Matrices

1. Matrices
   - Définitions
   - Espace vectoriel des matrices $n \times p$
   - Multiplication des matrices
   - Inverse d'une matrice
   - Systèmes linéaires
   - Applications linéaires
   - Changement de bases
   - Rang d'une matrice

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes),

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes),

np nombres réels (ou complexes) rangés dans un tableau à n lignes et p colonnes.

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes),

np nombres réels (ou complexes) rangés dans un tableau à n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ i & \pi & -3 \end{pmatrix}$$

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels (ou complexes),

np nombres réels (ou complexes) rangés dans un tableau à n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ i & \pi & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & -6 & \frac{7}{2} & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -8 \\ \sin\left(\frac{15\pi}{8}\right) & 0 & 0 & 18 \\ 1\,250 & e^{19} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 34 & \pi \end{pmatrix}$

Si $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 34 & \pi \end{pmatrix}$ matrice ligne

Si $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 34 & \pi \end{pmatrix}$ matrice ligne

Si $p = 1$: $\begin{pmatrix} e \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ matrice colonne

Si $n = 1$: $(1 \quad \sqrt{2} \quad 34 \quad \pi)$ matrice ligne

Si $p = 1$: $\begin{pmatrix} e \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ matrice colonne

Notation : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Si $n = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 34 & \pi \end{pmatrix}$ matrice ligne

Si $p = 1$: $\begin{pmatrix} e \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ matrice colonne

Notation : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels

Écriture indexée

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, est noté : a_{ij}.

Écriture indexée

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, est noté : a_{ij}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Écriture indexée

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne, est noté : a_{ij}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Matrice diagonale

Si M est une matrice carrée $(n = p)$,

Matrice diagonale

Si M est une matrice carrée $(n = p)$,

les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Matrice diagonale

Si M est une matrice carrée ($n = p$),

les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

Matrice diagonale

Si M est une matrice carrée ($n = p$),

les coefficients a_{ii}, $1 \leq i \leq n$, s'appellent les coefficients diagonaux de la matrice.

Une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$, s'appelle une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires

Soit M une matrice carrée.

Matrices triangulaires

Soit M une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que M est triangulaire supérieure

Matrices triangulaires

Soit M une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que M est triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrices triangulaires

Soit M une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que M est triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que M est triangulaire inférieure

Matrices triangulaires

Soit M une matrice carrée.

Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que M est triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que M est triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somme des matrices

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Somme des matrices

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On définit la somme des matrices M et M' comme la matrice :

$$M + M' = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Somme des matrices

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

On définit la somme des matrices M et M' comme la matrice :

$$M + M' = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 7 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Multiplication des matrice par des scalaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Multiplication des matrice par des scalaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On définit la matrice $\alpha.M$ comme la matrice :

$$\alpha.M = \alpha.\left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Multiplication des matrice par des scalaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On définit la matrice $\alpha.M$ comme la matrice :

$$\alpha.M = \alpha.\left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$(-2).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -14 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

Théorème : Avec l'addition et la multiplication externe, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel de dimension np.

Le vecteur $\vec{0}$ de cet espace vectoriel est la matrice dont tous les coefficient sont nuls.

Produit de 2 matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices :

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$$

Produit de 2 matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices :

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

On définit la matrice produit de M et M', comme la matrice :

$$MM' = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Produit de 2 matrices

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices :

$$M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } M' = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$$

On définit la matrice produit de M et M', comme la matrice :

$$MM' = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

où :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Produit de 2 matrices

Exemple

Soient : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Produit de 2 matrices

Exemple

Soient : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$MM' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Produit de 2 matrices

Exemple

Soient : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$MM' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Attention : Le produit de deux matrices M et M' n'existe que si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de M'.

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées est toujours possible.

