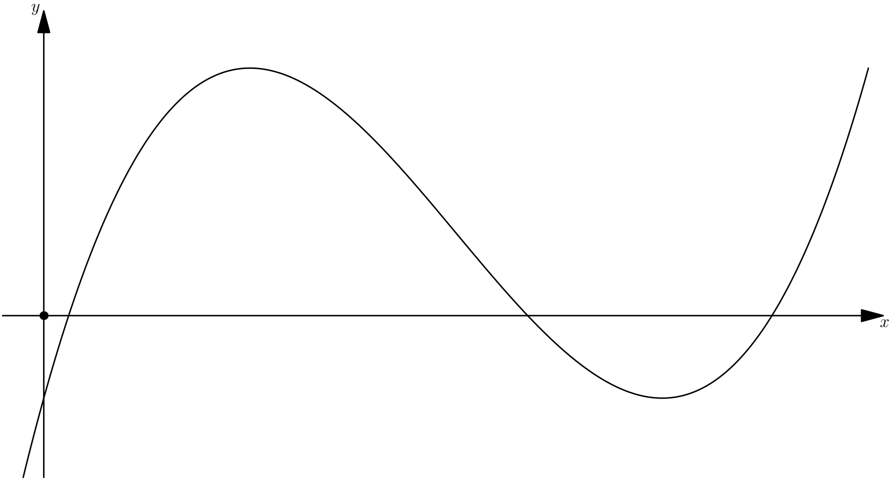
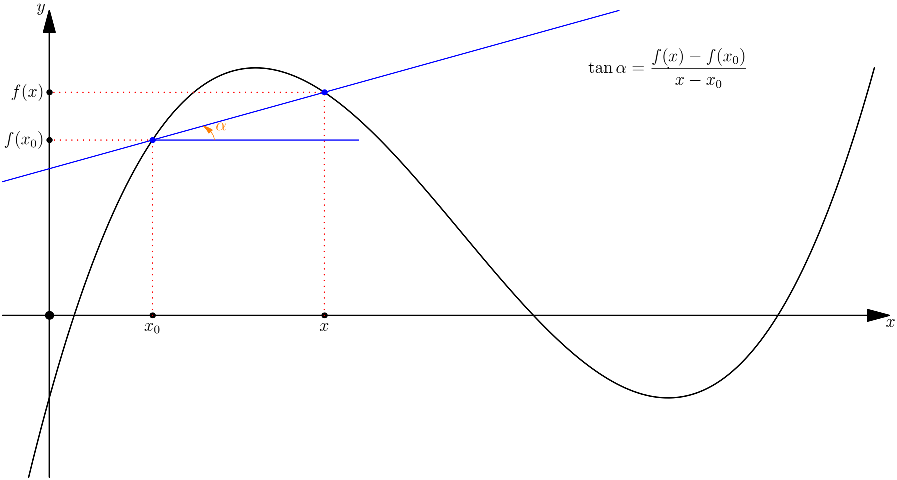
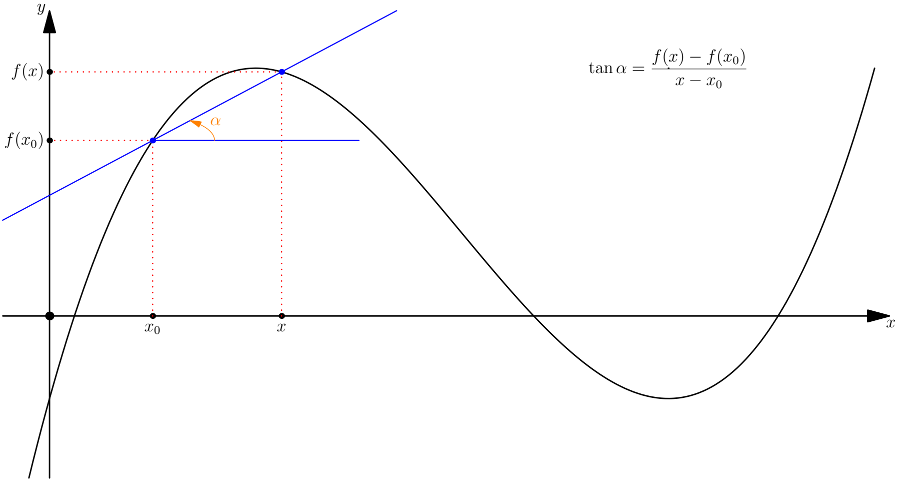
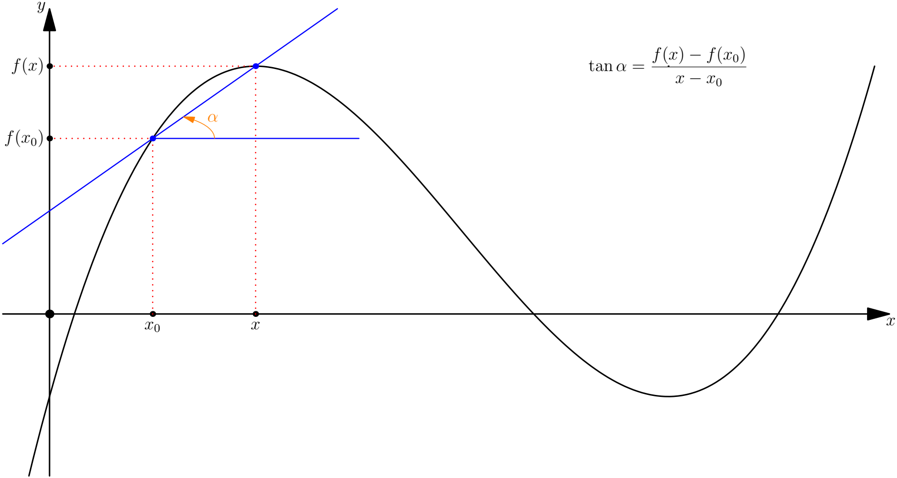
Fonctions dérivables


y
x

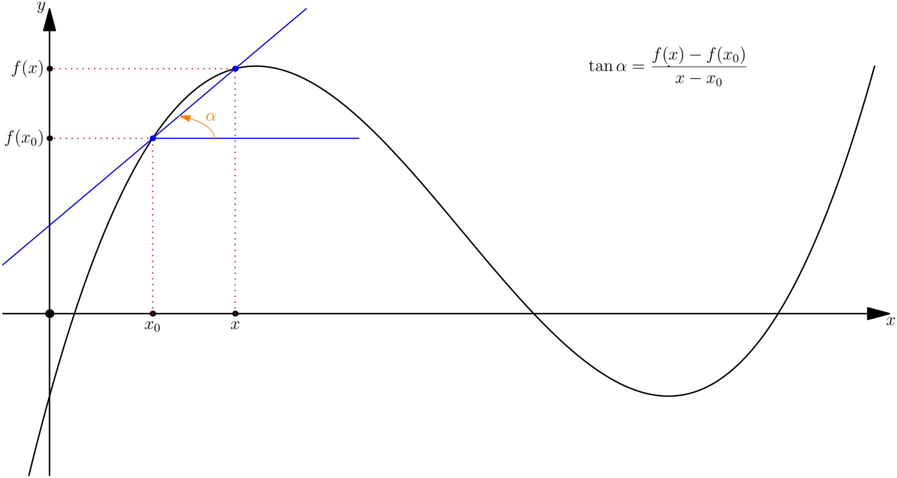

y
$f(x)$
$f(x_0)$
α
$\tan\alpha = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
x_0
x
x



