Mathématiques et calcul
1^{er} semestre

Université Paris Descartes

Les nombres complexes

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$

$$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$

Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$

  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$

  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif

- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$
  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif
- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$
  $$\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$
  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif
- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$
  $$\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$$
  Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$
  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif
- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$
  $$\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$$
  Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif

Dans $\mathbb{R}$, un carré est toujours positif

La règle des signes

Soit a et $b \in \mathbb{R}_+$

- $0 = a.(b + (-b)) = a.b + a.(-b)$
  $$\Rightarrow \quad -(a.b) = a.(-b)$$
  Le produit d'un positif et d'un négatif est négatif
- $0 = (-a).(b+(-b)) = (-a).b+(-a).(-b) = -(a.b)+(-a).(-b)$
  $$\Rightarrow \quad a.b = (-a).(-b)$$
  Le produit d'un négatif et d'un négatif est positif

Dans $\mathbb{R}$, un carré est toujours positif

L'équation $X^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine.

On appelle i une racine carrée de -1

On appelle i une racine carrée de -1 : $\quad i^2 = -1$

On appelle i une racine carrée de -1 : $\quad i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \quad | \quad x,\ y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

On appelle i une racine carrée de -1 : $i^2 = -1$

On définit l'ensemble des nombres complexes comme :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \quad | \quad x,\ y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

- x est la partie réelle de z, notée : $x = \Re(z)$
- y est la partie imaginaire de z, notée : $y = \Im(z)$

- $z = x + iy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0$

Sinon pour $y \neq 0$: $i = -\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$

- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$$

- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$

$$\text{et} \quad \begin{aligned} \Re(z.z') &= \Re(z).\Re(z') - \Im(z)\Im(z') \\ \Im(z.z') &= \Re(z)\Im(z') + \Re(z')\Im(z) \end{aligned}$$

- $z = x + iy = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$
- $x + iy = x' + iy' \quad \Longleftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$

Puisque : $x + iy = x' + iy' \quad \Longleftrightarrow \quad x - x' + i(y - y') = 0$

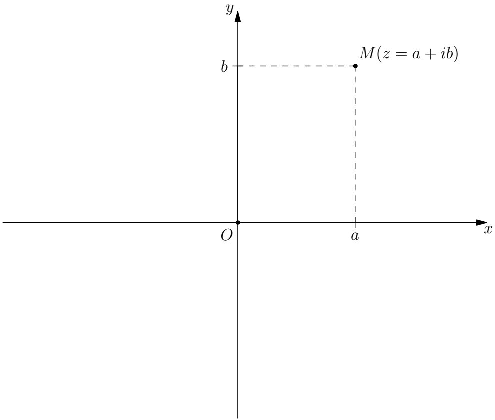
- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$
- $x + iy = x' + iy' \quad \Leftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy).(x - iy) = x^2 + y^2$

- $z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$
- $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- $z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + x'.y)$
- $x + iy = x' + iy' \quad \Leftrightarrow \quad x = x'$ et $y = y'$
- $(x + iy).(x - iy) = x^2 + y^2$
- Si $x + iy \neq 0$: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\Re(\tfrac{1}{z}) = \frac{\Re(z)}{\Re(z)^2+\Im(z)^2} \quad \text{et} \quad \Im(\tfrac{1}{z}) = \frac{-\Im(z)}{\Re(z)^2+\Im(z)^2}$$

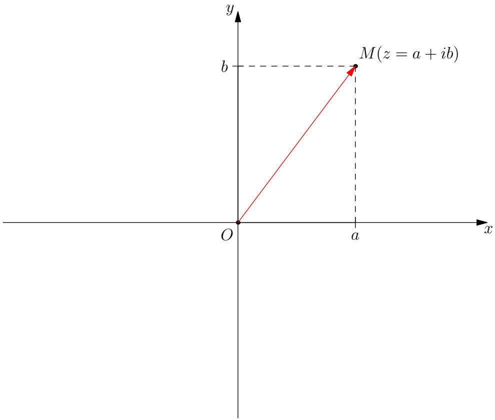
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

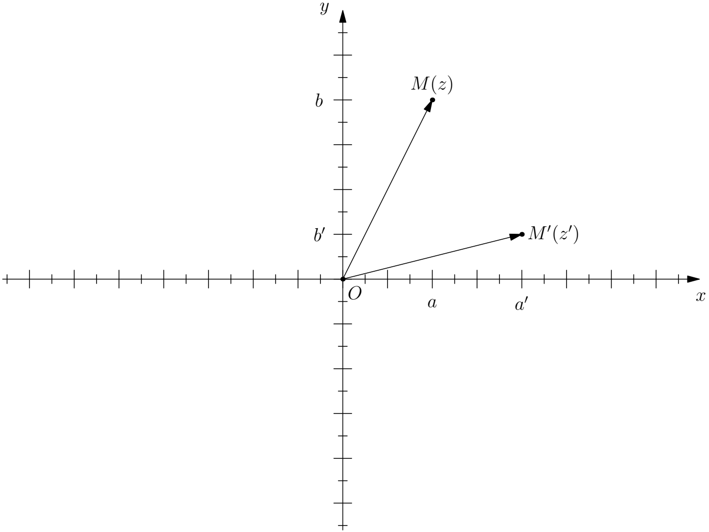
Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le plan.

