Fonctions usuelles

La fonction logarithme

Il existe une unique fonction ln $:]0\,,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$

Propriétés du logarithme

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0, +\infty[$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0\,, +\infty[$

  donc : $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = k$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0\,, +\infty[$

  donc : $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = k$
- Pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = k$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0\,, +\infty[$

  donc : $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = k$
- Pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = k \quad$ donc : $k = \ln a$

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0, +\infty[$

  donc : $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = k$
- Pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = k \quad$ donc : $k = \ln a$
- Finalement :

  $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = \ln a$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Propriétés du logarithme 1

soit $a > 0$, on pose : $f(x) = \ln(ax)$.

- $f'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x} = \ln' x$
- $\forall x > 0, \quad (f - \ln)'(x) = 0$

  donc : $f - \ln$ est constante sur $]0, +\infty[$

  donc : $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = k$
- Pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = k \quad$ donc : $k = \ln a$
- Finalement :

  $\forall x > 0, \quad \ln(ax) - \ln x = \ln a \quad \Rightarrow \quad \ln(ax) = \ln x + \ln a$

Propriétés du logarithme

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n. \ln a$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n$, $\quad \ln(a^p) = p.\ln a$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n, \quad \ln(a^p) = p.\ln a$
   1.3 $\ln(a^{n+1}) = \ln\left(a.(a^n)\right) = \ln a + n.\ln a = (n+1).\ln a$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n, \quad \ln(a^p) = p. \ln a$
   1.3 $\ln(a^{n+1}) = \ln\left(a.(a^n)\right) = \ln a + n. \ln a = (n+1). \ln a$
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$:

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n, \quad \ln(a^p) = p. \ln a$
   1.3 $\ln(a^{n+1}) = \ln\left(a.(a^n)\right) = \ln a + n. \ln a = (n+1). \ln a$
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$:
   2.1 $\ln(a^n.a^{-n}) = \ln 1 = 0$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n$, $\quad \ln(a^p) = p.\ln a$
   1.3 $\ln(a^{n+1}) = \ln\left(a.(a^n)\right) = \ln a + n.\ln a = (n+1).\ln a$
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$:
   2.1 $\ln(a^n.a^{-n}) = \ln 1 = 0$
   2.2 D'autre part : $\ln(a^n.a^{-n}) = \ln a^n + \ln a^{-n}$

Propriétés du logarithme 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}$: par récurrence
   1.1 $\ln a^1 = \ln a$
   1.2 Hypothèse de récurrence : pour $1 \leq p \leq n, \quad \ln(a^p) = p. \ln a$
   1.3 $\ln(a^{n+1}) = \ln \left(a.(a^n)\right) = \ln a + n. \ln a = (n+1). \ln a$
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$:
   2.1 $\ln(a^n.a^{-n}) = \ln 1 = 0$
   2.2 D'autre part : $\ln(a^n.a^{-n}) = \ln a^n + \ln a^{-n}$
   donc : $\ln a^{-n} = -n. \ln a$

Propriétés du logarithme

- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n. \ln a$
- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x}$

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc : la fonction logarithme est strictement croissante pour $x > 0$.

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc : la fonction logarithme est strictement croissante pour $x > 0$.
2. Alors : $\ln 2 > \ln 1 = 0$,

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc : la fonction logarithme est strictement croissante pour $x > 0$.
2. Alors : $\ln 2 > \ln 1 = 0$, la suite $u_n = n.\ln 2 = \ln(2^n)$ a donc pour limite $+\infty$.

$$\text{Donc : } \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc : la fonction logarithme est strictement croissante pour $x > 0$.
2. Alors : $\ln 2 > \ln 1 = 0, \quad$ la suite $u_n = n.\ln 2 = \ln(2^n)$ a donc pour limite $+\infty$.

   $$\text{Donc : } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0}(\ln x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty$

Propriétés du logarithme 3

1. $\forall x > 0, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc : la fonction logarithme est strictement croissante pour $x > 0$.
2. Alors : $\ln 2 > \ln 1 = 0, \quad$ la suite $u_n = n.\ln 2 = \ln(2^n)$ a donc pour limite $+\infty$.

   Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln x) = -\infty$

Donc : $\ln \ : I =]0\,, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement croissante.

Rappel

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors :
   $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.

Propriétés du logarithme

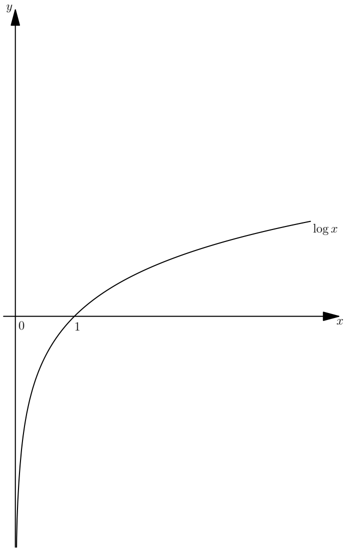
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n. \ln a$
- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés du logarithme

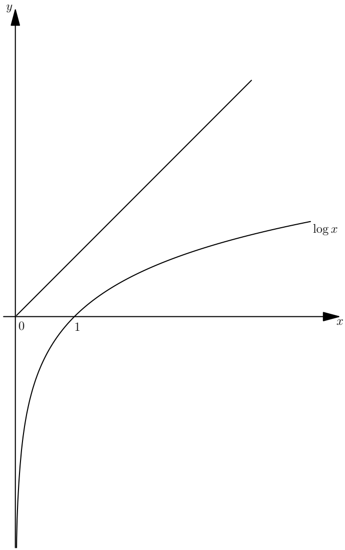
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a.b) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(a^n) = n. \ln a$
- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Graphe de la fonction logarithme



Graphe de la fonction logarithme



Propriétés du logarithme

- La fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Rappel

Théorème : Soit I un intervalle et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.

1. $f(I)$ est un intervalle et f est une bijection de I sur $f(I)$.
2. Si a et b sont les bornes de l'intervalle I, alors :

   $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ sont les bornes de l'intervalle $f(I)$.
3. La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

Notation : $\exp(x)$ ou e^x

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

Notation : $\exp(x)$ ou e^x

exp est une fonction continue et strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\,,+\infty[$

La fonction exponentielle

La fonction réciproque de la fonction logarithme s'appelle la fonction exponentielle.

Notation : $\exp(x)$ ou e^x

exp est une fonction continue et strictement croissante définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$

On a : $$\begin{cases} \exp\big(\ln x\big) & = & x & \forall x > 0 \\ \ln\big(\exp(x)\big) & = & x & \forall x \end{cases}$$

Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$

Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n.a) = \big(\exp(a)\big)^n$

Propriétés de la fonction exponentielle

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n.a) = \big(\exp(a)\big)^n$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longmapsto f(I) = J$ une fonction dérivable et strictement monotone.

- f est bijective...