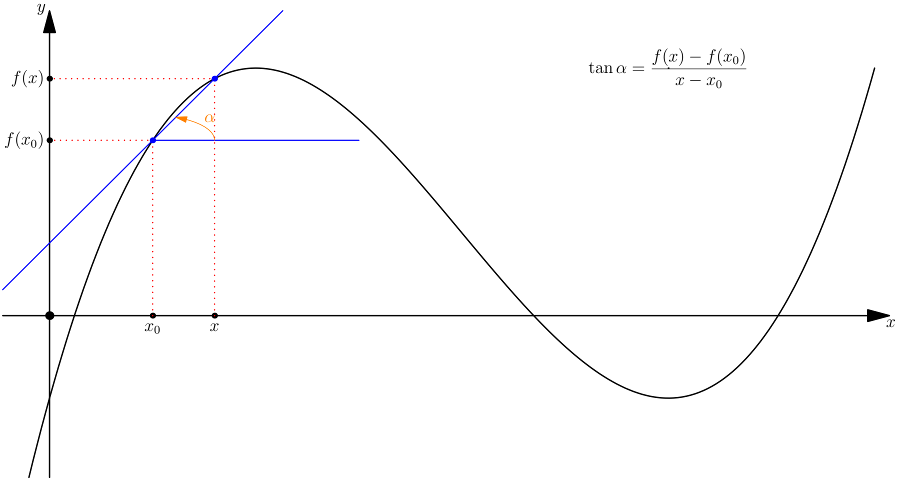
$$\tan\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



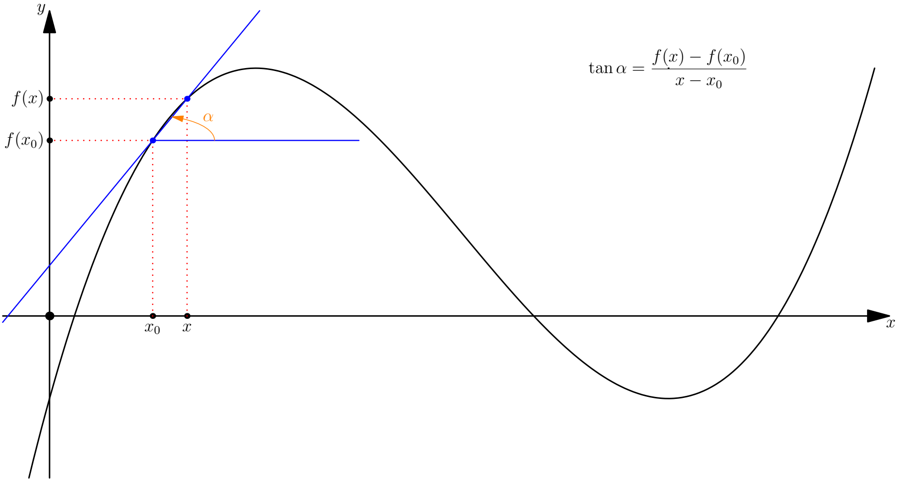
$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



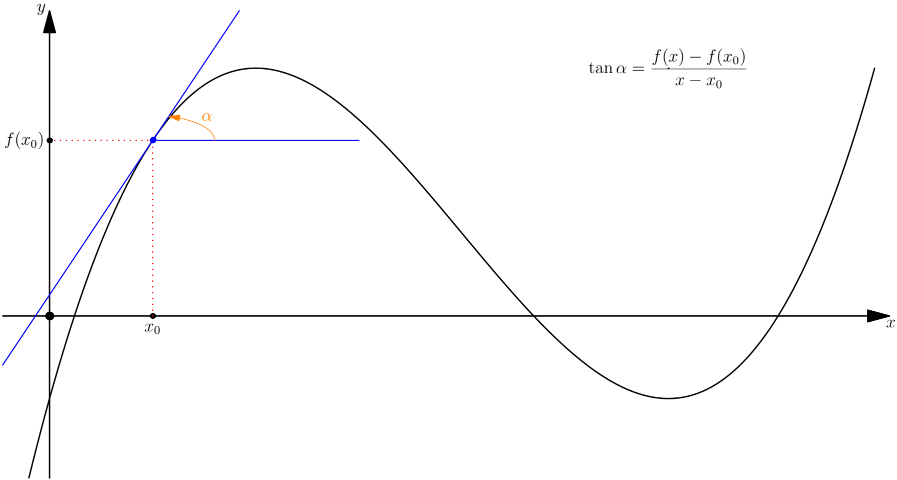
$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$


y
x
$f(x_0)$
x_0
α
$\tan\alpha = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est finie quand x tend vers x_0

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est finie quand x tend vers x_0

Notation : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite de :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est finie quand x tend vers x_0

Notation : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

Fonction dérivée

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que *f est dérivable sur I* si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.

Fonction dérivée

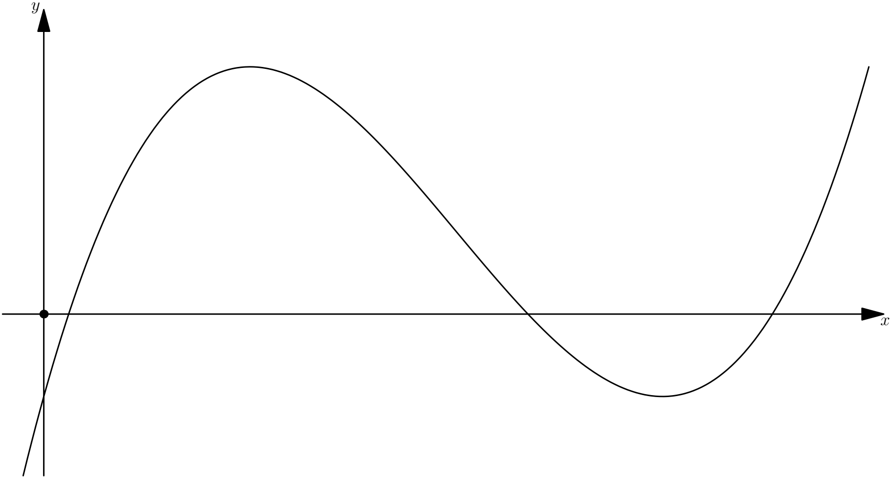
Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que *f est dérivable sur I* si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.
Dans ce cas la fonction :

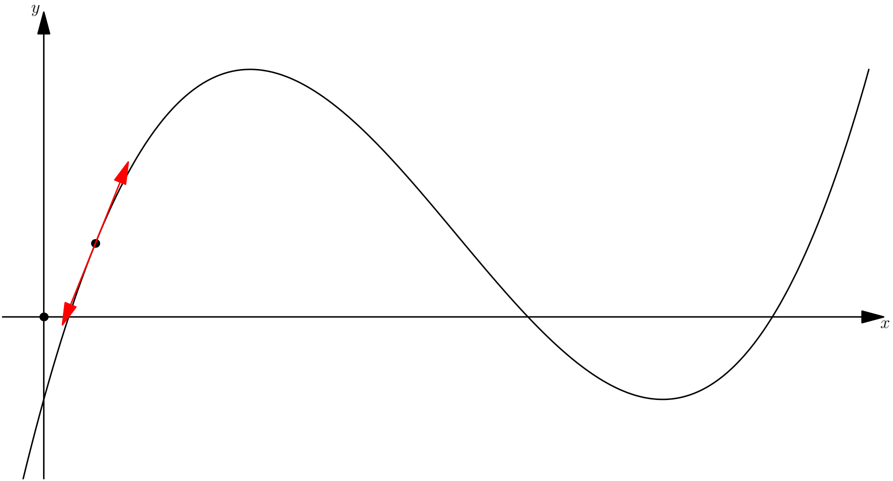
$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