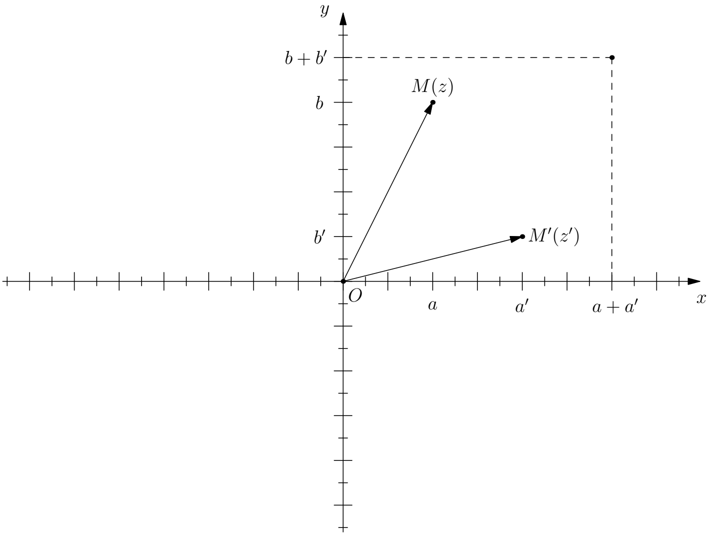


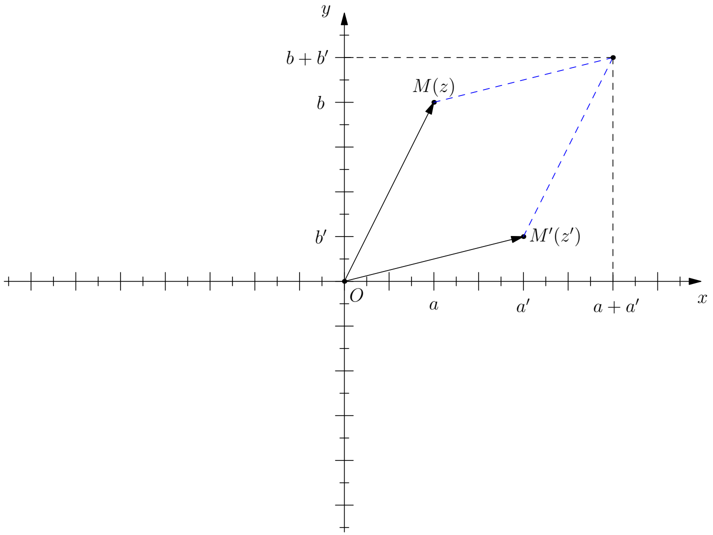
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Le nombre complexe z s'appelle l'affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le plan.

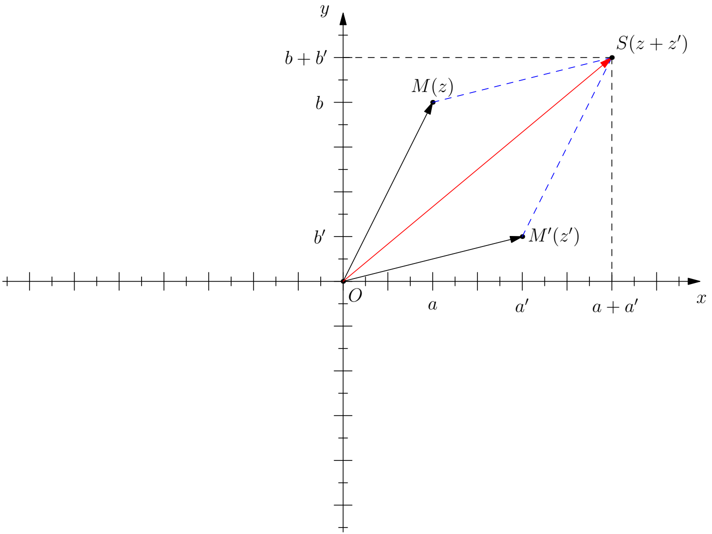


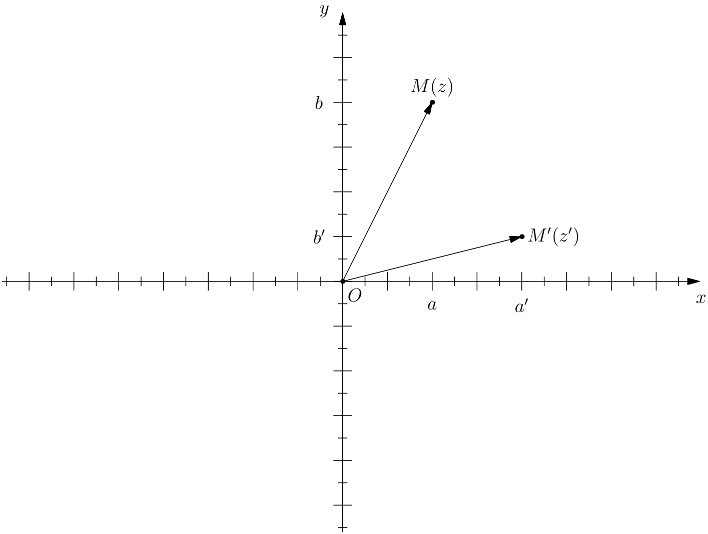

y
$M(z)$
b
b'
$M'(z')$
O
a
a'
x

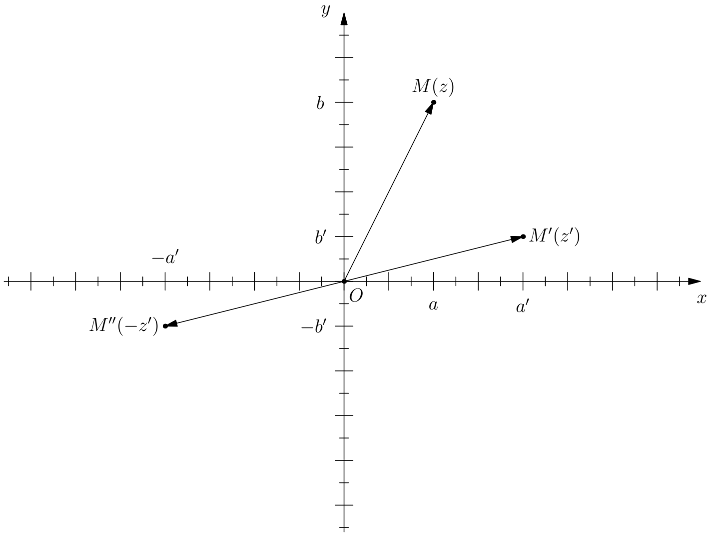

y
$b+b'$
$M(z)$
b
b'
$M'(z')$
O
a
a'
$a+a'$
x



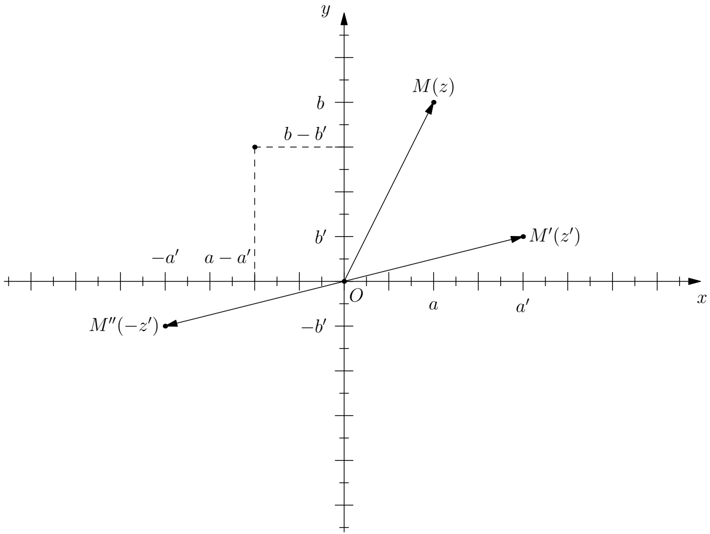
y
$b+b'$
$M(z)$
b
b'
$M'(z')$
O
a
a'
$a+a'$
x


