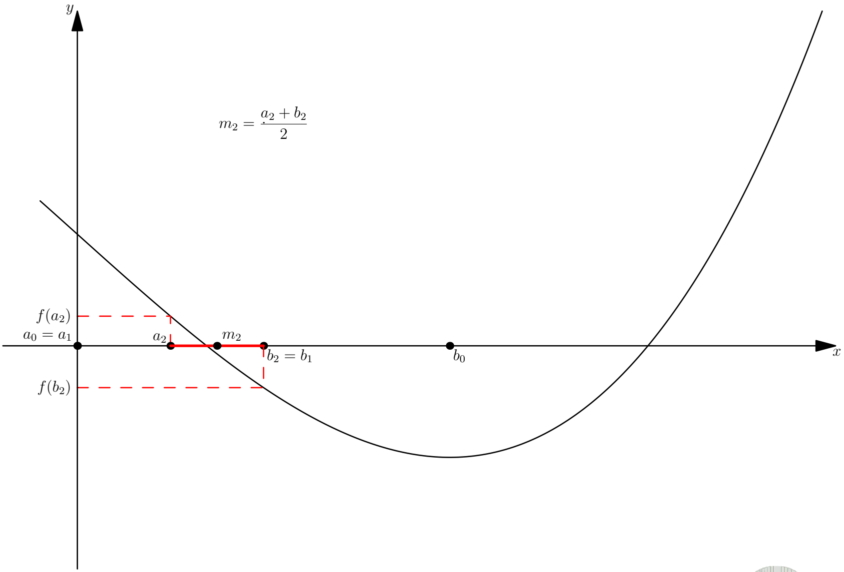

y
$f(a_1)$
$a_0 = a_1$
$f(b_1)$
b_1
b_0
x

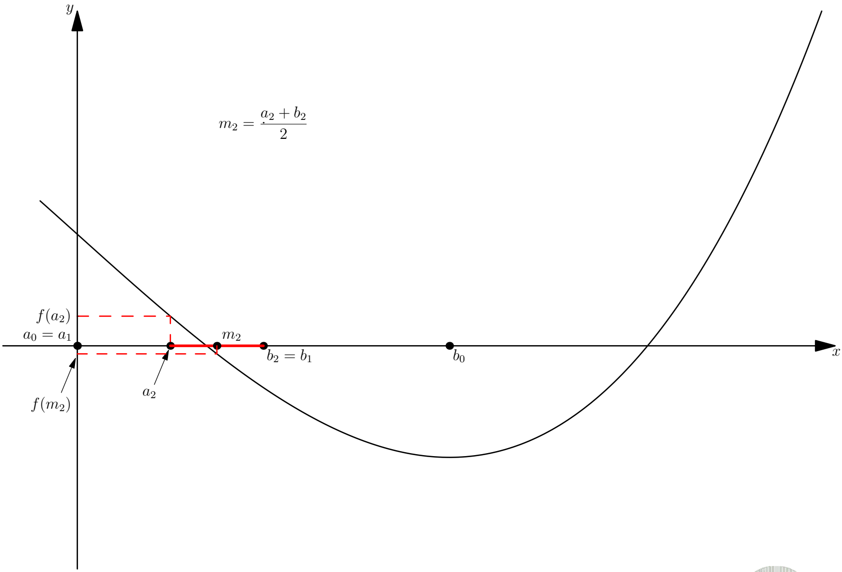


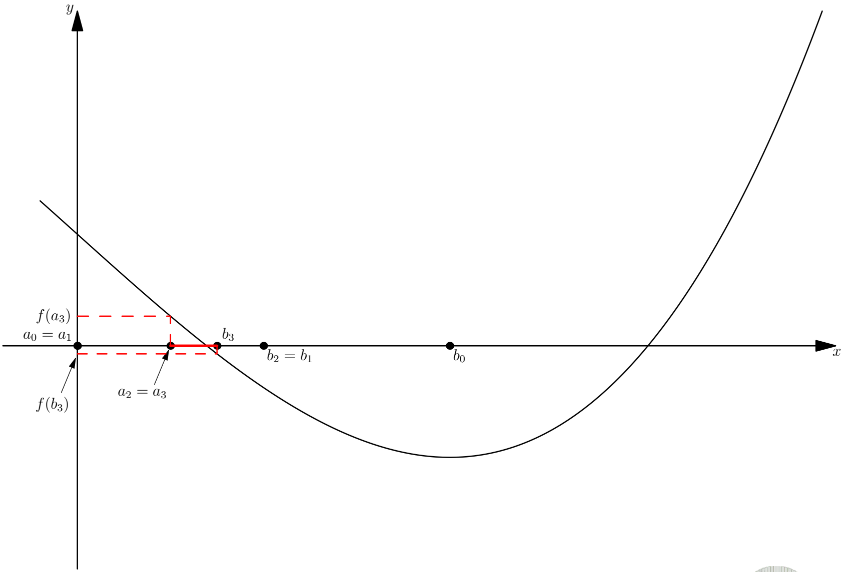
y
$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$
$f(a_1)$
$a_0 = a_1$
m_1
b_1
b_0
x
$f(b_1)$