s'appelle la *dérivée de f*

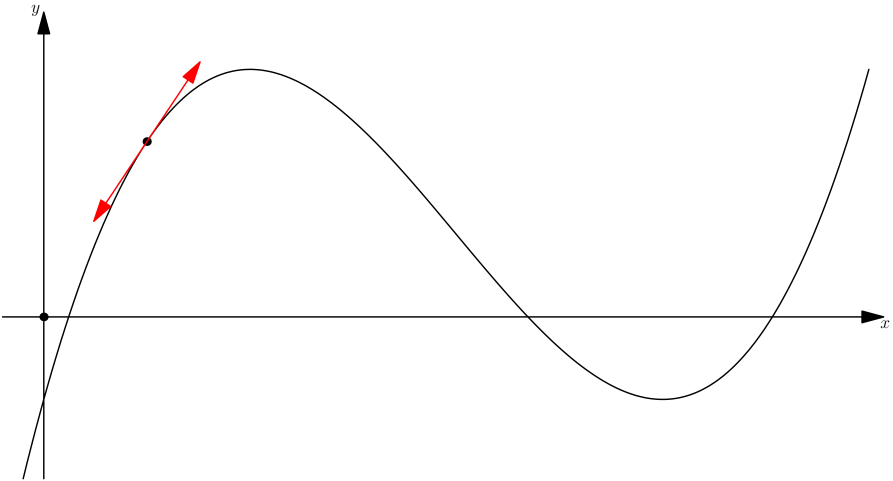
Le graphe d'une fonction dérivable



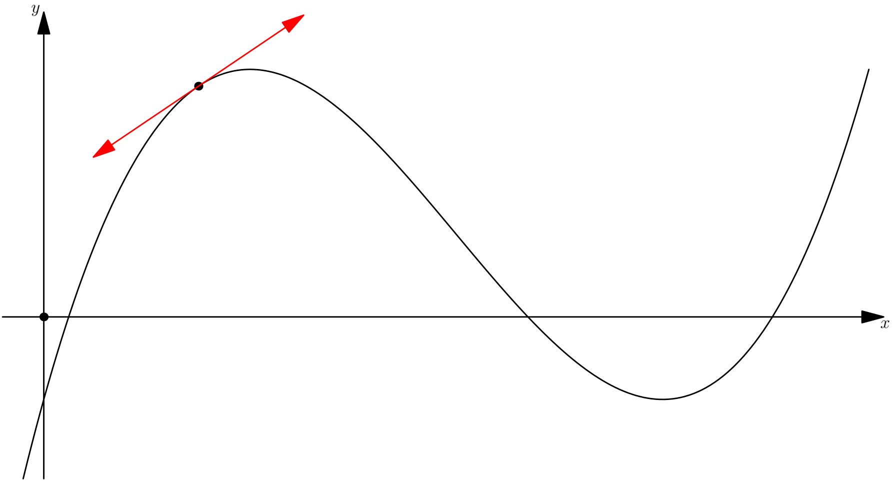
Le graphe d'une fonction dérivable



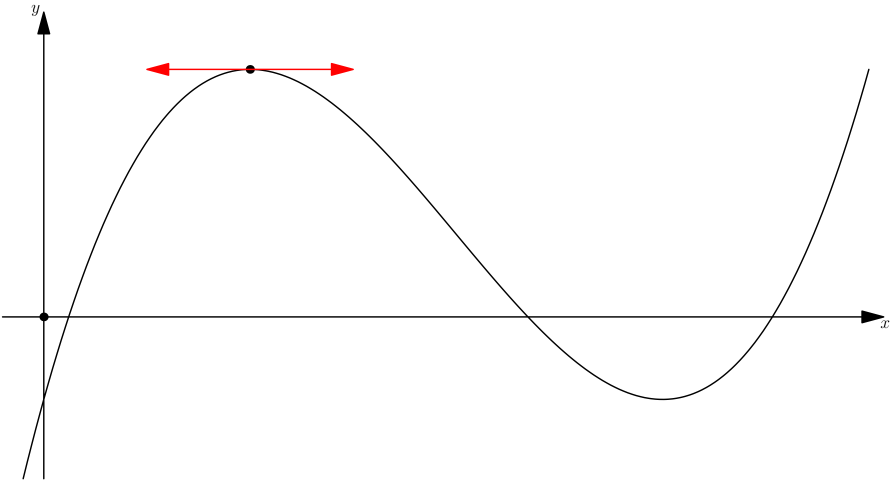
Le graphe d'une fonction dérivable



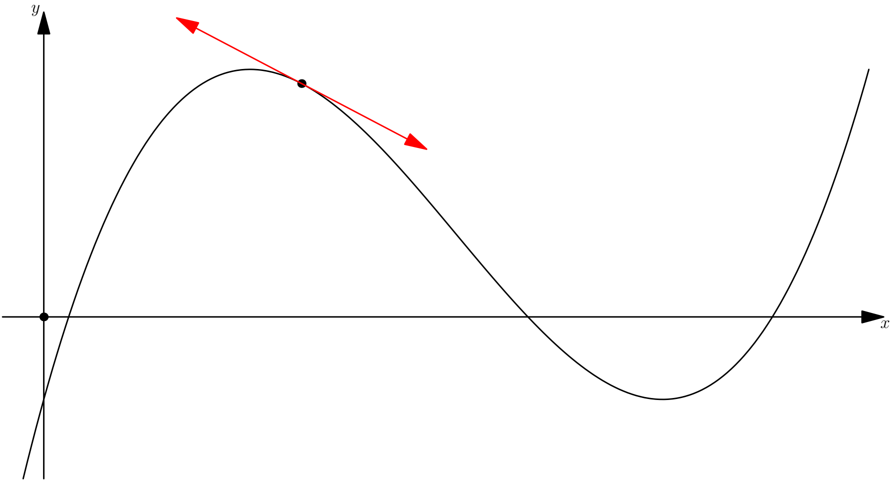
Le graphe d'une fonction dérivable



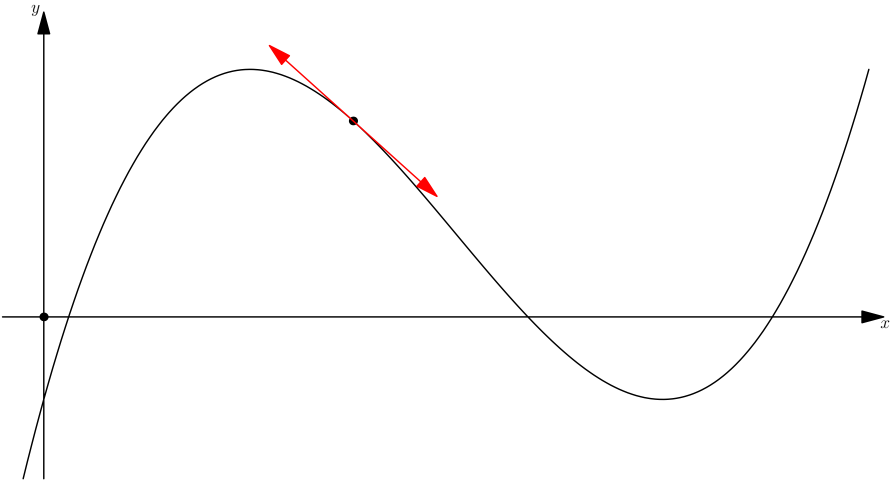
Le graphe d'une fonction dérivable



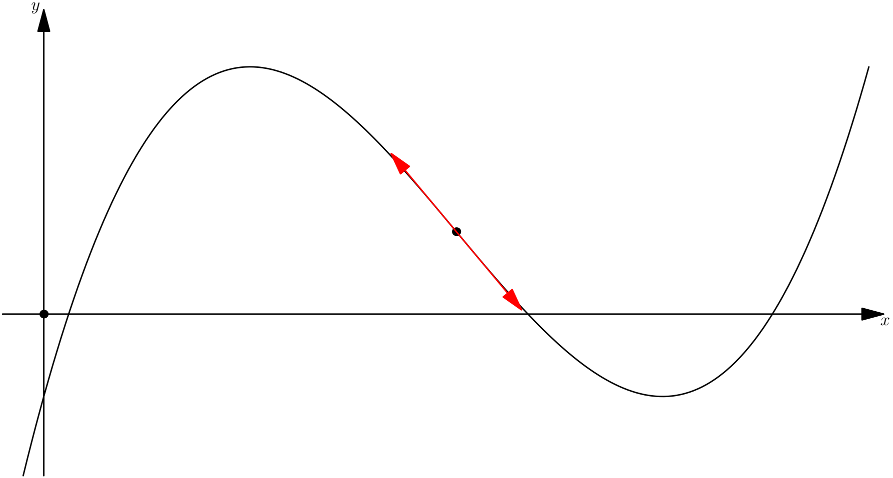
Le graphe d'une fonction dérivable



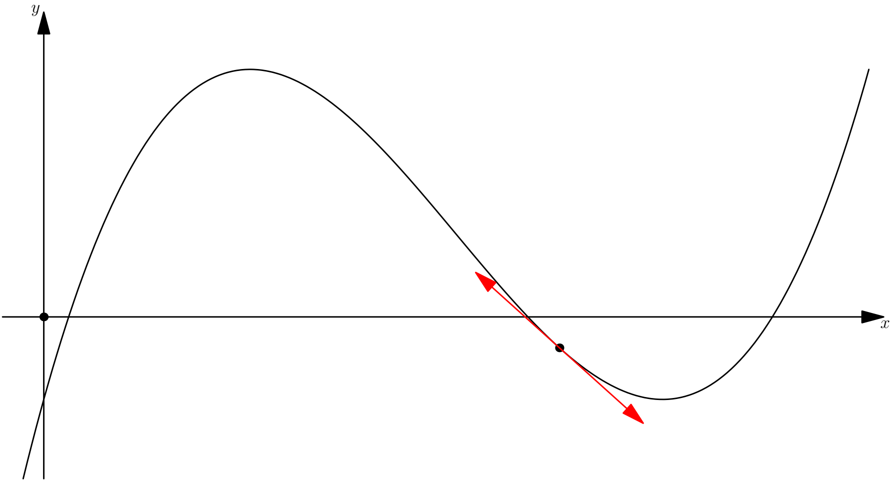
Le graphe d'une fonction dérivable