y
$b+b'$
b
b'
$M(z)$
$S(z+z')$
$M'(z')$
O
a
a'
$a+a'$
x

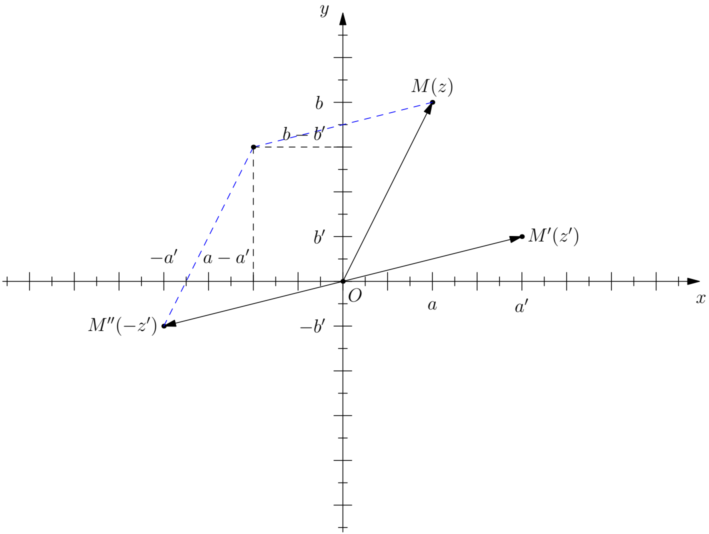

y
$M(z)$
b
b'
$M'(z')$
O
a
a'
x

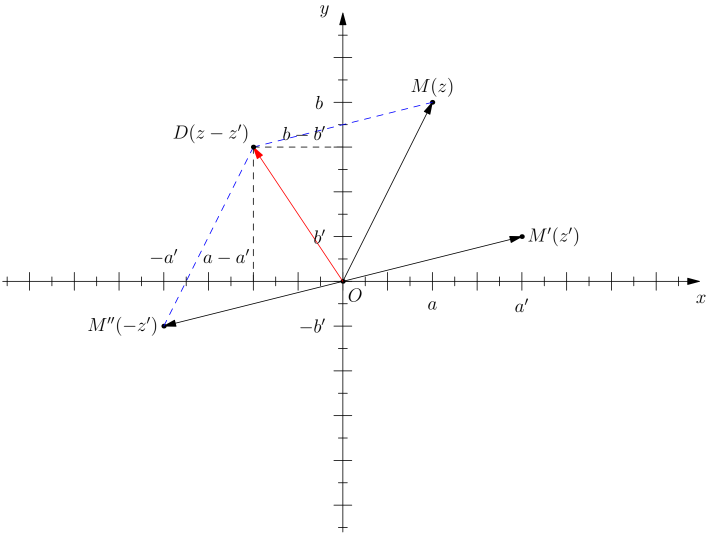


y
$M(z)$
b
b'
$M'(z')$
$-a'$
O
a
a'
x
$M''(-z')$
$-b'$



y
$M(z)$
b
$b - b'$
b'
$M'(z')$
$-a'$
$a - a'$
O
x
a
a'
$M''(-z')$
$-b'$


y
$M(z)$
b
$b-b'$
b'
$M'(z')$
$-a'$
$a-a'$
O
a
a'
x
$M''(-z')$
$-b'$


y
$M(z)$
b
$D(z-z')$
$b-b'$
b'
$M'(z')$
$-a'$
$a-a'$
O
x
a
a'
$M''(-z')$
$-b'$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

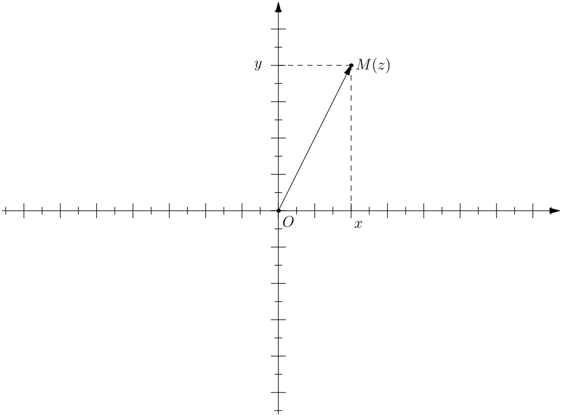
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

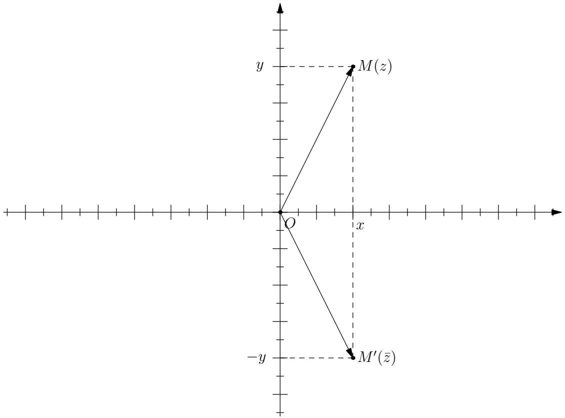
$$\bar{z} = x - iy$$



Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre :

$$\bar{z} = x - iy$$



Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$

Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$

Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z) \quad \text{et} \quad \Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = 0$

Conjugué : règles de calcul

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

- $\Re(\bar{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\bar{z}) = -\Im(z)$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{(\overline{z})} = z, \quad \overline{(z_1.z_2)} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R}$, $(z = x)$ $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R},\ (z = x) \quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$
- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ (z = x + iy,\ y \neq 0)$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R}$, $(z = x)$ $\quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$
- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(z = x + iy,\ y \neq 0)$
  - $|z^2| = |(x+iy)^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe avec valeur absolue.
La notation est la même mais :

- Si $z \in \mathbb{R}$, $(z = x)$ $\quad |z| = \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $|z^2| = z^2$
- Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(z = x + iy,\ y \neq 0)$
    - $|z^2| = |(x+iy)^2| = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$
    - $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \neq |z^2|$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$

$$|z.z'|^2 = (z.z').\overline{(z.z')} = (z.z').(\bar{z}.\bar{z}') = (z.\bar{z}).(z'.\bar{z}') = |z|^2.|z'|^2$$

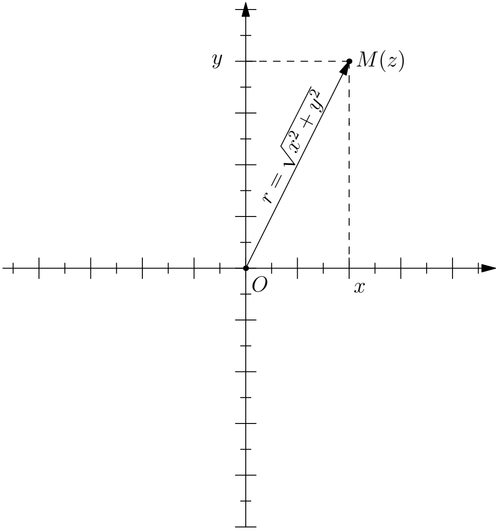
UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

On appelle module du nombre complexe z, le nombre réel :

$$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|$
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z').\overline{(z+z')} = z.\bar{z} + z.\bar{z}' + z'.\bar{z} + z'.\bar{z}' \\ &= |z|^2 + 2\Re(z.\bar{z}') + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z|.|z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$


y
M(z)
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
O
x

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3 + 4i$

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4i$

On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = 3 + 4i$

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4\,i$

On cherche $z = x + i\,y$ tel que $z^2 = 3 + 4\,i$

- $(x+i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2i\,xy = 3 + 4\,i$

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4\,i$

On cherche $z=x+i\,y$ tel que $z^2=3+4\,i$

- $(x+i\,y)^2=x^2-y^2+2i\,xy=3+4\,i$
- $|z|^2=x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4\,i$

On cherche $z = x + i\,y$ tel que $z^2 = 3 + 4\,i$

- $(x+i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2i\,xy = 3 + 4\,i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{cases}$$

Proposition : Tout nombre complexe a deux racine carrées opposées.