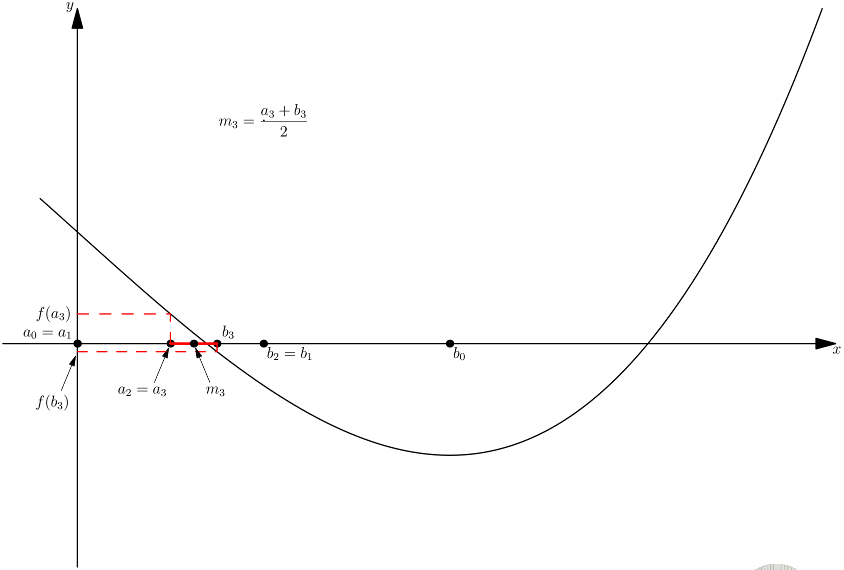

y
$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$
$f(m_1)$
$a_0 = a_1$
m_1
b_1
b_0
x
$f(b_1)$