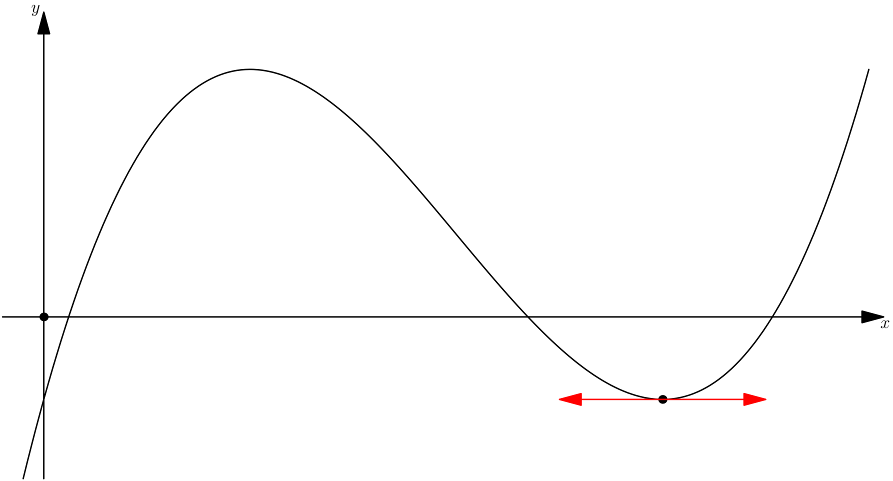
Le graphe d'une fonction dérivable



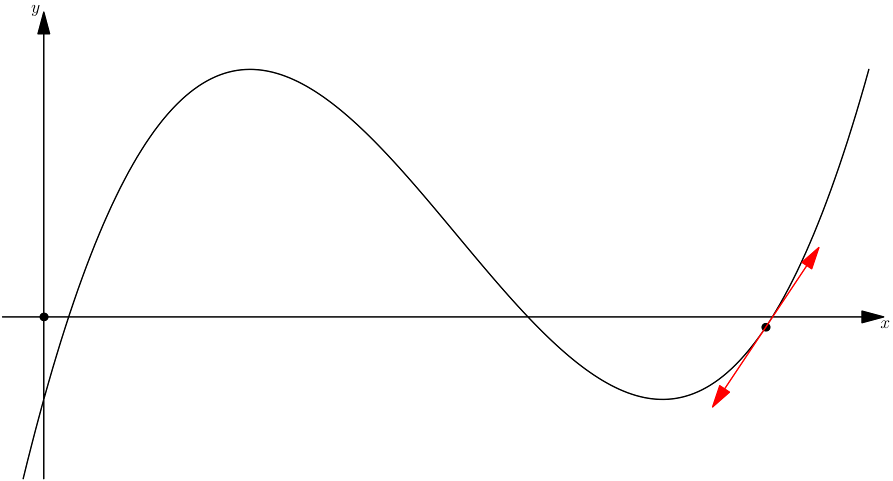
Le graphe d'une fonction dérivable



Le graphe d'une fonction dérivable



Le graphe d'une fonction dérivable



Dérivée à droite

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite à droite quand x tend vers x_0.

Notation : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Dérivée à gauche

Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

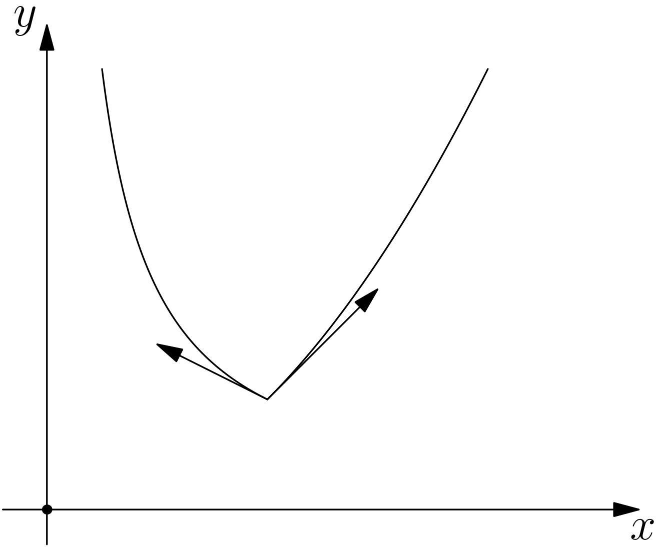
a une limite à gauche quand x tend vers x_0.