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle ouvert et $f\ : I \longmapsto f(I) = J$ une fonction dérivable et strictement monotone.

- f est bijective...
- Si g est la fonction réciproque de f,

  $g\ : J \longmapsto I$ est dérivable et : $g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle ouvert et $f\ : I \longmapsto f(I) = J$ une fonction dérivable et strictement monotone.

- f est bijective...
- Si g est la fonction réciproque de f,

  $g\ : J \longmapsto I$ est dérivable et : $g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Puisque g est la fonction réciproque de f,

$$\forall x \in J, \quad (f \circ g)(x) = x$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit I un intervalle ouvert et $f\ : I \longmapsto f(I) = J$ une fonction dérivable et strictement monotone.

- f est bijective...
- Si g est la fonction réciproque de f,

  $g\ : J \longmapsto I$ est dérivable et : $g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Puisque g est la fonction réciproque de f,

$$\forall x \in J, \quad (f \circ g)(x) = x$$

Donc : $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \dfrac{1}{f'\big(g(x)\big)}$

Dérivée de l'exponentielle

$(\ln \circ \exp)(x) = x$

Dérivée de l'exponentielle

$$(\ln \circ \exp)(x) = x$$

$$(\ln \circ \exp)'(x) = \ln'\big(\exp(x)\big).\exp'(x) = 1$$

Dérivée de l'exponentielle

$$(\ln \circ \exp)(x) = x$$

$$(\ln \circ \exp)'(x) = \ln'\left(\exp(x)\right).\exp'(x) = 1$$

Donc : $$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'\left(\exp(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, il existe f^{-1} telle que :

$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, il existe f^{-1} telle que :

$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

$$\text{Alors : } y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, il existe f^{-1} telle que :

$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

$$\text{Alors : } y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Soit $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ le graphe de la fonction f :

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, il existe f^{-1} telle que :

$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

$$\text{Alors : } y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Soit $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ le graphe de la fonction f :

$(x, y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) = (y, f^{-1}(y))$

Graphe d'une fonction réciproque

Si f est bijective, il existe f^{-1} telle que :

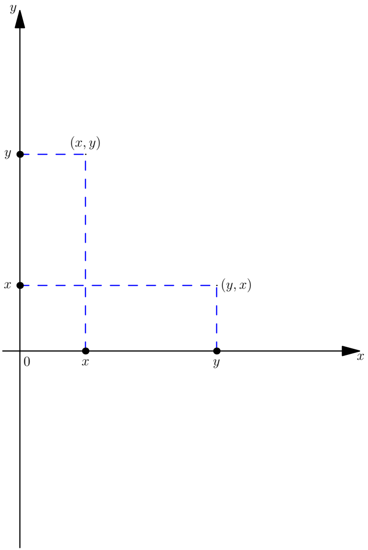
$\forall x, \quad (f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$

$$\text{Alors : } y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

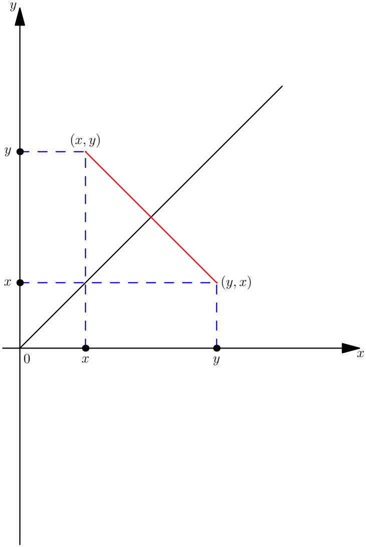
Soit $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ le graphe de la fonction f :

$(x, y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) = (y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$

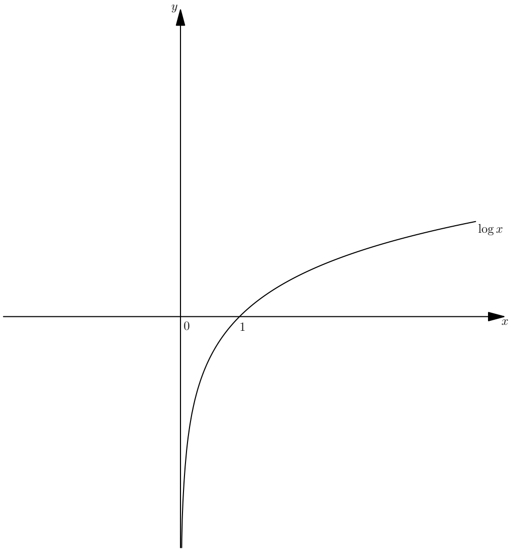
Graphe d'une fonction réciproque



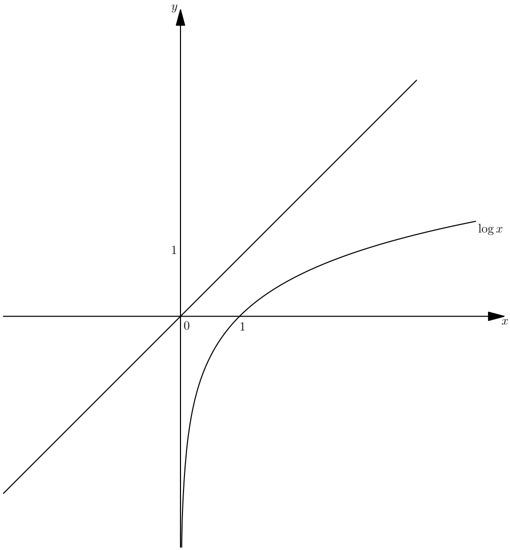
Graphe d'une fonction réciproque



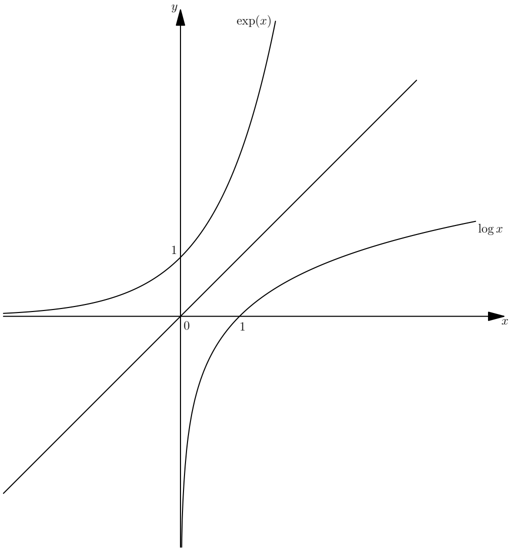
Graphe de la fonction exponentielle



Graphe de la fonction exponentielle



Graphe de la fonction exponentielle



La fonction puissance

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle « *a* puissance *b* » le nombre réel définit par :

$$a^b = \exp(b.\ln a)$$

La fonction puissance

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle « a puissance b » le nombre réel définit par :

$$a^b = \exp(b.\ln a)$$

Soit $b \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{array}{rccc} u : &]0,+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u(x) = x^b \end{array}$$

s'appelle la fonction puissance.