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif,

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif, en général :

$$\text{Si } M_1\,, M_2 \in \mathcal{M}_n, \quad M_1 M_2 \neq M_2 M_1$$

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif, en général :

$$\text{Si } M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n, \quad M_1M_2 \neq M_2M_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cas des matrices carrées

Une matrice est carrée si $n = p$:

le produit de 2 matrices carrées est toujours possible.

Attention : Le produit des matrices n'est pas commutatif, en général :

$$\text{Si } M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n, \quad M_1M_2 \neq M_2M_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 8 & 15 & 11 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas des matrices carrées

Règles de calcul pour la multiplication

Si $M_1\,, M_2\,, N_1\,, N_2 \in \mathcal{M}_n$

Cas des matrices carrées

Règles de calcul pour la multiplication

Si $M_1\,,M_2\,,N_1\,,N_2 \in \mathcal{M}_n$

$$(M_1+M_2)(N_1+N_2)=M_1N_1+M_1N_2+M_2N_1+M_2N_2$$

Cas des matrices carrées

Règles de calcul pour la multiplication

Si $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n$

$$(M_1 + M_2)(N_1 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2 + M_2N_1 + M_2N_2$$

$$(M_1 + M_2)^2 = M_1^2 + M_1M_2 + M_2M_1 + M_2^2$$

Cas des matrices carrées

Règles de calcul pour la multiplication

Si $M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n$

$$(M_1 + M_2)(N_1 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2 + M_2N_1 + M_2N_2$$

$$(M_1 + M_2)^2 = M_1^2 + M_1M_2 + M_2M_1 + M_2^2$$

D'une manière générale, la formule du binôme ne s'applique pas aux matrices

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible,

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible,

s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$MN = NM = I_n$$

Matrices inversibles

Dans $\mathcal{M}_n$ on appelle matrice identité, la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

Notation : I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible,

s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$MN = NM = I_n$$

Notation : $N = M^{-1}$

Matrices inversibles

Proposition : Si une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

1. Son inverse M^{-1} est unique.

Matrices inversibles

Proposition : Si une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

1. Son inverse M^{-1} est unique.
2. $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$

Matrices inversibles

Proposition : Si une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

1. Son inverse M^{-1} est unique.
2. $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$
3. Si $N \in \mathcal{M}_n$ est inversible : $\left(MN\right)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice, on peut :

- Permuter des lignes

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l’inverse d’une matrice, on peut :

- Permuter des lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l’inverse d’une matrice, on peut :

- Permuter des lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice, on peut :

- Permuter des lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres
- Ces opérations peuvent également se faire sur les colonnes

Matrices inversibles

Règles élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice, on peut :

- Permuter des lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres
- Ces opérations peuvent également se faire sur les colonnes

On appelle ces règles : règles élémentaires

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

Soit à calculer l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

Soit à calculer l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

Soit à calculer l'inverse de la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Règle du jeu : Transformer la matrice de gauche en la matrice de droite, en n'appliquant que des règles élémentaires.

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - 6L_1$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - 6L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \tfrac{32}{11} L_2$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 32 & 4 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - \frac{32}{11} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - \frac{11}{12} L_3$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - \frac{11}{12} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + \frac{5}{11} L_2$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + \frac{5}{11} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{11} L_2$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{11} L_2$$

$$L_3 \rightsquigarrow \frac{11}{12} L_3$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{11}{6} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{32}{11} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{11} L_2$$

$$L_3 \rightsquigarrow \frac{11}{12} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{array}\right)$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1 \times 2 + (-5) \times (-2) = 12$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1 \times 20 + (-5) \times (4) = 0$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1 \times (-5) + (-5) \times (-1) = 0$$

Matrices inversibles

Calcul de l'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 2 & 20 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -32 & 11 \end{pmatrix}$$

etc.

Johann Carl Friedrich Gauß

On appelle système linéaires de n équations à p inconnues, un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

On appelle système linéaires de n équations à p inconnues, un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

La matrice $A = \left(aij\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice du système.

On appelle système linéaires de n équations à p inconnues, un système du type :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

La matrice $A = \left(aij\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice du système.