Exemple : trouver la racine carrée de $3+4\,i$

On cherche $z = x + i\,y$ tel que $z^2 = 3 + 4\,i$

- $(x+i\,y)^2 = x^2 - y^2 + 2i\,xy = 3 + 4\,i$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3 \\ 2xy & = & 4 \\ x^2 + y^2 & = & 5 \end{cases}$$

D'où les deux solutions : $(x\,,y) = (2\,,1)$ et $(x\,,y) = (-2\,,-1)$

Pour trouver la racine d'un nombre complexe $a + ib$,
on pose : $(x + iy)^2 = a + ib$

Pour trouver la racine d'un nombre complexe $a + ib$,
on pose : $(x + iy)^2 = a + ib$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$

Pour trouver la racine d'un nombre complexe $a+ib$,

on pose : $(x+iy)^2 = a+ib$

- $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

Pour trouver la racine d'un nombre complexe $a + ib$,

on pose : $(x + iy)^2 = a + ib$

- $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$
- $|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

x et y sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) permettent de calculer x^2 et y^2

L'équation (2) permet de trouver le signe de x et y

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$a z^2 + b z + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} a z^2 + b z + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Les racines sont donc les nombres complexes z, tels que $z + \dfrac{b}{2a}$ soit une racine carrée de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :
Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :
Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$$

Quand a, b et c sont réels, on a les solutions (complexes) suivantes :
Si $\Delta > 0$, les deux racines sont :

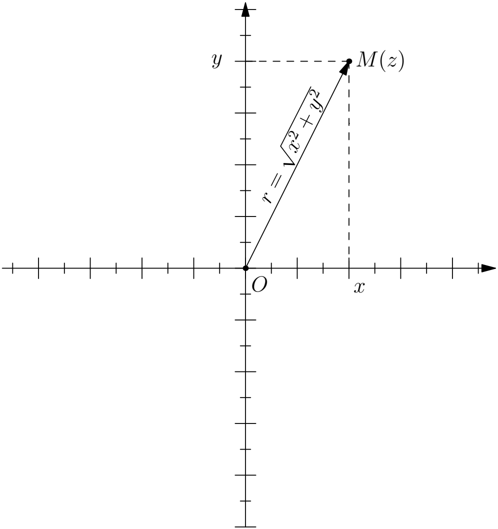
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

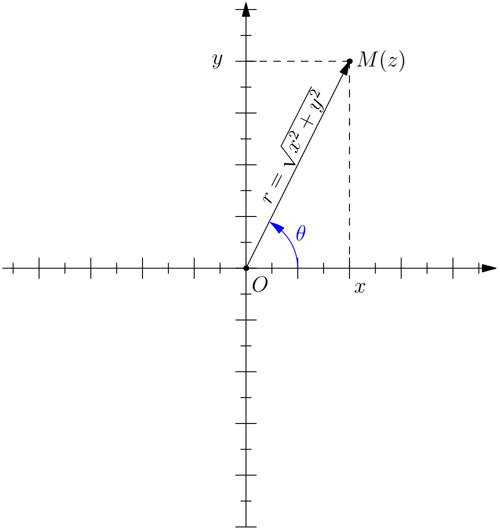
Si $\Delta < 0$, les deux racines sont :

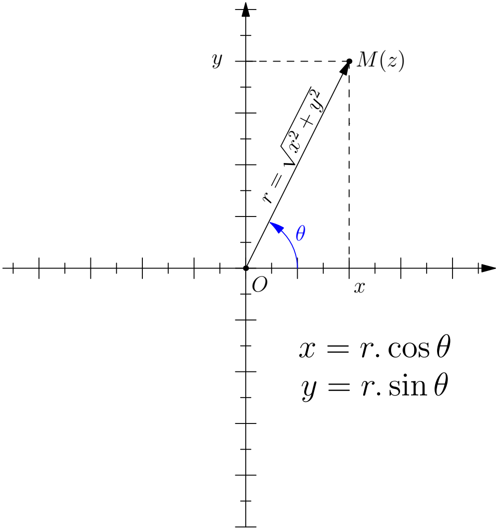
$$z_1 = \frac{-b + i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a}$$

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$z = -\frac{b}{2\,a}$$


y
$M(z)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
O
x


y
$M(z)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
θ
O
x



$$x = r.\cos\theta$$
$$y = r.\sin\theta$$

On appelle argument du nombre complexe $z = x + iy$, la seule solution θ, $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$, du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Notation : $\theta = \arg(z)$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x,\ y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Remarque : Le choix $0 \leq \theta < 2\pi$ est un choix arbitraire, on peut tout aussi bien choisir : $-\pi \leq \theta < \pi$ ou ...

Exemples

- $z = 1 + i \qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
  Donc :
  $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemples

- $z = 3 + i\sqrt{3}$ $\qquad r = |z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
  Donc :
  $z = 2\sqrt{3}\,(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}\,(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$

Exemples

- $z = 1 - i\sqrt{3}$ $\qquad r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
  Donc :
  $z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$