La fonction puissance

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle « a puissance b » le nombre réel définit par :

$$a^b = \exp(b.\ln a)$$

Soit $b \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} u & : &]0,+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & u(x) = x^b = \exp(b.\ln x) \end{array}$$

s'appelle la fonction puissance.

Dérivée de la fonction puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = exp'(b.\ln x).(b.\ln' x)$$

Dérivée de la fonction puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

Dérivée de la fonction puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

$$u'(x) = b.\exp(-\ln x).\exp(b.\ln x)$$

Dérivée de la fonction puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

$$u'(x) = b.\exp(-\ln x).\exp(b.\ln x) = b.\exp\left((b-1).\ln x\right)$$

Dérivée de la fonction puissance

$$u(x) = x^b = \exp(b.\ln x)$$

$$u'(x) = exp'(b.\ln x).(b.\ln' x) = exp(b.\ln x)\frac{b}{x}$$

$$u'(x) = b.\exp(-\ln x).\exp(b.\ln x) = b.\exp\left((b-1).\ln x\right)$$

$$u'(x) = b\,x^{b-1}$$

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b \exp\left((b-1)\ln x\right) > 0$: la fonction puissance est strictement croissante.

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0\,,+\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b\,\exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance est strictement croissante.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} (b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^b = +\infty$

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0\,,+\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b\exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance est strictement croissante.
  - $\lim_{x\to+\infty}(b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty$
  - $\lim_{x\to 0}(b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^b = 0$:

    la fonction puissance se prolonge par continuité en 0 en posant : $u(0) = 0$

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R}, \ x \in]0, +\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b \exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance est strictement croissante.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} (b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^b = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 0} (b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} x^b = 0$:

    la fonction puissance se prolonge par continuité en 0 en posant : $u(0) = 0$
  - Si $b > 1$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{u(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^{b-1} = \lim\limits_{x \to 0} \exp\big((b-1)\ln x\big) = 0$:

    la fonction puissance est dérivable à droite en 0, $u'_d(0) = 0$, et la tangente au graphe est horizontale.

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[,\quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x),\quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b > 0$
  - $u'(x) = b\exp\big((b-1)\ln x\big) > 0$: la fonction puissance est strictement croissante.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}(b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^b = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 0}(b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} x^b = 0$:

    la fonction puissance se prolonge par continuité en 0 en posant : $u(0) = 0$
  - Si $b > 1$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{b-1} = \lim\limits_{x\to 0}\exp\big((b-1)\ln x\big) = 0$:

    la fonction puissance est dérivable à droite en 0, $u'_d(0) = 0$, et la tangente au graphe est horizontale.
  - Si $0 < b < 1$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{b-1} = \lim\limits_{x\to 0}\exp\big((b-1)\ln x\big) = +\infty$:

    la fonction puissance n'est pas dérivable en 0, la tangente au graphe est verticale.

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R}, \; x \in]0, +\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b. \ln x), \quad u'(x) = b\, x^{b-1}$

- $b < 0$
  - $u'(x) = b \exp\left((b-1)\ln x\right) < 0$: la fonction puissance est strictement décroissante.

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b < 0$
  - $u'(x) = b \exp\big((b-1)\ln x\big) < 0$: la fonction puissance est strictement décroissante.
  - $\lim_{x \to +\infty} (b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0$

Propriétés de la fonction puissance

$b \in \mathbb{R},\ x \in]0, +\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b. \ln x), \quad u'(x) = b\, x^{b-1}$

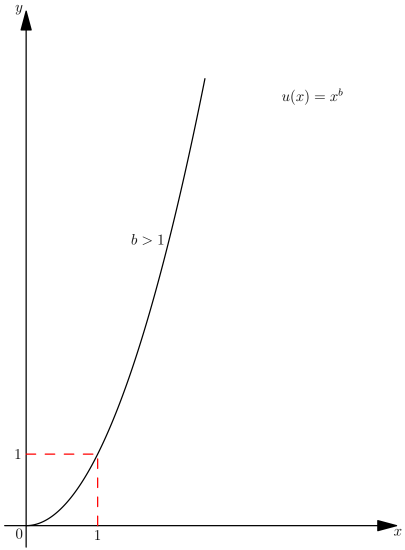
- $b < 0$
  - $u'(x) = b \exp\left((b-1)\ln x\right) < 0$: la fonction puissance est strictement décroissante.
  - $\lim_{x \to +\infty} (b. \ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = 0$
  - $\lim_{x \to 0} (b. \ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} x^b = +\infty$

Propriétés de la fonction puissance

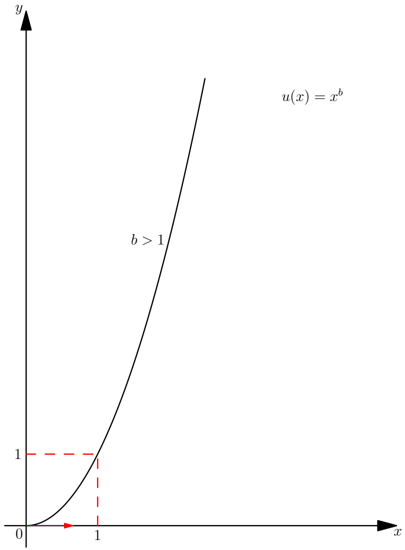
$b \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[, \quad u(x) = x^b = exp(b.\ln x), \quad u'(x) = b\,x^{b-1}$

- $b < 0$
  - $u'(x) = b \exp\big((b-1)\ln x\big) < 0$: la fonction puissance est strictement décroissante.
  - $\lim_{x\to+\infty}(b.\ln x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} x^b = 0$
  - $\lim_{x\to 0}(b.\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^b = +\infty$
- $b = 0$. La fonction puissance est constante de valeur 1.