Notation : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Proposition : Soit I un intervalle ouvert, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I.

f est dérivable en x_0 si, et seulement si, $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Fonction non-dérivable



Si on pose : $x - x_0 = h$:

Si on pose : $x - x_0 = h$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si on pose : $x - x_0 = h$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si on pose : $x - x_0 = h$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0$$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose : $\begin{cases} \alpha(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose :
$$\begin{cases} \alpha(h) & = & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) & = & 0 \end{cases}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$$

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha(h) & = & \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \alpha(0) & = & 0 \end{array}\right.$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$$

Donc : si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que :

$$\begin{array}{rrcl} & f(x_0+h) & = & f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h) \\ \text{Et} : & \lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) & = & 0 \end{array}$$

Proposition : Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0

Proposition : Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0

Si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que : $\alpha(0) = 0$ et $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$

Proposition : Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0

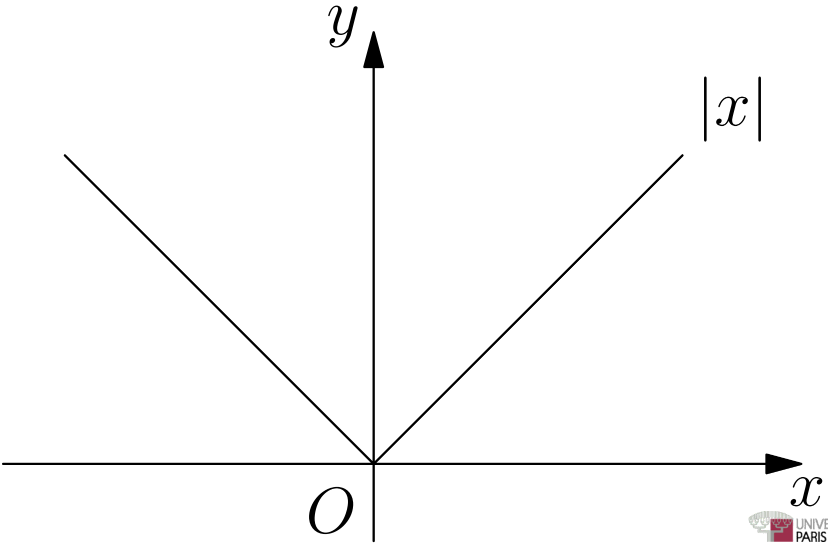
Si f est dérivable en x_0, il existe une fonction α, continue en 0, telle que : $\alpha(0) = 0$ et $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\alpha(h)$

Donc : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Proposition : Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0

Attention : Une fonction dérivable est continue ; le contraire est faux (la réciproque de cette proposition n'existe pas).

Fonction continue non-dérivable



Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f + g$ est dérivable en x_0

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f + g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f+g)' = f' + g'$$

- $f.g$ est dérivable en x_0

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

- $f.g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

Dérivées de la somme et du produit

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f+g)' = f' + g'$$

- $f.g$ est dérivable en x_0

$$\text{et :} \quad (f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$
$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\big(f(x)g(x) - f(x_0)g(x)\big) + \big(f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\big(f(x)g(x) - f(x_0)g(x)\big) + \big(f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert J

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe
- $x_0 \in I$

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe
- $x_0 \in I$

Alors : $g \circ f$ est dérivable et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big).f'(x_0)$$

Dérivée de la composée de f et g

Soit f et g deux fonctions :

- f est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert I
- g est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert J
- $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ existe
- $x_0 \in I$

Alors : $g \circ f$ est dérivable et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big).f'(x_0)$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$$

Dérivée de la composée de f et g

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$

On suppose $x_0 \neq 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$

On suppose $x_0 \neq 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{x_0 - x}{x x_0}\right)$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$

On suppose $x_0 \neq 0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{x_0 - x}{x x_0}\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{1}{x x_0}\right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\dfrac{1}{f}$

$$\text{Soit : } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longmapsto & \mathbb{R}^* \\ y & \longmapsto & g(y) = \dfrac{1}{y} \end{array}$$

f dérivable sur I et $x_0 \in I$, $\quad f(x_0) \neq 0$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\frac{1}{f}$

Soit : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longmapsto & \mathbb{R}^* \\ y & \longmapsto & g(y) = \dfrac{1}{y} \end{array}$

f dérivable sur I et $x_0 \in I$, $\quad f(x_0) \neq 0$

$$\forall x \in I, \quad g \circ f(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\dfrac{1}{f}$

Soit : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longmapsto & \mathbb{R}^* \\ y & \longmapsto & g(y) = \dfrac{1}{y} \end{array}$

f dérivable sur I et $x_0 \in I$, $\quad f(x_0) \neq 0$

$$\forall x \in I, \quad g \circ f(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0) = -\frac{1}{\big(f(x_o)\big)^2}\, f'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{\big(f(x_o)\big)^2}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\dfrac{f}{g}$

On écrit :
$$\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\dfrac{f}{g}$

On écrit : $$\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}\right)$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\dfrac{f}{g}$

On écrit :
$$\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

Dérivée d'un quotient

Dérivée de $\frac{f}{g}$

On écrit : $$\frac{f}{g} = f\,\frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \; : \; f_1(x) = \sin x$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \;:\; f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \;:\; f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \;:\; f_2(x) = e^x$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \ : \ f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \ : \ f_2(x) = e^x \qquad f_2'(x) = e^x$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \;:\; f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \;:\; f_2(x) = e^x \qquad f_2'(x) = e^x$

$f_3 \;:\; f_3(x) = 1$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1-e^x)}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \ : \ f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \ : \ f_2(x) = e^x \qquad f_2'(x) = e^x$

$f_3 \ : \ f_3(x) = 1 \qquad f_3'(x) = 0$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \; : \; f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \; : \; f_2(x) = e^x \qquad f_2'(x) = e^x$

$f_3 \; : \; f_3(x) = 1 \qquad f_3'(x) = 0$

$f_4 \; : \; f_4(x) = x^2$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1 - e^x)}{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

f_1 : $f_1(x) = \sin x$ $\quad f_1'(x) = \cos x$

f_2 : $f_2(x) = e^x$ $\quad f_2'(x) = e^x$

f_3 : $f_3(x) = 1$ $\quad f_3'(x) = 0$

f_4 : $f_4(x) = x^2$ $\quad f_4'(x) = 2x$

Exercices

Dérivées à l'aide des opérations

Monter que $f(x) = \dfrac{\sin(1-e^x)}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_1 \ : \ f_1(x) = \sin x \qquad f_1'(x) = \cos x$

$f_2 \ : \ f_2(x) = e^x \qquad f_2'(x) = e^x$

$f_3 \ : \ f_3(x) = 1 \qquad f_3'(x) = 0$

$f_4 \ : \ f_4(x) = x^2 \qquad f_4'(x) = 2x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\big(f_1 \circ (f_3 - f_2)\big)(x)}{\big(f_4 + f_3\big)(x)}$$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

Soit : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

Soit : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

Soit : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Montrer que f est dérivable en 0

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|f(x)\right| = \left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|f(x)\right| = \left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \quad$ Donc : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|f(x)\right| = \left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \quad$ Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$
2. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|f(x)\right| = \left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \quad$ Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$
2. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

   $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$

Exercices

Le cas des fonctions prolongées

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|f(x)\right| = \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2$ Donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$
2. $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \left(x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

   $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ Donc : $f'(0) = 0$

Dérivées successives

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Dérivée seconde : Si $f' : I \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable, on dit que f est deux-fois dérivable sur I.

Notation : $(f')' = f''$

f'' est la dérivée seconde de f sur I

Dérivées successives

Soit $f: \; I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Dérivée seconde : Si $f': \; I \longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable, on dit que f est deux-fois dérivable sur I.