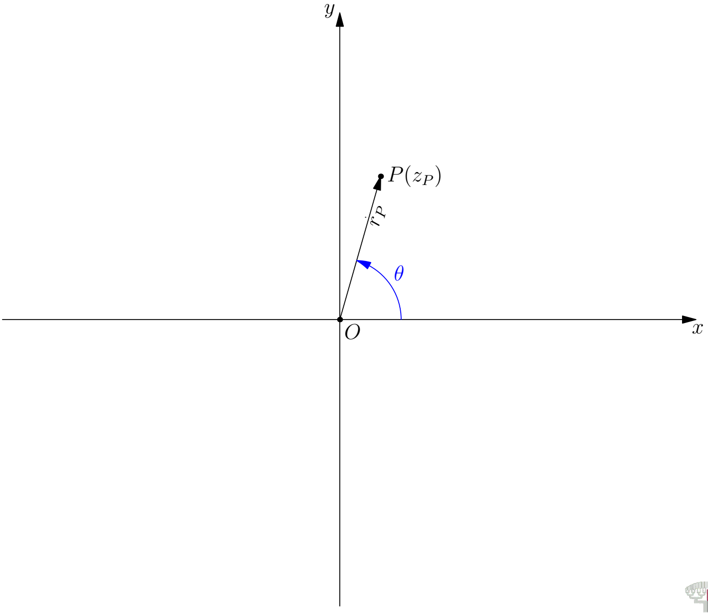
Moyen mnémotechnique

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

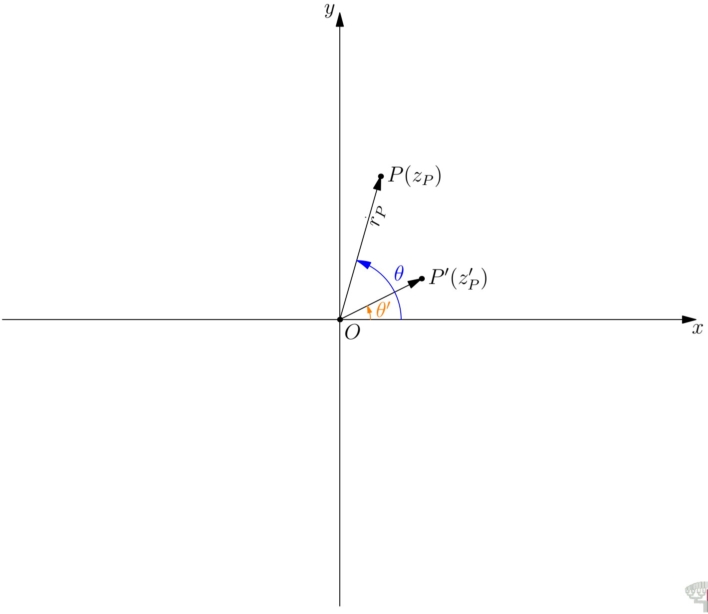
Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

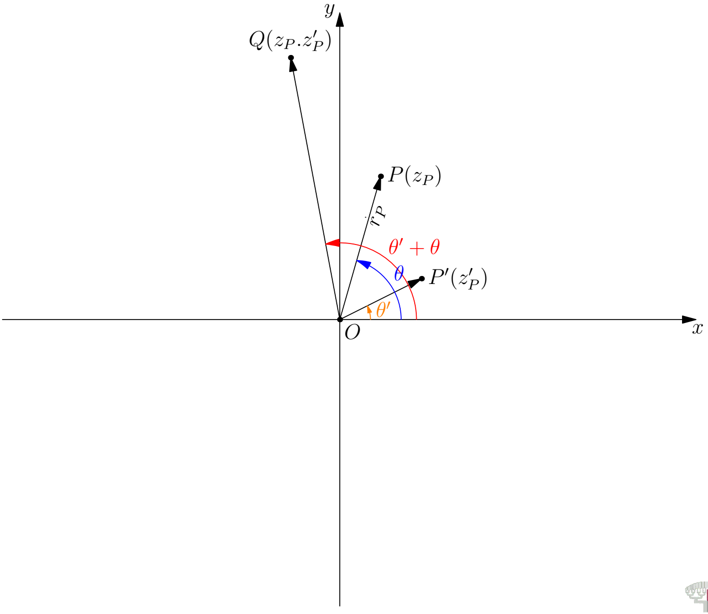
$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$$

$$= rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$



y
$P(z_P)$
r_P
θ
O
x


y
$P(z_P)$
r_P
θ
$P'(z'_P)$
θ'
O
x


y
$Q(z_P.z'_P)$
$P(z_P)$
r_P
$\theta' + \theta$
θ
$P'(z'_P)$
θ'
O
x

Soit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\quad z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$$

$$= rr'[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')]$$

Règle : Pour multiplier deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On multiplie les modules
- On additionne les arguments

Si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{r.(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{r.(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$\forall z \neq 0, z' \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\Big(\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)\Big)$$

Si $z \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \dfrac{r.(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$\forall z \neq 0, z' \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}\Big(\cos(\theta' - \theta) + i\sin(\theta' - \theta)\Big)$$

Règle : Pour diviser deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique,

- On divise les modules
- On soustrait l'argument du dénominateur de l'argument du numérateur

Puissance entière d'un nombre complexe.

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
z^n &= \underbrace{z.z\ldots z}_{n\text{-fois}} \\
&= \underbrace{r.r\ldots r}_{n\text{-fois}}.\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta + i\sin\theta)\ldots(\cos\theta + i\sin\theta)}_{n\text{-fois}} \\
&= r^n.\Big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\Big)
\end{aligned}
$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n . z^{-n} = z^n . \left(r^{-n} . \Big(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \Big) \right) = 1$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n.z^{-n} = z^n.\left(r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)\right) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)}$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*, \quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n . z^{-n} = z^n . \Big(r^{-n} . \big(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \big) \Big) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n} . \big(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \big)}$$

$$= r^n . \big(\cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta) \big)$$

Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$, $\quad -n \in \mathbb{N}$

$$z^n.z^{-n} = z^n.\left(r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)\right) = 1$$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}.\left(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right)}$$

$$= r^n.\left(\cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)\right)$$

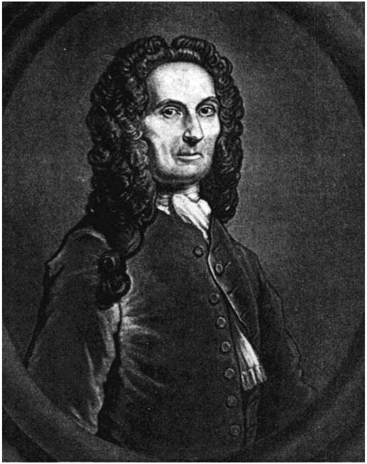
$$= r^n.\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Formule de De Moivre :

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Formule de De Moivre



Abraham De Moivre

Théorème : Il existe une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ (notée $e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$) qui vérifie :

1. $\forall z,\ z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$

Théorème : Il existe une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ (notée $e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$) qui vérifie :

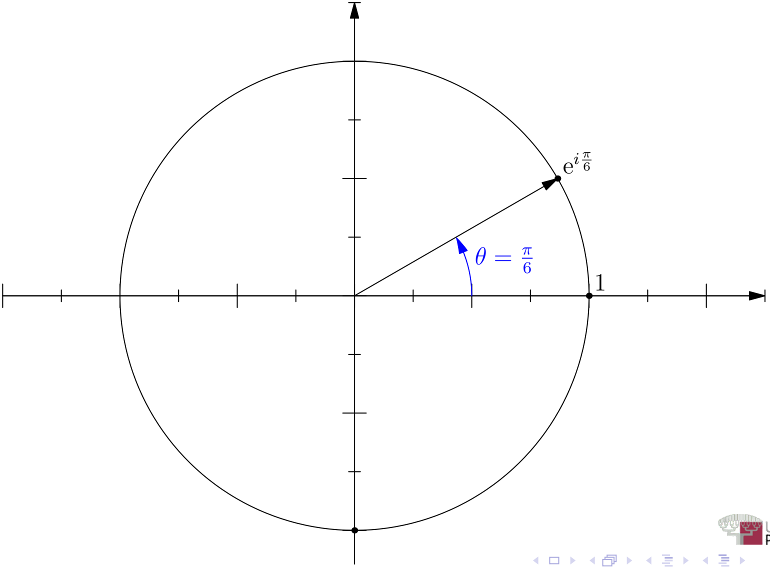
1. $\forall z,\ z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$
2. Si $x \in \mathbb{R}, \quad e^x$ est l'exponentielle réelle