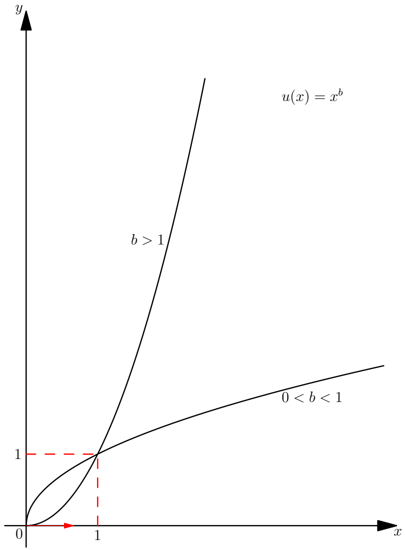
Graphe de la fonction puissance



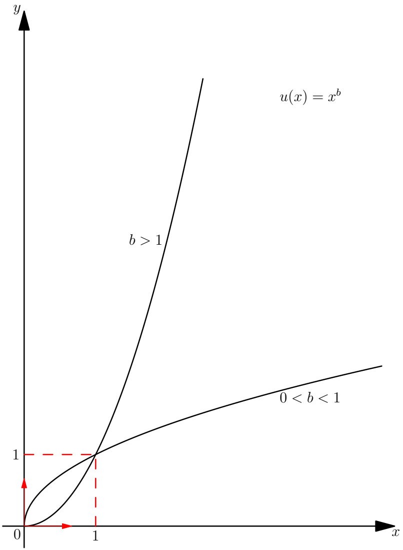
Graphe de la fonction puissance



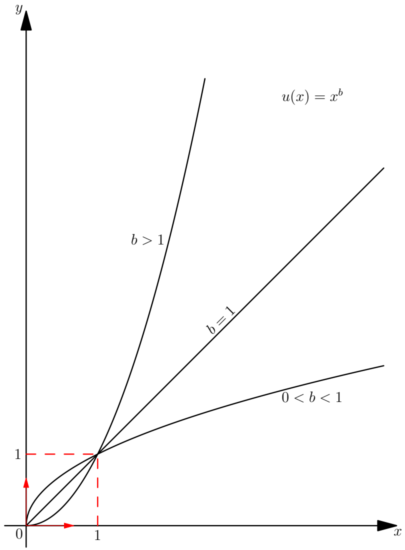
Graphe de la fonction puissance



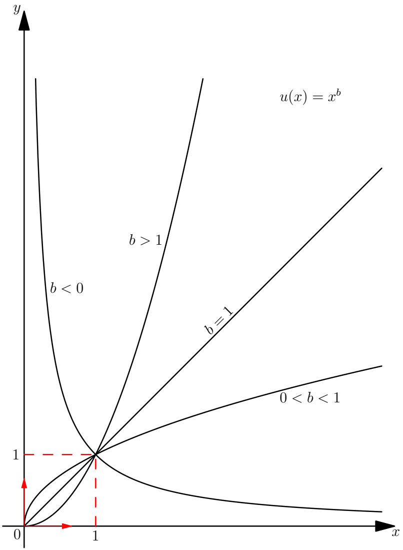
Graphe de la fonction puissance



Graphe de la fonction puissance



Graphe de la fonction puissance



Exponentielle de base *a*

Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{array}{rcccl} v & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \end{array}$$

s'appelle la fonction exponentielle de base *a*

Exponentielle de base *a*

Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccl} v : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \end{array}$$

s'appelle la fonction exponentielle de base *a*

$$v'(x) = \ln(a).\exp\big(x.\ln(a)\big) = \ln(a).a^x$$

Propriétés de l'exponentielle de base a

$$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \quad v'(x) = \ln(a).a^x$$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.

Propriétés de l'exponentielle de base a

$$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \quad v'(x) = \ln(a).a^x$$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Propriétés de l'exponentielle de base a

$$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \qquad v'(x) = \ln(a).a^x$$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$
  3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$

Propriétés de l'exponentielle de base a

$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \quad v'(x) = \ln(a).a^x$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$
  3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
- Si $a < 1$:
  1. $\ln a < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) < 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante.

Propriétés de l'exponentielle de base a

$$v(x) = a^x = \exp\big(x.\ln(a)\big) \qquad v'(x) = \ln(a).a^x$$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = +\infty$
  3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$
- Si $a < 1$:
  1. $\ln a < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) < 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante.
  2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\big(x.\ln(a)\big) = 0$

Propriétés de l'exponentielle de base a

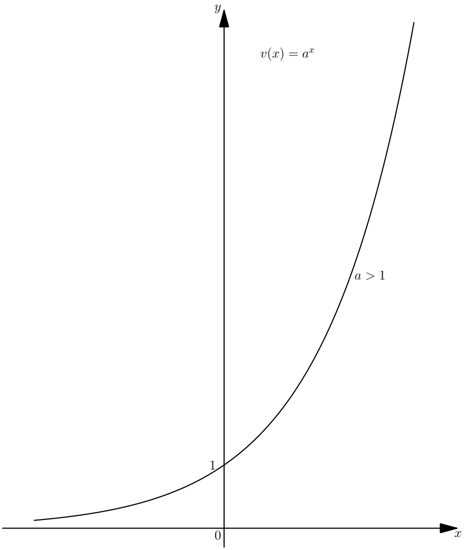
$$v(x) = a^x = \exp\left(x.\ln(a)\right) \qquad v'(x) = \ln(a).a^x$$

- Si $a > 1$:
  1. $\ln a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) > 0$

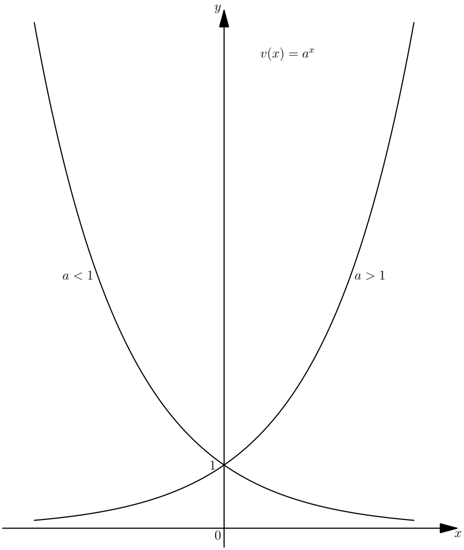
     la fonction exponentielle de base a est strictement croissante.
  2. $\lim_{x\to+\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x.\ln(a)\right) = +\infty$
  3. $\lim_{x\to-\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \exp\left(x.\ln(a)\right) = 0$
- Si $a < 1$:
  1. $\ln a < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) < 0$

     la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante.
  2. $\lim_{x\to+\infty} x.\ln(a) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x.\ln(a)\right) = 0$
  3. $\lim_{x\to-\infty} x.\ln(a) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} \exp\left(x.\ln(a)\right) = +\infty$

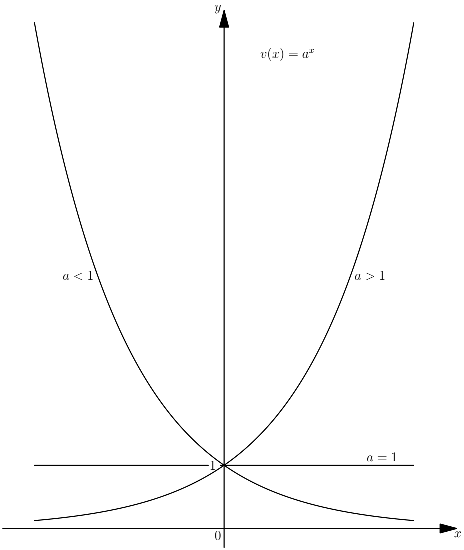
Graphe de l'exponentielle de base *a*



Graphe de l'exponentielle de base *a*



Graphe de l'exponentielle de base *a*



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1 : \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1 : \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1 : \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 2\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1 : \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 2\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\forall x > 1: \quad 0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} = 2\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\quad \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\big(u(x)\big)}{u(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\quad \lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\big(u(x)\big)}{u(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Si $u(x) = e^x$: $\quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\big(u(x)\big)}{u(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b$$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b$$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b \left(\frac{\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b$$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = \Big(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b = \Big(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b = \Big(\frac{b}{a}\Big)^b\Big(\frac{\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\Big)^b$$