Notation : $(f')' = f''$

f'' est la dérivée seconde de f sur I

Dérivée d'ordre n : On pose : $f^{(0)} = f$

Pour tout p, $1 \leq p \leq n$ on définit : $f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)'$

$f^{(n)}$ s'appelle la dérivée n-ième de f.

Dérivées successives

Formule de Leibniz pour le produit de deux fonctions

Si f et g sont n-fois dérivables sur un intervalle I,

alors : $f.g$ est n-fois dérivable sur I

Dérivées successives

Formule de Leibniz pour le produit de deux fonctions

Si f et g sont n-fois dérivables sur un intervalle I,

alors : $f.g$ est n-fois dérivable sur I

et :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Extrema

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

Soit $x_0 \in I$, on dit que :

- f a un maximum local en x_0, si :

$$\exists \alpha > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x, \; |x - x_0| \leq \alpha$$

Extrema

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.

Soit $x_0 \in I$, on dit que :

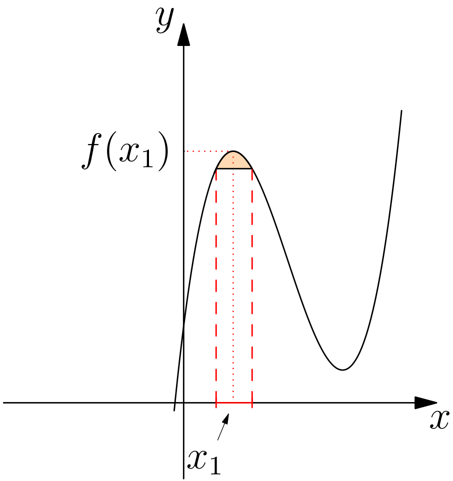
- f a un maximum local en x_0, si :

$$\exists \alpha > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x, \ |x - x_0| \leq \alpha$$

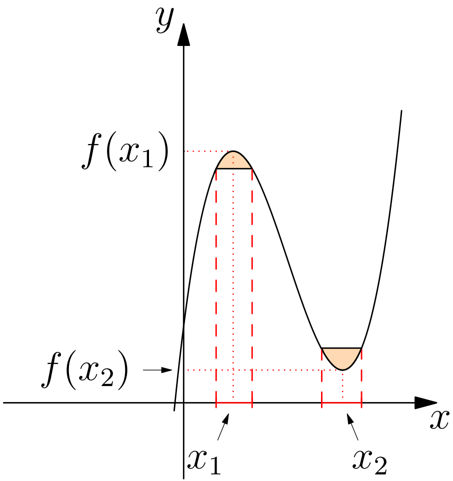
- f a un minimum local en x_0, si :

$$\exists \alpha > 0 : \quad f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x, \ |x - x_0| \leq \alpha$$

Extrema



Extrema



Condition nécessaire pour un extremum

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

Supposons que f a un minimum en x_0 : il existe un intervalle J autour de x_0 tel que : $\forall x \in J, \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Supposons que f a un minimum en x_0 : il existe un intervalle J autour de x_0 tel que : $\forall x \in J, \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Si $x \in J \quad x < x_0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

Supposons que f a un minimum en x_0 : il existe un intervalle J autour de x_0 tel que : $\forall x \in J, \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Si $x \in J \quad x < x_0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad$ donc : $f'(x_0) \leq 0$

Supposons que f a un minimum en x_0 : il existe un intervalle J autour de x_0 tel que : $\forall x \in J, \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$.

Si $x \in J \quad x < x_0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad$ donc : $f'(x_0) \leq 0$

Si $x \in J \quad x > x_0$: $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Supposons que f a un minimum en x_0 : il existe un intervalle J autour de x_0 tel que : $\forall x \in J, \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$.

$$\text{Si } x \in J \quad x < x_0 : \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{donc : } f'(x_0) \leq 0$$

$$\text{Si } x \in J \quad x > x_0 : \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{donc : } f'(x_0) \geq 0$$

Condition nécessaire pour un extremum

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

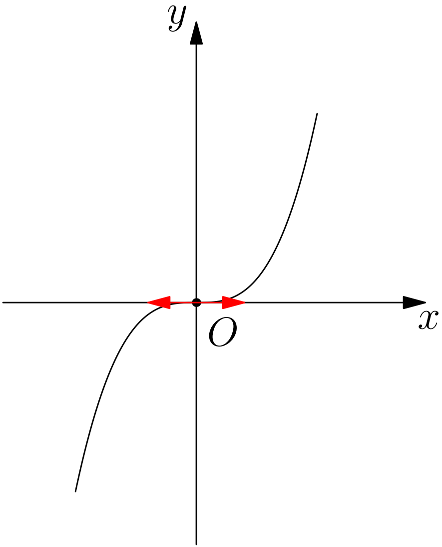
Condition nécessaire pour un extremum

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

Attention : On peut avoir $f'(x_0) = 0$ sans que la fonction ait un extremum en x_0 (la condition n'est pas suffisante).

$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 : \quad f'(0) = 0$



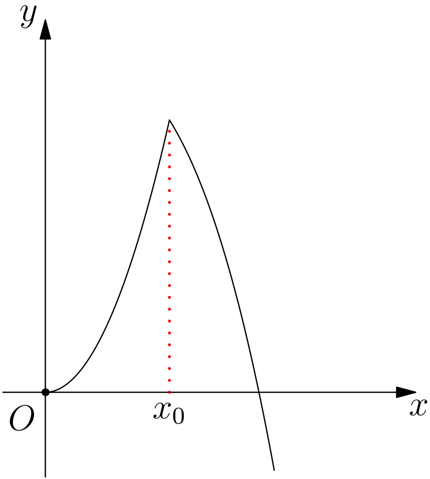
Condition nécessaire pour un extremum

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si f a un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$

Remarque : Une fonction peut avoir un extremum en x_0 sans être dérivable en x_0.

$$0 \leq x \leq -1+\sqrt{3},\ f(x) = 3x^2,$$
$$-1+\sqrt{3} \leq x,\ f(x) = -x^3+2$$



Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)

Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a\,,b[$ (intervalle ouvert)
- Si $f(a) = f(b) = 0$

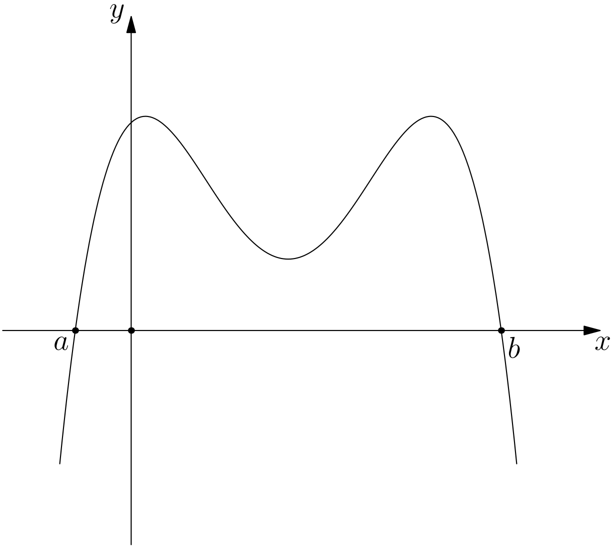
Théorème de Rolle

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

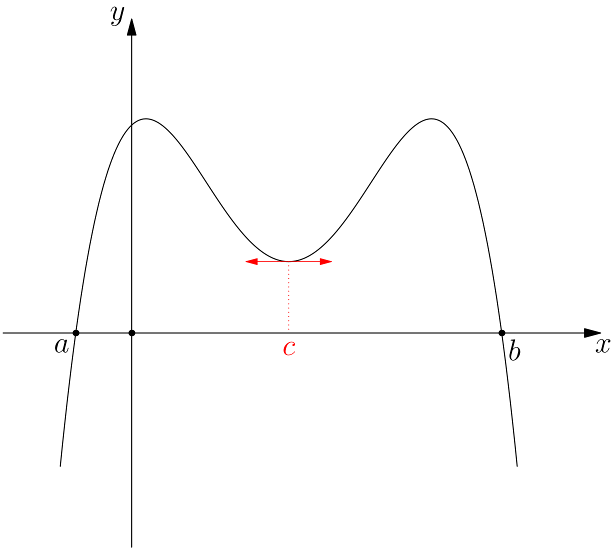
- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)
- Si $f(a) = f(b) = 0$