Le n-uplet $(b_1\,, b_2\,, \cdots\,, b_n)$ est le second membre du système.

Écriture matricielle d'un système

On pose : $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle d'un système

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Le système : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$

Écriture matricielle d'un système

On pose :
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le système :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

S'écrit :
$$A.X = B$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Si la matrice A du système est inversible, le système a alors une seule solution :

$$A.X = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y + 2z & = & 5 \\ 3x + 2y + z & = & 10 \\ 2x - 3y - 2z & = & -10 \end{cases}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - y + 2z & = & 5 \\ 3x + 2y + z & = & 10 \\ 2x - 3y - 2z & = & -10 \end{array}\right.$$

Écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - 3L_1$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} L_2 &\rightsquigarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 &\rightsquigarrow L_3 - 2L_1 \end{aligned}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightsquigarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{5} L_2$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightsquigarrow \frac{1}{5} L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_2$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightsquigarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{7}L_3$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

$$L_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{7}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_3$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} L_1 &\rightsquigarrow L_1 - L_3 \\ L_2 &\rightsquigarrow L_2 + L_3 \end{aligned}$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightsquigarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightsquigarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Résolution d'un système linéaire : cas d'une matrice carrée

Exemple

Soit à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+2z & = & 5 \\ 3x+2y+z & = & 10 \\ 2x-3y-2z & = & -10 \end{array}\right.$$

La solution est : $(x\,,y\,,z)=(1\,,2\,,3)$

Application linéaire

Soit : E un espace vectoriel de dimension p et un espace vectoriel de dimension n

Application linéaire

Soit : E un espace vectoriel de dimension p et un espace vectoriel de dimension n

Une application $f\ :\ E \longmapsto F$ est dite linéaire si :

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

Application linéaire

Soit : E un espace vectoriel de dimension p et un espace vectoriel de dimension n

Une application $f \; : \; E \longmapsto F$ est dite linéaire si :

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in E, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha . \vec{x}) = \alpha . f(\vec{x})$

Application linéaire

Soit : E un espace vectoriel de dimension p et un espace vectoriel de dimension n

Une application $f\ :\ E \longmapsto F$ est dite linéaire si :

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha.\vec{x}) = \alpha.f(\vec{x})$

Proposition : Une application f entre deux espaces vectoriels est linéaire si, et seulement si :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Application linéaire

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

Application linéaire

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-y, y+2z) \end{array}$$

Application linéaire

Exemples

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y\,,y+z\,,x-2z) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y\,,y+2z) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longmapsto & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.
- $f : E \longmapsto F$ une application linéaire.

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.
- $f : E \longmapsto F$ une application linéaire.

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j . f(\vec{a}_j)$$

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.
- $f : E \longmapsto F$ une application linéaire.

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j . f(\vec{a}_j)$$

$\forall j, (1 \leq j \leq p), \; f(\vec{a}_j) \in F$

Matrice d'une application linéaire

Soit

- E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E.
- F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.
- $f : E \longmapsto F$ une application linéaire.

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} x_j . f(\vec{a}_j)$$

$$\forall j, (1 \leq j \leq p),\ f(\vec{a}_j) \in F \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_{ij}, (1 \leq i \leq n) \ : f(\vec{a}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{b}_i$$

Matrice d'une application linéaire

La matrice : $\left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice de l'application linéaire f.

Matrice d'une application linéaire

La matrice : $\left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice de l'application linéaire f.

Important : Les nombres α_{ij} dépendent :

Matrice d'une application linéaire

La matrice : $\left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice de l'application linéaire f.

Important : Les nombres α_{ij} dépendent :

- de l'application linéaire f.

Matrice d'une application linéaire

La matrice : $\left(\alpha_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ s'appelle la matrice de l'application linéaire f.

Important : Les nombres α_{ij} dépendent :

- de l'application linéaire f.
- des bases choisies dans les espaces vectoriels E et F.