En posant $u(x) = x^{\frac{a}{b}}$: $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$

$$a > 0,\ b > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^b}{x^a} = 0$$

$$\frac{\left(\ln(x)\right)^b}{x^a} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b\left(\frac{\ln x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b$$

En posant $u(x) = x^{\frac{a}{b}}$: $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^b}{x^a} = 0$$

Exercices

$$a > 0,\ b > 0 \quad \lim_{x \to 0} x^a \left| \ln x \right|^b = 0$$

Exercices

$$a > 0,\ b > 0 \quad \lim_{x \to 0} x^a \left|\ln x\right|^b = 0$$

$$a > 0,\ b > 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

Exercices

$$a > 0,\ b > 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^a \left| \ln x \right|^b = 0$$

$$a > 0,\ b > 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$a > 0,\ b > 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^b \exp(ax) = 0$$

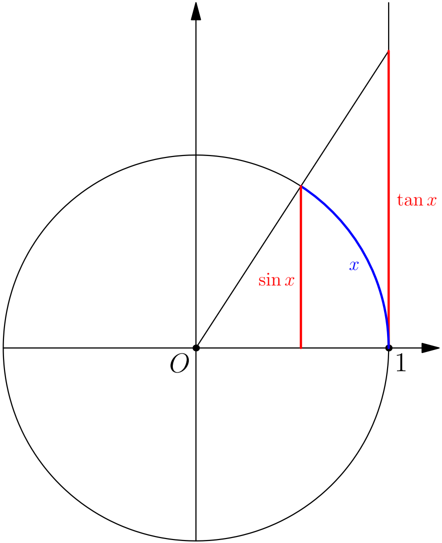
La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$\tan x$
x
$\sin x$
O
1

$$x > 0 \quad \sin x \leq x \leq \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$x > 0 \quad \sin x \leq x \leq \tan x \quad \Rightarrow 1 = \frac{\sin x}{\sin x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

La fonction sinus sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin' x = \cos x$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right). \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

La dérivée de la fonction sinus

$$\sin' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0$$

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1,1[$

$$\sin' x = \cos x$$

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1,1[$

$$\sin' x = \cos x > 0 \text{ puisque } x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

La fonction sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$

$$\sin' x = \cos x > 0 \text{ puisque } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

La fonction sinus est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction sinus sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

La fonction sinus est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, à valeurs dans l'intervalle $]-1, 1[$

$$\sin' x = \cos x > 0 \text{ puisque } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

La fonction sinus est donc continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1, 1[$.

La fonction Arcsinus

Il existe une fonction $\arcsin :]-1,1[\longmapsto]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arcsin est continue et strictement croissante

La fonction Arcsinus

Il existe une fonction arcsin $:]-1,1[\longmapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arcsin est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x & \forall x \in]-1,1[\\ \end{cases}$

La fonction Arcsinus

Il existe une fonction arcsin $:]-1,1[\longmapsto]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arcsin est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \sin(\arcsin x) & = & x & \forall x \in]-1,1[\\ \arcsin(\sin x) & = & x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

La fonction Arcsinus

Il existe une fonction arcsin $:]-1,1[\longmapsto]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arcsin est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x & \forall x \in]-1,1[\\ \arcsin(\sin x) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$
- $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

La dérivée de Arcsinus

La fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1\,,1[$ et :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'\big(\arcsin x\big)}$$

La dérivée de Arcsinus

La fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'\left(\arcsin x\right)} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)}$$

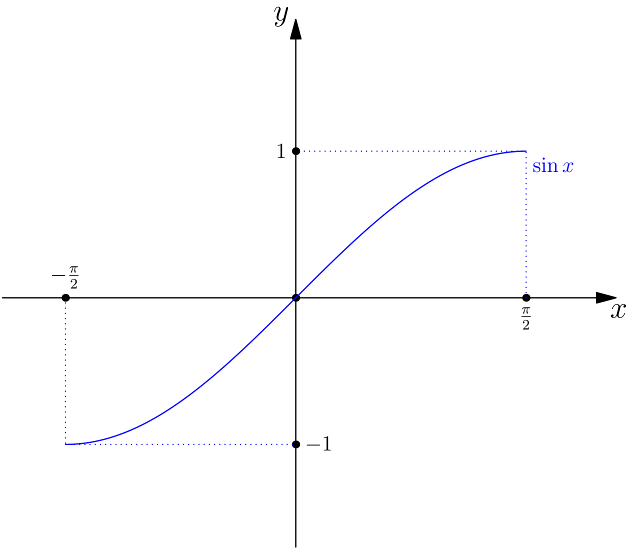
La dérivée de Arcsinus

La fonction Arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

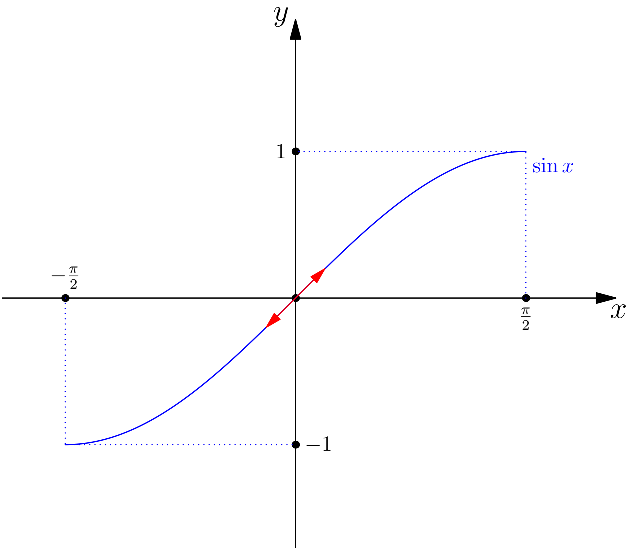
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'\left(\arcsin x\right)} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