Théorème : Il existe une fonction exponentielle définie sur $\mathbb{C}$ (notée $e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$) qui vérifie :

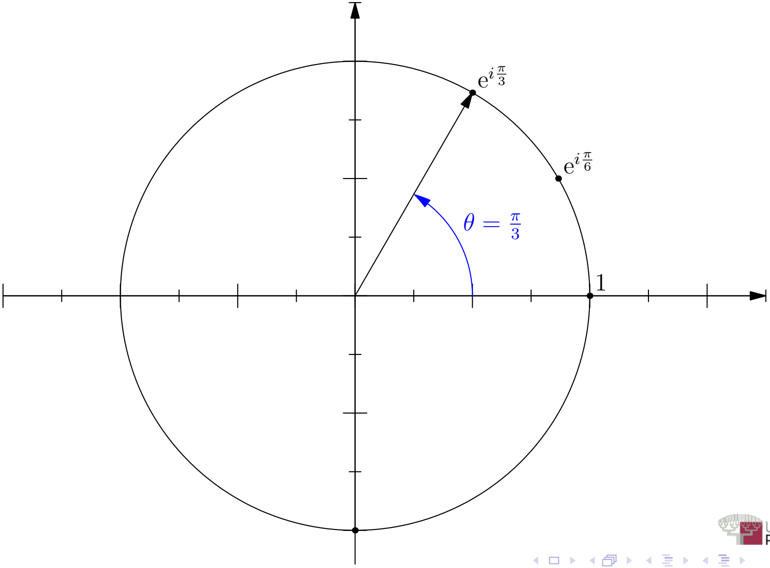
1. $\forall z,\ z' \in \mathbb{C} : \quad e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$
2. Si $x \in \mathbb{R}, \quad e^x$ est l'exponentielle réelle
3. L'application : $\begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longmapsto & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$ est une bijection sur l'ensemble des complexes de module 1