Matrice d'une application linéaire
Calcul

Soit :
$f\ :\ E \longmapsto F$ est une application linéaire, $\mathcal{B}_E = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p\}$ une base de E et $\mathcal{B}_F = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_n\}$ une base de F.

$$M_{(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(\vec{a}_1) & f(\vec{a}_2) & \cdots & f(\vec{a}_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{array} \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit $E = F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique et $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit $E = F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique et $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,0,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1,-2) = \vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Matrice d'une application linéaire

Soit $E = F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canonique et $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z, x-2z) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,0,1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1,0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1,-2) = \vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \end{array}$$

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$

et $f : E \longmapsto F$ et $g : F \longmapsto G$ deux applications linéaires.

Théorème : $M_{(g\circ f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)} = M_{(g,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)} M_{(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)}$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &=& 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &=& 3 \end{array}\right.$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2\\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)\\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 3 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Dans $\mathbb{R}^2$, base canonique : $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ avec $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 \\ &= \alpha_1(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \alpha_2(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \\ &= (2\alpha_1 + 3\alpha_2)\vec{e}_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{e}_2\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 3 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E

Si un vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit comme le vecteur colonne X dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' dans $\mathcal{B}'$ il existe une matrice P telle que :

$$X = PX'$$

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$.

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$.
Soit une nouvelle base de E : $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$.
Soit une nouvelle base de E : $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$

On appelle matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice de l'identité :

$$Id : (E, \mathcal{B}') \longmapsto (E, \mathcal{B})$$

Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel muni d'une base
$\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$.
Soit une nouvelle base de E : $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$

On appelle matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice de l'identité :

$$Id : (E, \mathcal{B}') \longrightarrow (E, \mathcal{B})$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} \vec{a}'_1 & \vec{a}'_2 & \cdots & \vec{a}'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{array}
\end{array}$$

Matrice de passage

Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ sa base canonique.

Matrice de passage

Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ sa base canonique.

Soit : $P_0 = 1 - X$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = X^2 - X^3$, $P_3 = X^2 + 2X^3$

Matrice de passage
Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ sa base canonique.

Soit : $P_0 = 1 - X$, $P_1 = 1 + X$, $P_2 = X^2 - X^3$, $P_3 = X^2 + 2X^3$

Exercice : $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E.

Matrice de passage
Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ sa base canonique.

Soit : $P_0 = 1 - X,\ P_1 = 1 + X,\ P_2 = X^2 - X^3,\ P_3 = X^2 + 2X^3$

Exercice : $\mathcal{B}' = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \cdots\,, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1\,, \vec{a}'_2\,, \cdots\,, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

- P_1 est la matrice de l'application $Id\ :\ (E, \mathcal{B}') \longmapsto (E, \mathcal{B})$

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

- P_1 est la matrice de l'application $Id : (E, \mathcal{B}') \longmapsto (E, \mathcal{B})$
- P_2 est la matrice de l'application $Id : (E, \mathcal{B}) \longmapsto (E, \mathcal{B}')$

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

- P_1 est la matrice de l'application $Id\ :\ (E, \mathcal{B}') \longmapsto (E, \mathcal{B})$
- P_2 est la matrice de l'application $Id\ :\ (E, \mathcal{B}) \longmapsto (E, \mathcal{B}')$

Donc $P_1 P_2$ est la matrice de $Id\ :\ (E, \mathcal{B}) \longmapsto (E, \mathcal{B})$

Matrice de passage

Remarque : Si on conserve la même base, la matrice de passage est la matrice identité.

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et P_2 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

- P_1 est la matrice de l'application $Id\ :\ (E, \mathcal{B}') \longmapsto (E, \mathcal{B})$
- P_2 est la matrice de l'application $Id\ :\ (E, \mathcal{B}) \longmapsto (E, \mathcal{B}')$

Donc P_1P_2 est la matrice de $Id\ :\ (E, \mathcal{B}) \longmapsto (E, \mathcal{B})$

$$P_1P_2 = I_n$$

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

- La matrice P, ayant pour colonne i les coordonnées du vecteur $\vec{a}'_i$ sur la base $\{\vec{a}_j\}_{(1 \leq j \leq n)}$ est inversible.