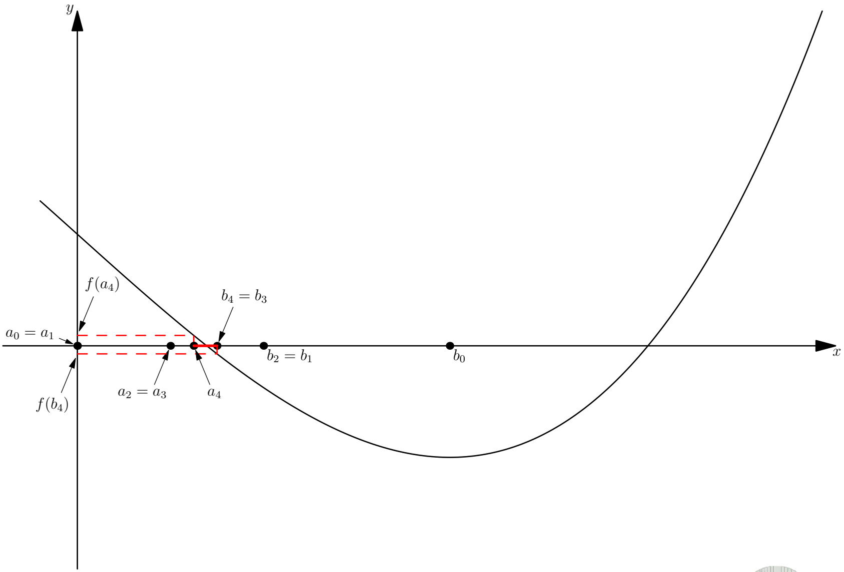

y
$f(a_2)$
$a_0 = a_1$
a_2
$f(b_2)$
$b_2 = b_1$
b_0
x

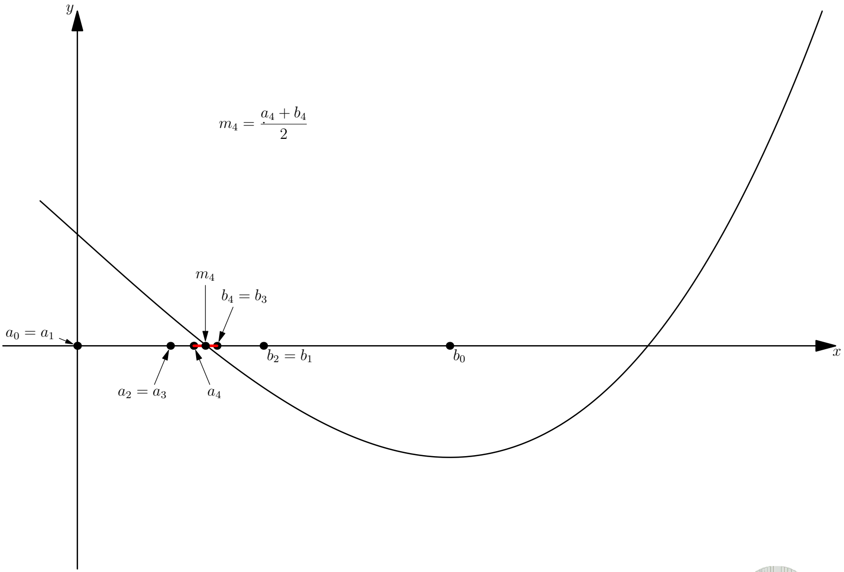

y
$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$
$f(a_2)$
$a_0 = a_1$
a_2
m_2
$b_2 = b_1$
b_0
x
$f(b_2)$


y
$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$
$f(a_2)$
$a_0 = a_1$
m_2
$b_2 = b_1$
b_0
x
$f(m_2)$
a_2


y
x
$f(a_3)$
$a_0 = a_1$
b_3
$b_2 = b_1$
b_0
$f(b_3)$
$a_2 = a_3$


y
$m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$
$f(a_3)$
$a_0 = a_1$
b_3
$b_2 = b_1$
b_0
x
$f(b_3)$
$a_2 = a_3$
m_3


y
x
$f(a_4)$
$b_4 = b_3$
$a_0 = a_1$
$b_2 = b_1$
b_0
$f(b_4)$
$a_2 = a_3$
a_4


y
$m_4 = \frac{a_4 + b_4}{2}$
m_4
$b_4 = b_3$
$a_0 = a_1$
$b_2 = b_1$
b_0
x
$a_2 = a_3$
a_4

Proposition : Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont non-nuls et de signes contraires,

alors :

il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0, \quad c = m_0$

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0$, $\quad c = m_0$
- Si $f(m_0) > 0$, $\quad a_1 = m_0$, et $b_1 = b_0 \quad$ donc $\quad f(a_1) > 0$

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0$, $\quad c = m_0$
- Si $f(m_0) > 0$, $\quad a_1 = m_0$, et $b_1 = b_0$ donc $f(a_1) > 0$
- Si $f(m_0) < 0$, $\quad a_1 = a_0$, et $b_1 = m_0$ donc $f(b_1) < 0$

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0, \quad c = m_0$
- Si $f(m_0) > 0, \quad a_1 = m_0,$ et $b_1 = b_0$ donc $f(a_1) > 0$
- Si $f(m_0) < 0, \quad a_1 = a_0,$ et $b_1 = m_0$ donc $f(b_1) < 0$

$$a_0 < m_0 < b_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$$

Soit a_0 et b_0 tels que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.

Soit $m_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

- Si $f(m_0) = 0, \quad c = m_0$
- Si $f(m_0) > 0, \quad a_1 = m_0,$ et $b_1 = b_0$ donc $f(a_1) > 0$
- Si $f(m_0) < 0, \quad a_1 = a_0,$ et $b_1 = m_0$ donc $f(b_1) < 0$

$$a_0 < m_0 < b_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$$

$$b_1 - a_1 = \begin{cases} b_0 - m_0 = b_0 - \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{b_0-a_0}{2} & (\text{si } f(m_0) > 0) \\ m_0 - a_0 = \frac{a_0+b_0}{2} - a_0 = \frac{b_0-a_0}{2} & (\text{si } f(m_0) < 0) \end{cases}$$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0, \quad c = m_1$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0$, $\quad c = m_1$
- Si $f(m_1) > 0$, $\quad a_2 = m_1$, et $b_2 = b_1$ $\quad$ donc $\quad f(a_2) > 0$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0$, $\quad c = m_1$
- Si $f(m_1) > 0$, $\quad a_2 = m_1,$ et $b_2 = b_1$ $\quad$ donc $\quad f(a_2) > 0$
- Si $f(m_1) < 0$, $\quad a_2 = a_1,$ et $b_2 = m_1$ $\quad$ donc $\quad f(b_2) < 0$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0$, $\quad c = m_1$
- Si $f(m_1) > 0$, $\quad a_2 = m_1$, et $b_2 = b_1$ $\quad$ donc $\quad f(a_2) > 0$
- Si $f(m_1) < 0$, $\quad a_2 = a_1$, et $b_2 = m_1$ $\quad$ donc $\quad f(b_2) < 0$

$$a_1 < m_1 < b_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

Soit $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

- Si $f(m_1) = 0, \quad c = m_1$
- Si $f(m_1) > 0, \quad a_2 = m_1,$ et $b_2 = b_1$ donc $f(a_2) > 0$
- Si $f(m_1) < 0, \quad a_2 = a_1,$ et $b_2 = m_1$ donc $f(b_2) < 0$

$$a_1 < m_1 < b_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \leq a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

$$b_2 - a_2 = \begin{cases} b_1 - m_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2} & (\text{si } f(m_1) > 0) \\ m_1 - a_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2} & (\text{si } f(m_1) < 0) \end{cases}$$