Alors : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

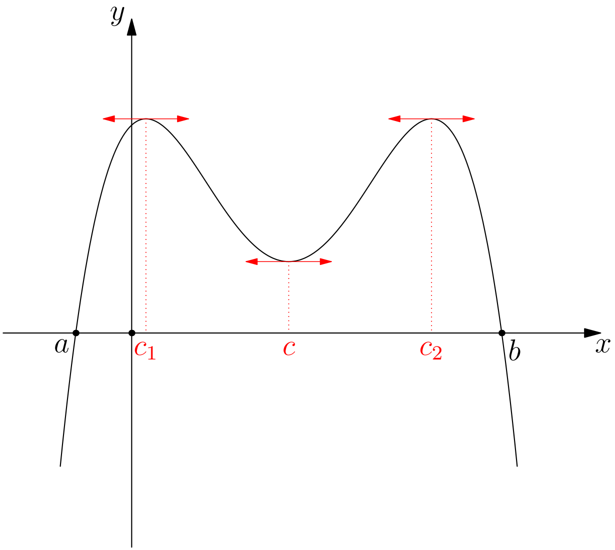
Théorème de Rolle



Théorème de Rolle



Théorème de Rolle



- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...

- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...
- Si f non-constante : $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) \neq f(a)$ donc : $f(x_0) \neq 0 \quad f(x_0) > 0$ par exemple.

- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...
- Si f non-constante : $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) \neq f(a)$ donc : $f(x_0) \neq 0 \quad f(x_0) > 0$ par exemple.

  f est continue sur $[a, b]$, donc f atteint son maximum en $c \in [a, b]$

- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...
- Si f non-constante : $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) \neq f(a)$ donc : $f(x_0) \neq 0 \quad f(x_0) > 0$ par exemple.

  f est continue sur $[a, b]$, donc f atteint son maximum en $c \in [a, b]$

  1. $f(x_0) \leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) > 0 \quad \Rightarrow c \neq a$ et $c \neq b$

- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...
- Si f non-constante : $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) \neq f(a)$ donc : $f(x_0) \neq 0 \quad f(x_0) > 0$ par exemple.

  f est continue sur $[a, b]$, donc f atteint son maximum en $c \in [a, b]$

  1. $f(x_0) \leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) > 0 \quad \Rightarrow c \neq a$ et $c \neq b$
  2. $\forall x \in]a, b[\quad f(x) \leq f(c) \quad \Rightarrow f'(c) = 0$

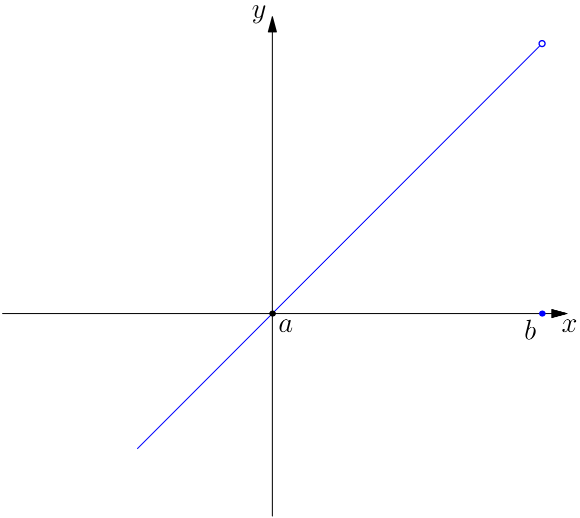
- Si f est constante sur $[a, b]$, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$ ...
- Si f non-constante : $\exists x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) \neq f(a)$ donc : $f(x_0) \neq 0 \quad f(x_0) > 0$ par exemple.

  f est continue sur $[a, b]$, donc f atteint son maximum en $c \in [a, b]$

  1. $f(x_0) \leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) > 0 \quad \Rightarrow c \neq a$ et $c \neq b$
  2. $\forall x \in]a, b[\quad f(x) \leq f(c) \quad \Rightarrow f'(c) = 0$
- Si $f(x_0) < 0$, même raisonnement en utilisant $-f$

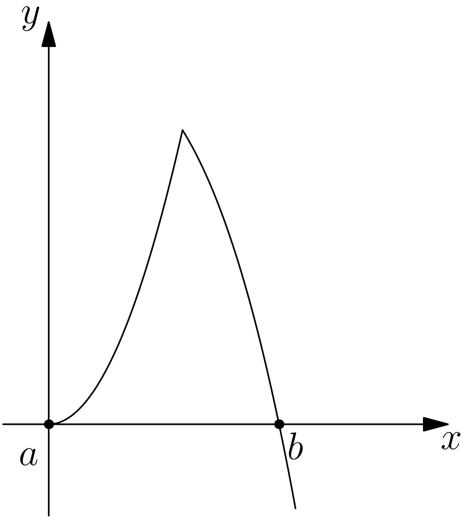
Le théorème de Rolle ne s'applique pas

Si f n'est pas continue sur $[a, b]$



Le théorème de Rolle ne s'applique pas

Si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$



Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

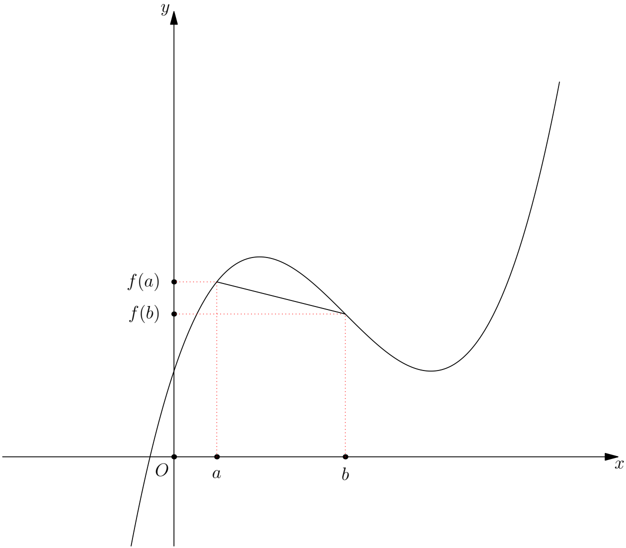
- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a\,,b[$ (intervalle ouvert)

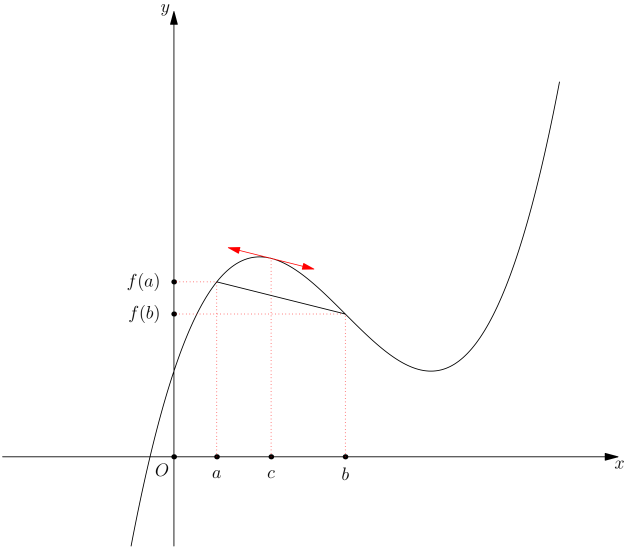
Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