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

- La matrice P, ayant pour colonne i les coordonnées du vecteur $\vec{a}'_i$ sur la base $\{\vec{a}_j\}_{(1\leq j\leq n)}$ est inversible.
- $P = M_{(id,\mathcal{B}',\mathcal{B})}$ $\quad P^{-1} = M_{(id,\mathcal{B},\mathcal{B}')}$

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

- La matrice P, ayant pour colonne i les coordonnées du vecteur $\vec{a}'_i$ sur la base $\{\vec{a}_j\}_{(1 \leq j \leq n)}$ est inversible.
- $P = M_{(id,\mathcal{B}',\mathcal{B})} \quad P^{-1} = M_{(id,\mathcal{B},\mathcal{B}')}$
- Si X est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $\vec{x} \in E$ et X' est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du même vecteur $\vec{x}$:

Matrice de passage

Théorème : Si $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n,

- La matrice P, ayant pour colonne i les coordonnées du vecteur $\vec{a}'_i$ sur la base $\{\vec{a}_j\}_{(1 \leq j \leq n)}$ est inversible.
- $P = M_{(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})}$ $\quad P^{-1} = M_{(id, \mathcal{B}, \mathcal{B}')}$
- Si X est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur $\vec{x} \in E$ et X' est la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du même vecteur $\vec{x}$:

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X$$

Matrice de passage

Exemple 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Soit les trois vecteurs :

$\vec{e}_1' = (2, -1, 1) \quad \vec{e}_2' = (1, 2, -1) \quad \vec{e}_3' = (1, 1, -3)$.

Matrice de passage
Exemple 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Soit les trois vecteurs :

$\vec{e}'_1 = (2, -1, 1) \quad \vec{e}'_2 = (1, 2, -1) \quad \vec{e}'_3 = (1, 1, -3)$.

Exercice 1 : $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

Matrice de passage
Exemple 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Soit les trois vecteurs :

$\vec{e}_1' = (2, -1, 1) \quad \vec{e}_2' = (1, 2, -1) \quad \vec{e}_3' = (1, 1, -3)$.

Exercice 1 : $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 : Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (2, 3, 4)$ dans la base : $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$

Matrice de passage

Exemple 2

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Soit les trois vecteurs :

$\vec{e}_1' = (2, -1, 1)$ $\quad \vec{e}_2' = (1, 2, -1)$ $\quad \vec{e}_3' = (1, 1, -3)$.

Exercice 1 : $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 : Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (2, 3, 4)$ dans la base : $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage
Exemple 2

Exercice 3 : L'inverse de la matrice P est :

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{13}\right) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

Exemple 2

Exercice 3 : L'inverse de la matrice P est :

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{13}\right)\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = (2\,,3\,,4)$.

Soit $(x'\,,y'\,,z')$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$,

Matrice de passage

Exemple 2

Exercice 3 : L'inverse de la matrice P est :

$$P^{-1} = (\frac{1}{13}) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = (2\,,3\,,4)$.

Soit $(x'\,,y'\,,z')$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (\frac{1}{13}) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (\frac{1}{13}) \begin{pmatrix} 8 \\ 37 \\ -27 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Matrice de passage

Effet sur une matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Matrice de passage

Effet sur une matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit M la matrice d'une application linéaire f de E dans E dans la base $\mathcal{B}$

Matrice de passage

Effet sur une matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \cdots, \vec{a}'_n)$ une nouvelle base de E

Soit M la matrice d'une application linéaire f de E dans E dans la base $\mathcal{B}$

Proposition : Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice :

$$M' = P^{-1}MP$$

est la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.

Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice M :

- Le rang du système de vecteurs colonnes de M.

Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice M :

- Le rang du système de vecteurs colonnes de M.
- Le rang du système de vecteurs lignes M.

Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice M :

- Le rang du système de vecteurs colonnes de M.
- Le rang du système de vecteurs lignes M.

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique les règles élémentaires au système de vecteurs colonnes (ou lignes).

Rang d'une matrice

On appelle rang d'une matrice M :

- Le rang du système de vecteurs colonnes de M.
- Le rang du système de vecteurs lignes M.

Pour calculer le rang d'une matrice, on applique les règles élémentaires au système de vecteurs colonnes (ou lignes).

Une matrice carrée de dimension n est de rang n si et seulement si elle est inversible.

Calcul de déterminants

Soit : E espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E.

Soit : E espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E.

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

deux vecteurs de E.

Soit : E espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E.

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$$

deux vecteurs de E.

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre réel :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2$$

Proposition : Le déterminant vérifie les assertions suivantes :

1. Pour tout vecteur $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

Proposition : Le déterminant vérifie les assertions suivantes :

1. Pour tout vecteur $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Proposition : Le déterminant vérifie les assertions suivantes :

1. Pour tout vecteur $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_1y_1 - y_1x_1 = 0$$

2. Pour tous vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u})$$

2. Pour tous vecteurs $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = x_2 y_1 - y_2 x_1 = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

3. Soient :
$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 \in E$,
α et $\beta \in \mathbb{R}$:

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

3. Soient :
$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 \in E$,
α et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \alpha \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}), \\ \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) &= \alpha \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}); \end{aligned}$$

3. Soient :
$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 \in E$,
α et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}),\\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w});
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_2 + \beta x_3 \\ y_1 & \alpha y_2 + \beta y_3 \end{vmatrix} = x_1(\alpha y_2 + \beta y_3) - y_1(\alpha x_2 + \beta x_3)$$

3. Soient :
$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 \in E$,
α et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}), \\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_2 + \beta x_3 \\ y_1 & \alpha y_2 + \beta y_3 \end{vmatrix} &= x_1(\alpha y_2 + \beta y_3) - y_1(\alpha x_2 + \beta x_3) \\ &= \alpha(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \beta(x_1 y_3 - y_1 x_3) \end{aligned}$$

3. Soient :
$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ et $\vec{w} = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 \in E$,
α et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}),\\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}) &= \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{w}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v}, \vec{w});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_2 + \beta x_3 \\ y_1 & \alpha y_2 + \beta y_3 \end{vmatrix} &= x_1(\alpha y_2 + \beta y_3) - y_1(\alpha x_2 + \beta x_3)\\
&= \alpha(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \beta(x_1 y_3 - y_1 x_3)\\
&= \alpha \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une autre base de E, alors :

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\, \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\, \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$$

$$\vec{u} = x_1' \vec{e}_1' + y_1' \vec{e}_2' \quad \text{et} \quad \vec{v} = x_2' \vec{e}_1' + y_2' \vec{e}_2'$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\, \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$$

$$\vec{u} = x_1'\vec{e}_1' + y_1'\vec{e}_2' \quad \text{et} \quad \vec{v} = x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2'$$

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \quad = \quad \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1'\vec{e}_1' + y_1'\vec{e}_2', x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2')$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$$

$$\vec{u} = x'_1\vec{e}'_1 + y'_1\vec{e}'_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x'_1\vec{e}'_1 + y'_1\vec{e}'_2, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2) \\ &= x'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2) + y'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_2, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2)\end{aligned}$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\,)$$

$$\vec{u} = x'_1\vec{e}'_1 + y'_1\vec{e}'_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x'_1\vec{e}'_1 + y'_1\vec{e}'_2, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2) \\
&= x'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2) + y'_1\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_2, x'_2\vec{e}'_1 + y'_2\vec{e}'_2) \\
&= x'_1y'_2\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) + y'_1x'_2\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}'_2, \vec{e}'_1)
\end{aligned}$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une autre base de E, alors :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$$

$$\vec{u} = x_1'\vec{e}_1' + y_1'\vec{e}_2' \quad \text{et} \quad \vec{v} = x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2'$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1'\vec{e}_1' + y_1'\vec{e}_2', x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2') \\
&= x_1'\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2') + y_1'\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2', x_2'\vec{e}_1' + y_2'\vec{e}_2') \\
&= x_1'y_2'\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2') + y_1'x_2'\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_2', \vec{e}_1') \\
&= \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u}, \vec{v})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1', \vec{e}_2')
\end{aligned}$$

Corollaire : Si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base de E : deux vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de l'espace vectoriel E.

Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs de E. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note (x_i, y_i, z_i) des coordonnées de $\vec{u}_i$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de l'espace vectoriel E.

Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs de E. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note (x_i, y_i, z_i) des coordonnées de $\vec{u}_i$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre réel :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2 \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition : Une base étant choisie dans E, de dimension 3, le déterminant de trois vecteurs de E vérifie :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$$

Proposition : Une base étant choisie dans E, de dimension 3, le déterminant de trois vecteurs de E vérifie :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$$

2. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$$

Proposition : Une base étant choisie dans E, de dimension 3, le déterminant de trois vecteurs de E vérifie :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$$

2. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$$

3. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$ des vecteurs de E, α et β des nombres réels :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w},\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) \\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{w},\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) \\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}+\beta\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x})\,.
\end{array}$$

Proposition : Une base étant choisie dans E, de dimension 3, le déterminant de trois vecteurs de E vérifie :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$$

2. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$$

3. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$ des vecteurs de E, α et β des nombres réels :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v},\vec{w},\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) \\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\alpha\vec{v}+\beta\vec{w},\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) \\
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}+\beta\vec{x}) & = & \alpha\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \beta\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{x})\,.
\end{array}$$

4. Si $\mathcal{B}' = (\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3)$ est une autre base de E, pour tout $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs de E,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}_3)$$

Corollaire : Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E : trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, sont coplanaires si, et seulement si :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de l'espace vectoriel E.

Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs de E. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note (x_i, y_i, z_i) des coordonnées de $\vec{u}_i$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre réel :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
&= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - z_1y_2x_3 - z_2y_3x_1 - z_3y_1x_2 \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccccl}
 & & & & -\ z_1 y_2 x_3 \\
\left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right. & & & \left. \right| & \begin{array}{l} -\ x_1 z_2 y_3 \\ -\ y_1 x_2 z_3 \\ \\ \end{array} \\
x_1 & x_2 & x_3 & & +\ x_1 y_2 z_3 \\
y_1 & y_2 & y_3 & & +\ y_1 z_2 x_3 \\
 & & & & +\ z_1 x_2 y_3
\end{array}
$$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \ldots\,, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \ldots\,, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi E \longmapsto \mathbb{R}$ qui vérifie :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi E \longmapsto \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall i \ (1 \leq i \leq n), \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \alpha.\vec{u}_i + \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_i, , \cdots, \vec{u}_n) + \varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n)$$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall i \ (1 \leq i \leq n), \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$:
$$\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \alpha.\vec{u}_i + \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_i, , \cdots, \vec{u}_n) + \varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n)$$
2. Si pour $i \neq j$, $\vec{u}_i = \vec{u}_j$, $\quad \varphi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_i, \cdots, \vec{u}_j, \cdots, \vec{u}_n) = 0$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi\, E \longmapsto \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall i\ (1 \leq i \leq n), \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$:
$$\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \alpha.\vec{u}_i + \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_i, , \cdots, \vec{u}_n) + \varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n)$$
2. Si pour $i \neq j$, $\vec{u}_i = \vec{u}_j$, $\quad \varphi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_i, \cdots, \vec{u}_j, \cdots, \vec{u}_n) = 0$
3. $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi E \longmapsto \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall i\ (1 \leq i \leq n), \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \alpha.\vec{u}_i + \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_i, , \cdots, \vec{u}_n) + \varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n)$$