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad \text{et} \quad f(b_n) < 0$

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction a_n est croissante et b_n est décroissante

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction a_n est croissante et b_n est décroissante
- $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ donc : $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction a_n est croissante et b_n est décroissante
- $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ donc : $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$

Les suite a_n et b_n sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite : c.

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction a_n est croissante et b_n est décroissante
- $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad$ donc : $\quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Les suite a_n et b_n sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite : c.

f est continue, donc : $\quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$

Par récurrence on construit deux suites a_n et b_n telles que :

- $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$
- $f(a_n) > 0 \quad$ et $\quad f(b_n) < 0$
- par construction a_n est croissante et b_n est décroissante
- $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ donc : $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Les suite a_n et b_n sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite : c.

f est continue, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(a_n) > 0 & \Rightarrow & f(c) \geq 0 \\ f(b_n) < 0 & \Rightarrow & f(c) \leq 0 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad f(c) = 0$$

Corollaire : Un polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a\,, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit k un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors :

il existe un nombre c, $\quad a < c < b \quad$ tel que : $\quad f(c) = k$.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit k un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors :

il existe un nombre c, $\quad a < c < b \quad$ tel que : $\quad f(c) = k$.

Supposons : $f(a) < k < f(b)$, on pose :

$$\forall x \in [a\,,b], \quad g(x) = f(x) - k$$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit k un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors :

il existe un nombre c, $\quad a < c < b \quad$ tel que : $\quad f(c) = k$.

Supposons : $f(a) < k < f(b)$, on pose :

$$\forall x \in [a\,,b], \quad g(x) = f(x) - k$$

$g(a) = f(a) - k < 0 \quad$ et $\quad g(b) = f(b) - k > 0$

$\exists c \in]a\,,b[: \quad g(c) = 0$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a\,, b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit k un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors :

il existe un nombre c, $\quad a < c < b \quad$ tel que : $\quad f(c) = k$.

Supposons : $f(a) < k < f(b)$, on pose :

$$\forall x \in [a\,, b], \quad g(x) = f(x) - k$$

$g(a) = f(a) - k < 0 \quad$ et $\quad g(b) = f(b) - k > 0$

$\exists c \in]a\,, b[: \quad g(c) = 0 = f(c) - k$

Corollaire : Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire : Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

$$\forall x, y \in f(I), \quad \text{si} \quad x < k < y, \quad \exists c \in I : f(c) = k$$

Théorème : Soit a et b deux nombres réels et $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a\,,b]$.

Théorème : Soit a et b deux nombres réels et $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a\,,b]$.

1. La fonction f est bornée sur $[a\,,b]$

Théorème : Soit a et b deux nombres réels et $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a\,,b]$.

1. La fonction f est bornée sur $[a\,,b]$
2. $f\big([a\,,b]\big) = [m\,,M]$ où : $m = \inf\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$, $\quad M = \sup\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$

Théorème : Soit a et b deux nombres réels et $f : [a\,,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur l'intervalle fermé et borné $[a\,,b]$.

1. La fonction f est bornée sur $[a\,,b]$
2. $f\big([a\,,b]\big) = [m\,,M]$ où : $m = \inf\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$, $\quad M = \sup\limits_{x\in[a\,,b]} f(x)$

Théorème admis

Proposition : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.

Alors : f est injective.

Proposition : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.

Alors : f est injective.

Soit $x \neq y$, en supposant f strictement croissante :

$$\left.\begin{array}{lcl} x < y & \Rightarrow & f(x) < f(y) \\ x > y & \Rightarrow & f(x) > f(y) \end{array}\right\} \quad f(x) \neq f(y)$$

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle .

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors :
   $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors :
   $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.
3. La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors :

   $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.
3. La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

   f bijective : $\exists f^{-1}$; si f strictement croissante :

$$x = f^{-1}(x') > f^{-1}(y') = y \quad \Longleftrightarrow \quad x' = f(x) > f(y) = y'$$