Théorème admis

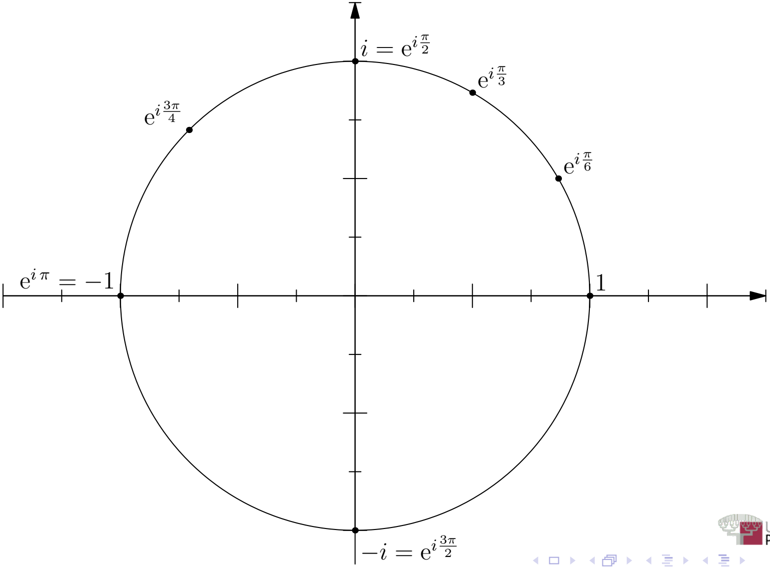
Les nombres complexes de module 1



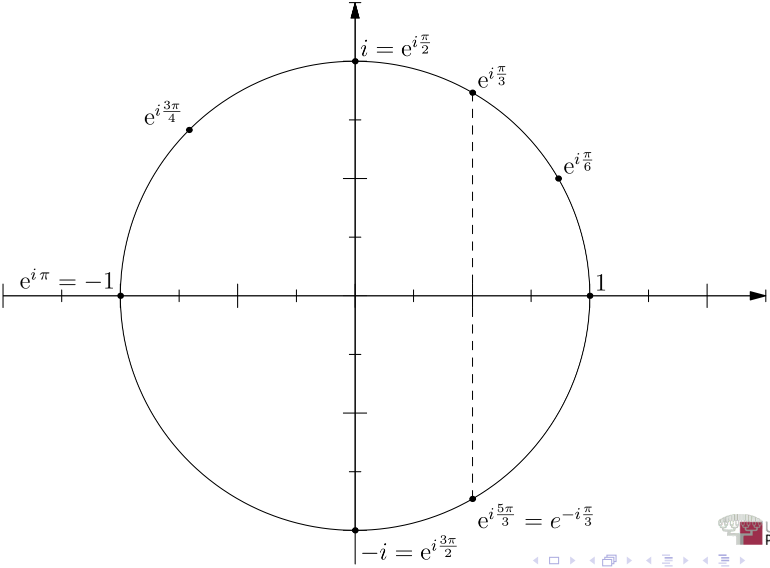
Les nombres complexes de module 1

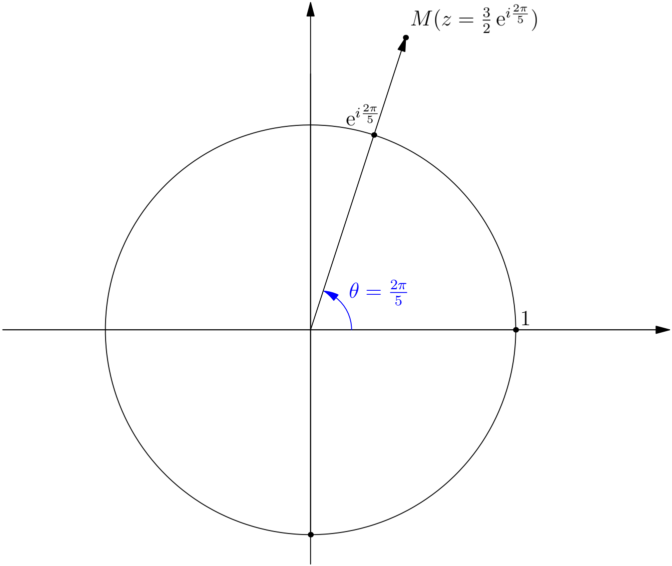


Les nombres complexes de module 1

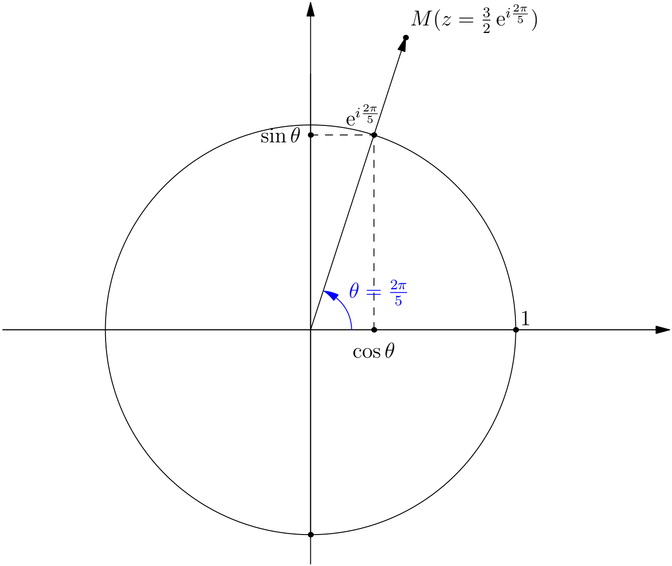


Les nombres complexes de module 1





$M(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$
$\theta = \frac{2\pi}{5}$
1


$M(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$
$\sin\theta$
$\theta = \frac{2\pi}{5}$
1
$\cos\theta$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

On dispose de 3 écritures pour les nombres complexes :

1. algébrique : $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$
2. trigonométrique :
   $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$
3. exponentielle : $z = r.e^{i\theta}, \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in [0, 2\pi[$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{i\theta_1}.e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

Racine *n-ième* d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle racine *n-ième* de z, le nombre complexe :

$$a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tel que :

$$z = a^n$$

$$z = a^n$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varrho^n & = & r \\ n\alpha & = & \theta + 2k\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \varrho & = & \sqrt[n]{r} \\ \alpha & = & \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{array}\right.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leq k \leq n-1$

Théorème : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non-nul, a n racines *n-ièmes* :

$$a_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$0 \leq k \leq n-1$$

Racines *n-ièmes* de l'unité

Si $z = 1$: $r = 1, \quad \theta = 0.$

Les nombres complexes :

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

$$0 \leq k \leq n - 1$$

s'appellent les racines *n-ièmes* de l'unité.

Racines *n-ièmes* de l'unité

Si $z = 1$: $\quad r = 1, \quad \theta = 0.$

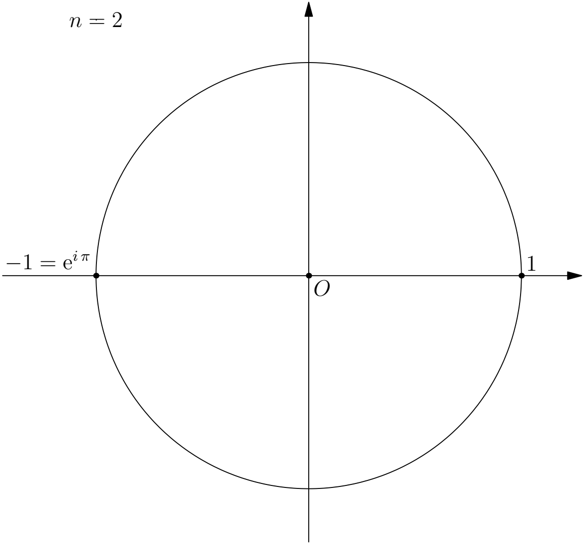
Les nombres complexes :

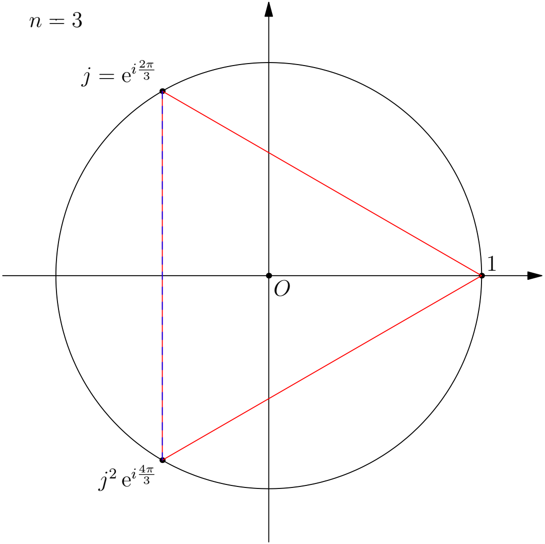
$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = e^{i\,\frac{2k\pi}{n}}$$

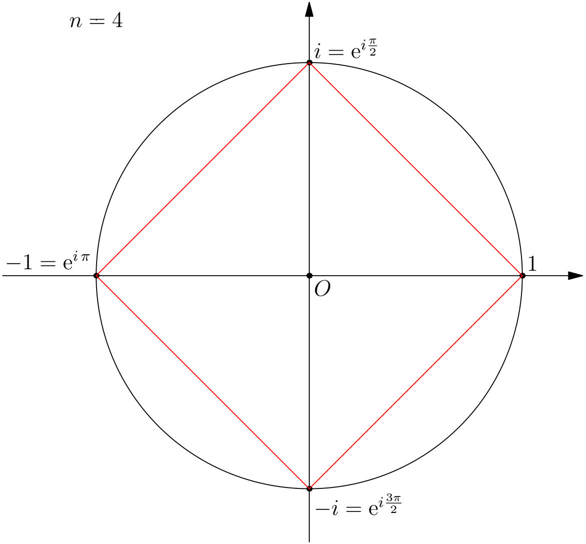
$$0 \leq k \leq n-1$$

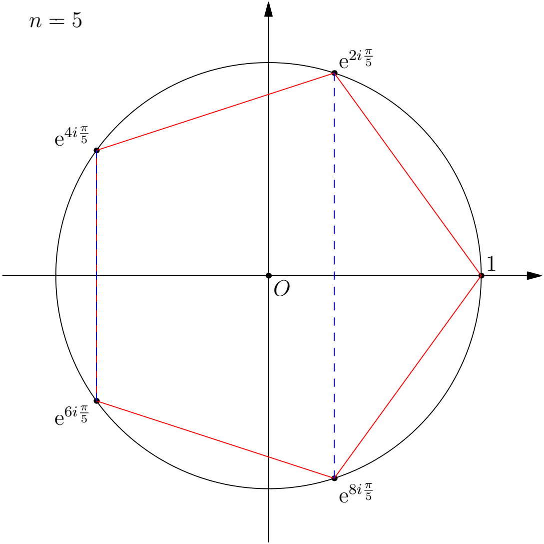
s'appellent les racines *n-ièmes* de l'unité.