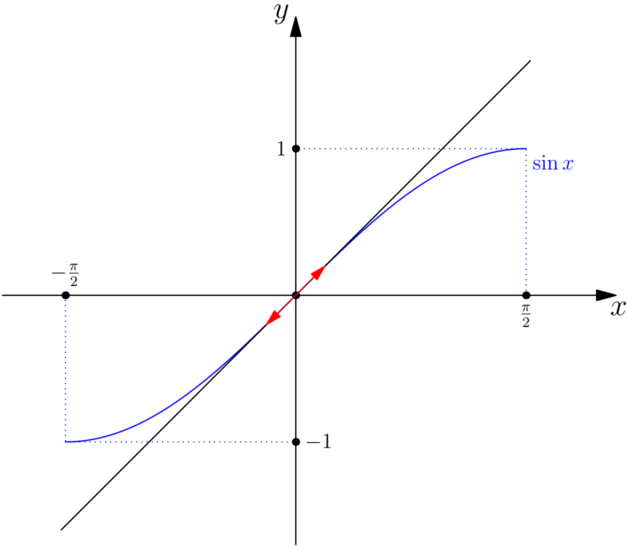
Les graphes de Sinus et Arcsinus



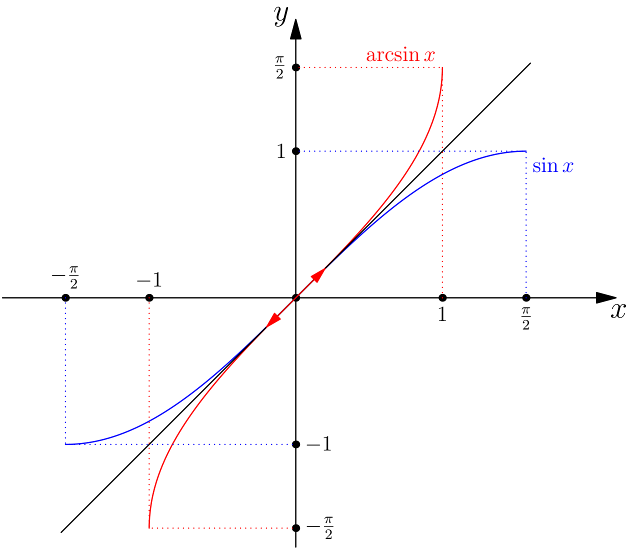
Les graphes de Sinus et Arcsinus



Les graphes de Sinus et Arcsinus



Les graphes de Sinus et Arcsinus



La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$.

La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$.

$$\cos' x = -\sin x$$

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) . \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right). \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right). \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1$$

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \sin x_0$$

La dérivée de la fonction cosinus

$$\cos' x_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0$$

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right). \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right). \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{2}{x - x_0} \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \sin x_0$$

La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$, à valeurs dans $]-1\,,1[$

$$\cos' x = -\sin x$$

La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$, à valeurs dans $]-1\,,1[$

$$\cos' x = -\sin x < 0 \text{ puisque } x \in]0\,,\pi[$$

La fonction cosinus sur $]0,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0,\pi[$, à valeurs dans $]-1,1[$

$$\cos' x = -\sin x < 0 \text{ puisque } x \in]0,\pi[$$

La fonction cosinus est donc continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$

La fonction cosinus sur $]0\,,\pi[$

La fonction cosinus est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$, à valeurs dans $]-1\,,1[$

$$\cos' x = -\sin x < 0 \text{ puisque } x \in]0\,,\pi[$$

La fonction cosinus est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,,\pi[$, c'est donc bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-1\,,1[$.

La fonction Arccosinus

Il existe une fonction arccos $:]-1,1[\longmapsto]0,\pi[$ qui vérifie :

- arccos est continue et strictement décroissante

La fonction Arccosinus

Il existe une fonction arccos $:]-1,1[\longmapsto]0,\pi[$ qui vérifie :

- arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\arccos x) & = & x & \forall x \in]-1,1[\\ \arccos(\cos x) & = & x & \forall x \in]0,\pi[\end{cases}$

La fonction Arccosinus

Il existe une fonction arccos $:]-1,1[\longmapsto]0,\pi[$ qui vérifie :

- arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\arccos x) = x & \forall x \in]-1,1[\\ \arccos(\cos x) = x & \forall x \in]0,\pi[\end{cases}$
- $\cos^2(\arccos x)+\sin^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

La fonction Arccosinus

Il existe une fonction arccos $:]-1,1[\longmapsto]0,\pi[$ qui vérifie :

- arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\arccos x) &= x \quad \forall x \in]-1,1[\\ \arccos(\cos x) &= x \quad \forall x \in]0,\pi[\end{cases}$
- $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall \alpha,\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x$

La fonction Arccosinus

Il existe une fonction arccos $:]-1,1[\longmapsto]0,\pi[$ qui vérifie :

- arccos est continue et strictement décroissante
- $\begin{cases} \cos(\arccos x) & = & x & \forall x \in]-1,1[\\ \arccos(\cos x) & = & x & \forall x \in]0,\pi[\end{cases}$
- $\cos^2(\arccos x)+\sin^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall\alpha,\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

La dérivée de Arccosinus

La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \arccos'(x) = -\arcsin' x$$

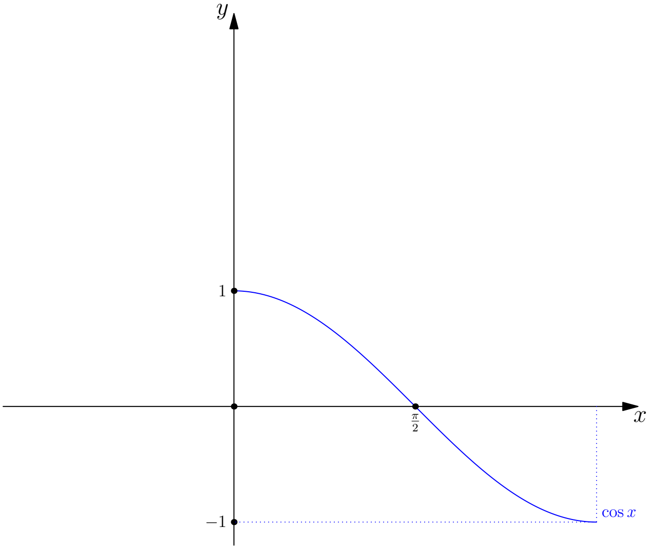
La dérivée de Arccosinus

La fonction Arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et :

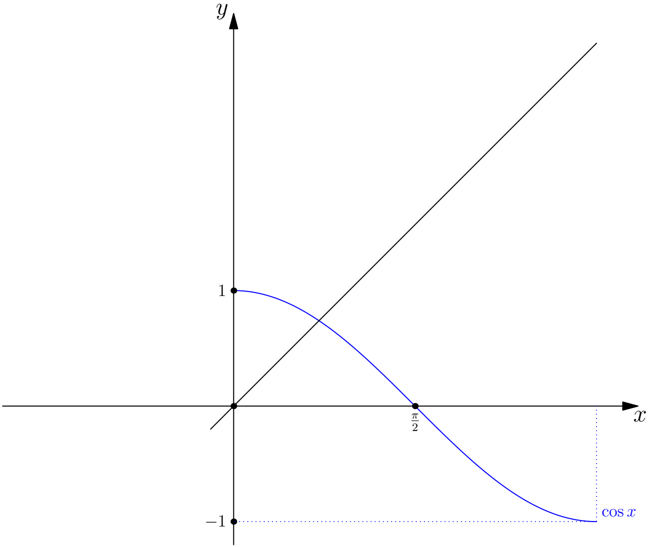
$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos'(x) = -\arcsin' x$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

