1 Fonctions logarithme, exponentielle et puissance

Croissances comparées

Pour $a > 0$, $b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^a \big|\ln x\big|^b = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^b \exp(ax) = 0$$

2 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Transformation de sommes en produits

$$\cos a + \cos b = 2\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\sin\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\sin\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Transformation de produits en sommes

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$

Fontions trigonométriques réciproques

$\forall a \in [-1, 1] \quad \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

$\forall a \in [-1, 1] \quad \arccos a + \arccos(-a) = \pi$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan a + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\forall a \in \mathbb{R}_-^* \quad \arctan a + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Dérivées

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]-1, 1[\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

Équations trigonométriques

$$\sin x = \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & \pi - \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\cos x = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & -\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

3 Fonctions hyperboliques

$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - x^{-x}}{e^x + x^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

Dérivées

$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x$

$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x$

$\mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

Limites

$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$

Équations hyperboliques

$\mathrm{sh}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$

$\mathrm{ch}(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$

$\forall a \in]-1, 1[\quad \mathrm{th} x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$

Exercices...

Toutes les formules d'addition, de transformations de produits en sommes, de sommes en produits, de duplication, etc., vues pour les fonctions trigonométriques circulaires ont leurs équivalents pour les fonctions hyperboliques....