2. Si pour $i \neq j$, $\vec{u}_i = \vec{u}_j$, $\quad \varphi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_i, \cdots, \vec{u}_j, \cdots, \vec{u}_n) = 0$
3. $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$

Le nombre $\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n)$ s'appelle le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,
On admet :

Théorème : Il existe une application $\varphi\, E \longmapsto \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall i\ (1 \leq i \leq n), \quad \forall \vec{v} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \alpha.\vec{u}_i + \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_i, , \cdots, \vec{u}_n) + \varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{v}, \cdots, \vec{u}_n)$$

2. Si pour $i \neq j$, $\vec{u}_i = \vec{u}_j$, $\quad \varphi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_i, \cdots, \vec{u}_j, \cdots, \vec{u}_n) = 0$
3. $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = 1$

Le nombre $\varphi(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n)$ s'appelle le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. Noté : $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \dots\,, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,

1. Si on permute 2 vecteurs de la famille, le déterminant est multiplié par -1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,

1. Si on permute 2 vecteurs de la famille, le déterminant est multiplié par -1.
2. Si on multiplie un vecteur par α, le déterminant est multiplié par α.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \ldots\,, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,

1. Si on permute 2 vecteurs de la famille, le déterminant est multiplié par -1.
2. Si on multiplie un vecteur par α, le déterminant est multiplié par α.
3. Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = 0$

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \ldots\,, \vec{e}_n\}$.

Soit une famille de n vecteurs de E : $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$,

1. Si on permute 2 vecteurs de la famille, le déterminant est multiplié par -1.
2. Si on multiplie un vecteur par α, le déterminant est multiplié par α.
3. Si la famille $\mathcal{F}$ est liée, $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = 0$

   Si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres, le déterminant est inchangé.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de la matrice M, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de la matrice M, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notation : $\det(M)$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de la matrice M, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notation : $\det(M)$
Si $M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de la matrice M, le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice M, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notation : $\det(M)$
Si $M = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|a_{ij}\right|_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$$

Théorème : Pour tout déterminant $D = \left|a_{ij}\right|_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, on a :

$$\forall j, (1 \leq j \leq n), \quad D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant de D la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Application : Les déterminants des matrices diagonales et des matrices triangulaires sont égaux aux produits des éléments diagonaux de ces matrices.

Application : Les déterminants des matrices diagonales et des matrices triangulaires sont égaux aux produits des éléments diagonaux de ces matrices.

$$\det(I_n) = 1$$

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.
Proposition : Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de chaque matrice.

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.
Proposition : Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de chaque matrice.

$$\det(MM') = \det(M)\det(M')$$

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.
Proposition : Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de chaque matrice.

$$\det(MM') = \det(M)\det(M')$$

Corollaire :

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.
Proposition : Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de chaque matrice.

$$\det(MM') = \det(M)\det(M')$$

Corollaire :

- M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

Soit M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n$ et I_n la matrice identité.
Proposition : Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de chaque matrice.

$$\det(MM') = \det(M)\det(M')$$

Corollaire :

- M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$
- Si M est inversible : $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$

Calcul d'un déterminant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Calcul d'un déterminant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1$$

Calcul d'un déterminant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1$$
$$C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1$$

Calcul d'un déterminant 4 × 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1$$
$$C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1$$
$$C_4 \rightsquigarrow C_4 - 3C_1$$

Calcul d'un déterminant 4 × 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{gathered} C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \rightsquigarrow C_4 - 3C_1 \end{gathered}$$

Calcul d'un déterminant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \rightsquigarrow C_4 - 3C_1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calcul d'un déterminant 4×4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{gathered} C_2 \rightsquigarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \rightsquigarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \rightsquigarrow C_4 - 3C_1 \end{gathered}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & -8 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & -8 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & -8 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \color{red}{-5} & \color{red}{-2} & \color{red}{-8} \\ 3 & \color{red}{0} & 4 \\ 1 & \color{red}{0} & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Exercice : Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$