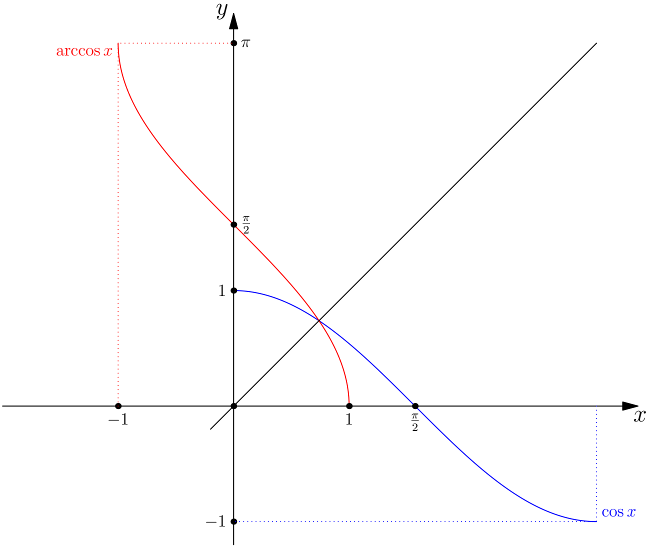
Les graphes de Cosinus et Arccosinus



Les graphes de Cosinus et Arccosinus



Les graphes de Cosinus et Arccosinus



La fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

La fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

La fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

La fonction tangente est donc continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction tangente

La fonction tangente est continue et dérivable, comme quotient de fonction continues et dérivables, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

La dérivée de la fonction tangente

La fonction tangente est continue et dérivable, comme quotient de fonction continues et dérivables, sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

La fonction tangente est donc continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, c'est donc une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$.

La fonction Arctangente

Il existe une fonction arctan $: \mathbb{R} \longmapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arctan est continue et strictement croissante

La fonction Arctangente

Il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \longmapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

- arctan est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \tan(\arctan x) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan x) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$

La fonction Arctangente

Il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \longmapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie :

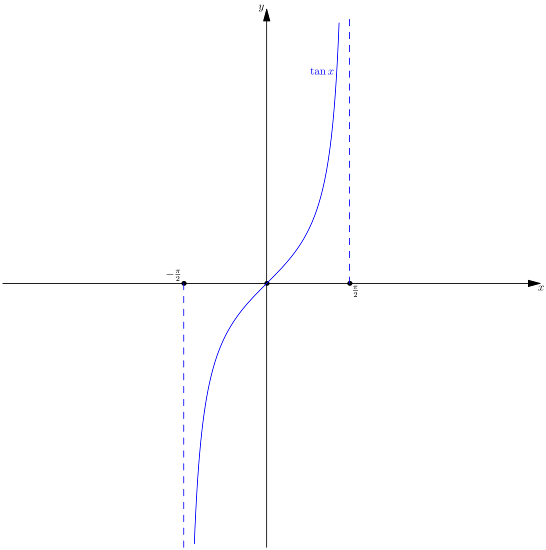
- arctan est continue et strictement croissante
- $\begin{cases} \tan(\arctan x) & = & x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan x) & = & x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

La dérivée de Arctangente

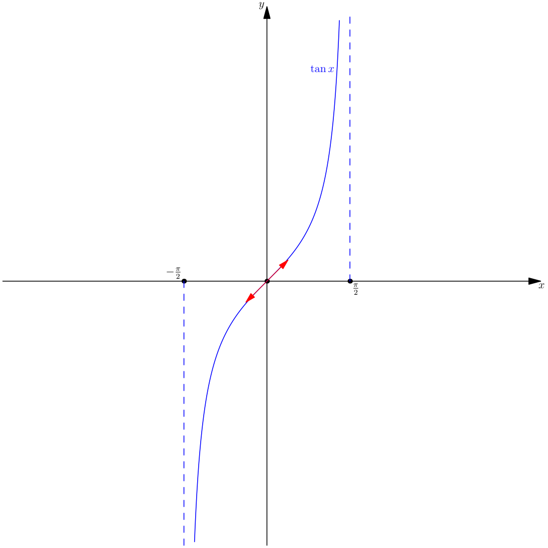
$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan' x \neq 0$, donc la fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\arctan' x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

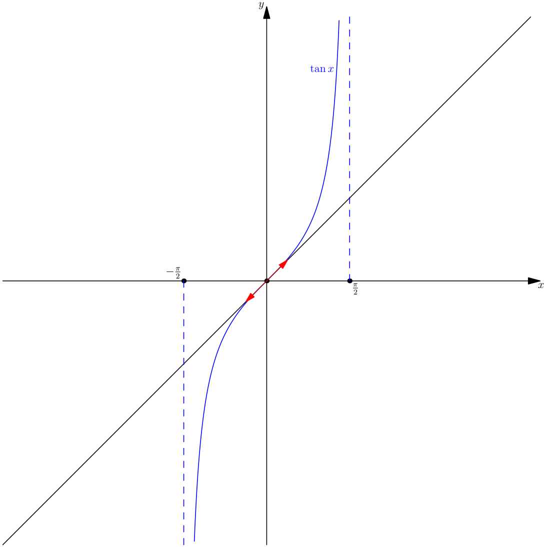
Les graphes de Tangente et Arctangente



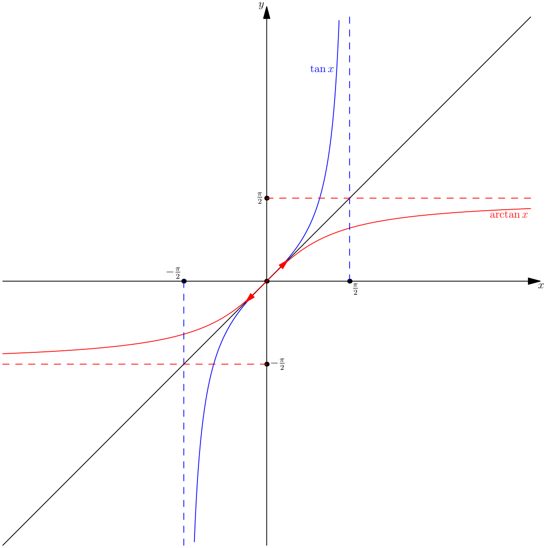
Les graphes de Tangente et Arctangente



Les graphes de Tangente et Arctangente



Les graphes de Tangente et Arctangente



Équation $\sin x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin a, \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$