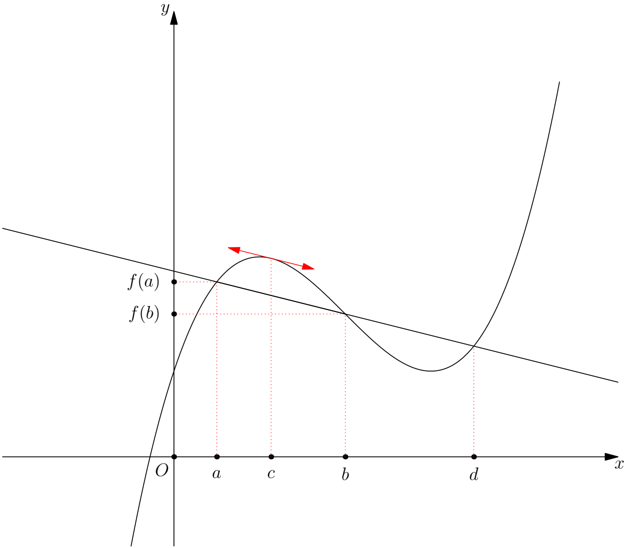
- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

Alors : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

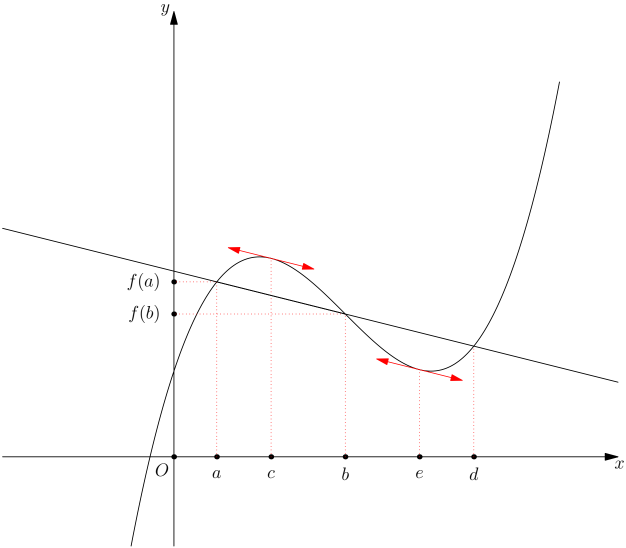

y
$f(a)$
$f(b)$
O
a
b
x



y
x
O
a
c
b
f(a)
f(b)



y
$f(a)$
$f(b)$
O
a
c
b
d
x


y
$f(a)$
$f(b)$
O
a
c
b
e
d
x

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g(a) = f(a) - f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g(a) = f(a) - f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g(a) = f(a) - f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g(a) = f(a) - f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, par le théorème de Rolle : $\exists c \in]a,b[: \quad g'(c) = 0$

On pose : $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g(a) = f(a) - f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, par le théorème de Rolle : $\exists c \in]a,b[: \quad g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème des accroissements finis

Corollaires

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a\,,b[$ (intervalle ouvert)

- **Corollaire 1 :** Si $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a\,,b[$,
  f est constante sur $[a\,,b]$

Théorème des accroissements finis

Corollaires

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a\,,b]$.

- Si f est continue sur $[a\,,b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a\,,b[$ (intervalle ouvert)

- **Corollaire 1 :** Si $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a\,,b[$,
  f est constante sur $[a\,,b]$
- **Corollaire 2 :** Si $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]a\,,b[$,
  f est croissante sur $[a\,,b]$

Théorème des accroissements finis

Corollaires

Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ (intervalle fermé)
- Si f est dérivable sur $]a, b[$ (intervalle ouvert)

- **Corollaire 1 :** Si $f'(x) = 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est constante sur $[a, b]$
- **Corollaire 2 :** Si $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est croissante sur $[a, b]$
- **Corollaire 3 :** Si $f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in]a, b[$,
  f est décroissante sur $[a, b]$

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Supposons : $\exists K > 0 \;:\; \forall t \in I \quad |f'(t)| \leq K$

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Supposons : $\exists K > 0 \;:\; \forall t \in I \quad |f'(t)| \leq K$

Alors : $\forall x, y \in I \;:\; |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \ \Rightarrow \ (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I\ : |f'(t)| \leq K) \Rightarrow (\forall x, y \in I\ :\ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \ \Rightarrow \ (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident
- Supposons : $x < y$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \ \Rightarrow \ (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident
- Supposons : $x < y$
  - f est continue sur $[x, y]$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \Rightarrow (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident
- Supposons : $x < y$
  - f est continue sur $[x, y]$
  - f est dérivable sur $]x, y[$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \Rightarrow (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident
- Supposons : $x < y$
  - f est continue sur $[x, y]$
  - f est dérivable sur $]x, y[$
  - Par le théorème des accroissements finis :
    $\exists c \in]x, y[: \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$

Inégalité des accroissements finis

$$(\exists K > 0, \forall t \in I \ : |f'(t)| \leq K) \ \Rightarrow \ (\forall x, y \in I \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|)$$

- Si $x = y$, c'est évident
- Supposons : $x < y$
  - f est continue sur $[x, y]$
  - f est dérivable sur $]x, y[$
  - Par le théorème des accroissements finis :
    $\exists c \in]x, y[: \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$
- Donc : $|f(y) - f(x)| = |y - x||f'(c)| \leq K\,|y - x|$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $\quad x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $\quad |x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x-y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[: \tan y - \tan x = (y-x)(1+\tan^2 c)$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x-y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[\, : \tan y - \tan x = (y-x)(1+\tan^2 c)$
- Puisque $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t > 0$, la fonction tangente est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$,

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[: \tan y - \tan x = (y - x)(1 + \tan^2 c)$
- Puisque $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t > 0$, la fonction tangente est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, donc : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan t \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[: \tan y - \tan x = (y - x)(1 + \tan^2 c)$
- Puisque $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t > 0$, la fonction tangente est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, donc : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan t \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- Alors : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x - y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[: \tan y - \tan x = (y - x)(1 + \tan^2 c)$
- Puisque $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t > 0$, la fonction tangente est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, donc : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan t \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- Alors : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2$
- $c \in]x, y[\subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad \Rightarrow \quad y - x \leq (y - x)(1 + \tan^2 c) \leq 2\,(y - x)$

Inégalité des accroissements finis

Exercice

Soit $x, y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Montrer que : $|x-y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2\,|x-y|$

Supposons $x < y$

- La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle donc continue et dérivable sur $[x, y]$.
- Par le T.A.F, $\exists c \in]x, y[: \tan y - \tan x = (y-x)(1+\tan^2 c)$
- Puisque $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t > 0$, la fonction tangente est croissante sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, donc : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan t \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
- Alors : $\forall t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2$
- $c \in]x, y[\subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \quad \Rightarrow \quad y - x \leq (y-x)(1+\tan^2 c) \leq 2\,(y-x)$

$$y - x \leq \tan y - \tan x \leq 2\,(y-x)$$