L'équation s'écrit : $\sin x = \sin \alpha$

Équation $\sin x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin a, \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$

L'équation s'écrit : $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x - \sin \alpha = 2\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)$$

Équation $\sin x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin a, \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$

L'équation s'écrit : $\sin x = \sin \alpha$

$$\sin x - \sin \alpha = 2 \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccccl} & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & & & & & & \\ & \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Équation $\cos x = a, \quad a \in [-1, 1]$

$a \in [-1, 1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos a, \quad \alpha \in [0, \pi]$

L'équation s'écrit : $\cos x = \cos \alpha$

Équation $\cos x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos a, \quad \alpha \in [0\,,\pi]$

L'équation s'écrit : $\cos x = \cos\alpha$

$$\cos x - \cos\alpha = -2\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)$$

Équation $\cos x = a, \quad a \in [-1\,,1]$

$a \in [-1\,,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos a, \quad \alpha \in [0\,,\pi]$

L'équation s'écrit : $\cos x = \cos\alpha$

$\cos x - \cos\alpha = -2\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} & \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & & & & & & \\ & \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) & = & 0 & \Leftrightarrow & x & = & -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques

On définit la fonction sinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques

On définit la fonction sinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On définit la fonction cosinus hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$: la fonction ch est paire

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$: la fonction ch est paire
- $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^{x}$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$

Propriétés des fonctions sh et ch

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$: la fonction sh est impaire
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$: la fonction ch est paire
- $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$
- $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 1$

Dérivées et variations de sh et ch

- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$

Dérivées et variations de sh et ch

- $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$
- $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$

Dérivées et variations de sh et ch

- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$: sh est strictement croissante.

Dérivées et variations de sh et ch

- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$: sh est strictement croissante.

Si $x > 0 \quad x > -x \quad \Rightarrow \quad e^x > e^{-x}$ donc :

	Si $x > 0$	$\mathrm{sh}(x) > 0$	$\Rightarrow$	ch croissante
Par imparité	Si $x < 0$	$\mathrm{sh}(x) < 0$	$\Rightarrow$	ch décroissante

Dérivées et variations de sh et ch

- $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$: sh est strictement croissante.

Si $x > 0 \quad x > -x \quad \Rightarrow \quad e^x > e^{-x}$ donc :

	Si $x > 0$	$\mathrm{sh}(x) > 0$	$\Rightarrow$	ch croissante
Par imparité	Si $x < 0$	$\mathrm{sh}(x) < 0$	$\Rightarrow$	ch décroissante

$\mathrm{ch}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \neq 0 \;\; \mathrm{ch}(x) > 1$

Limites des fonctions sh et ch

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$

Limites des fonctions sh et ch

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

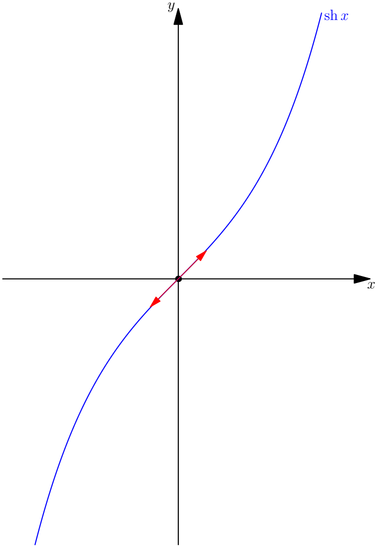
Limites des fonctions sh et ch

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

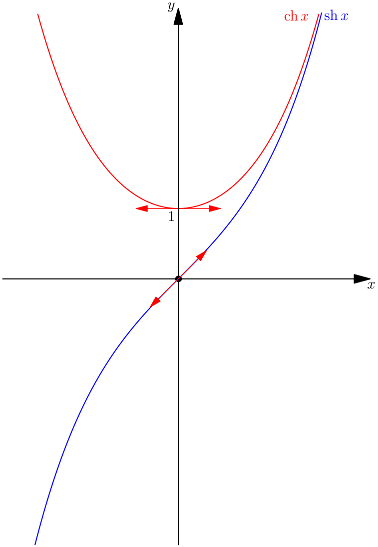
- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x) \\ \lim_{x \to +\infty} \big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = 0 \end{cases}$$

Les graphes de sh et ch



Les graphes de sh et ch



La fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

La fonction tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Dérivée :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Variations et limites de th(x)

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$$

La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Variations et limites de th(x)

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$$

La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Variations et limites de th(x)

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$$

La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$$

Variations et limites de th(x)

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$$

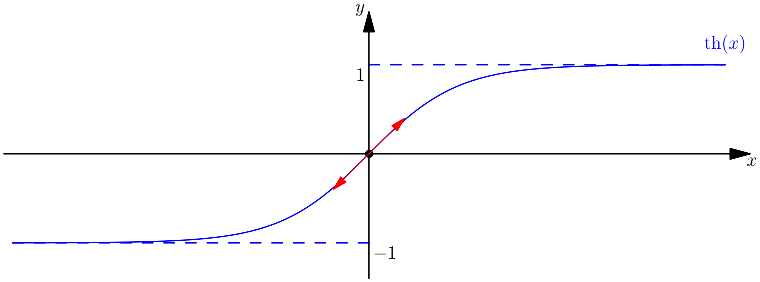
La fonction tangente hyperbolique est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \text{th}(x) = 1$$

La fonction th étant impaire : $\lim_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1$

Graphe de tangente hyperbolique



Équation $\operatorname{sh} x = a \quad a \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x\right)^2 - 2ae^x - 1 = 0$$

Équation $\operatorname{sh} x = a \quad a \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x\right)^2 - 2ae^x - 1 = 0$$

L'équation $X^2 - 2aX - 1 = 0$ a une seule racine positive : $a + \sqrt{a^2 + 1}$.

$$\operatorname{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Équation $\operatorname{ch} x = a \quad a \geq 1$

$$\operatorname{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad e^x + e^{-x} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x\right)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

Équation $\operatorname{ch} x = a \quad a \geq 1$

$$\operatorname{ch}(x) = a \iff e^x + e^{-x} = 2a \iff \left(e^x\right)^2 - 2ae^x + 1 = 0$$

L'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ a deux racines positives :
$u = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $v = a - \sqrt{a^2 - 1}$ qui vérifient : $uv = 1$

$$\operatorname{ch}(x) = a \iff x = \pm \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

Équation th$x = a$ $\quad a \in]-1, 1[$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1}$$

$$\mathrm{th}x = a \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2x} - 1 = a(e^{-2x} + 1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$$

Équation th$x = a \quad a \in]-1,1[$

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1}$$

$$\text{th}x = a \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2x} - 1 = a(e^{-2x} + 1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$$

$\dfrac{1+a}{1-a} > 0$:

$$\text{th}x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$