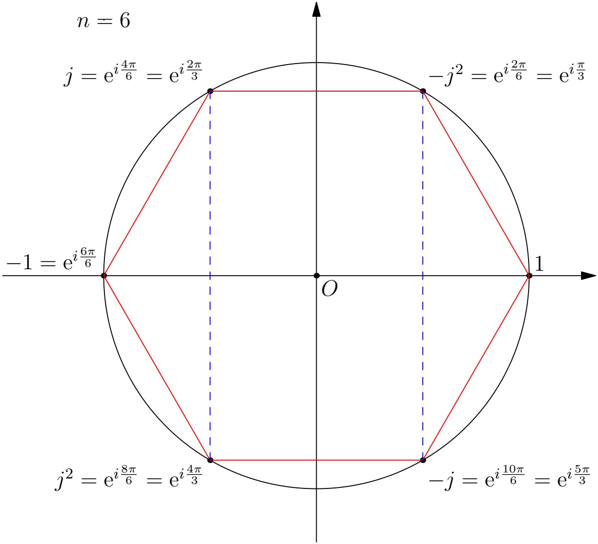
$$\text{Pour } 0 \leq k \leq n-1, \quad \omega_k^n = 1$$


$n = 2$
$-1 = e^{i\pi}$
1
O

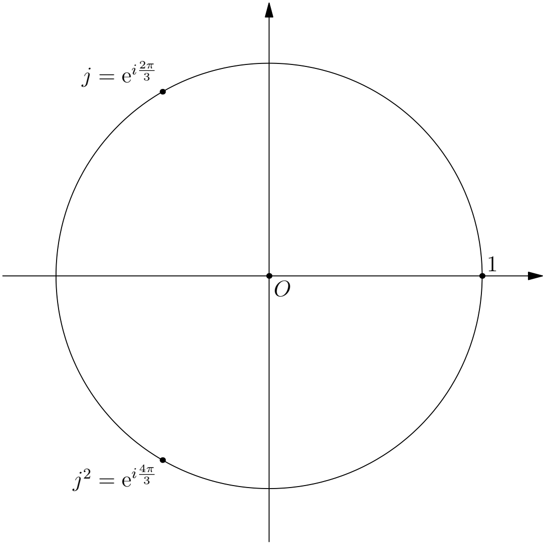

$n = 3$
$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
1
O
$j^2\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$


$n = 4$
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$-1 = e^{i\pi}$
1
O
$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

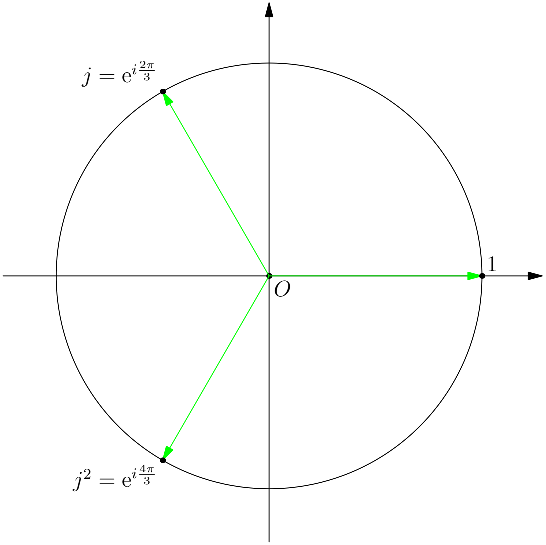

$n = 5$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
O
1
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$n = 6$
$j = e^{i\frac{4\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$-j^2 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
$-1 = e^{i\frac{6\pi}{6}}$
1
O
$j^2 = e^{i\frac{8\pi}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$-j = e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

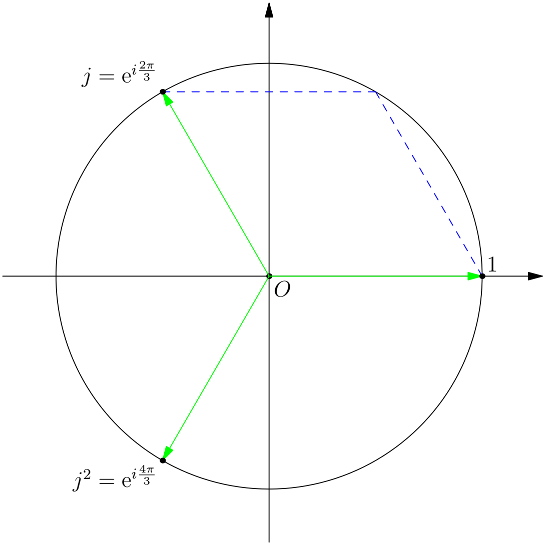
Somme des racines n-ièmes de l'unité



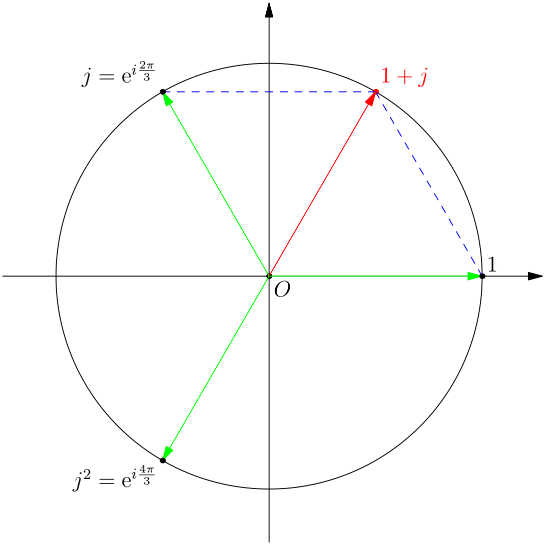
Somme des racines n-ièmes de l'unité



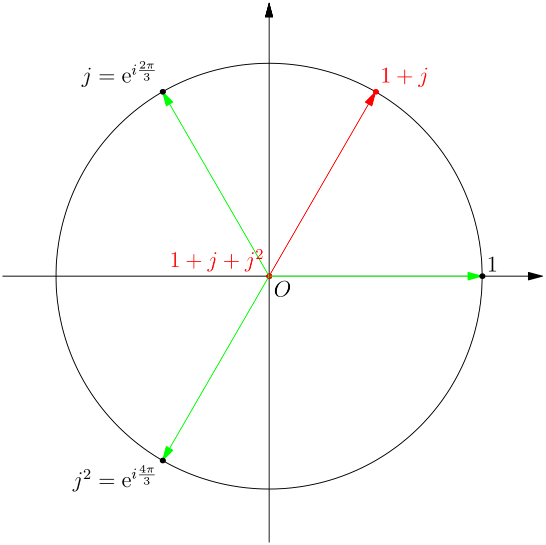
Somme des racines *n*-ièmes de l'unité



Somme des racines *n*-ièmes de l'unité



Somme des racines *n*-ièmes de l'unité



Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k$$

Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\,\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\,\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\,\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\,\frac{2\pi}{n}}}$$

Pour $n = 3$:

$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

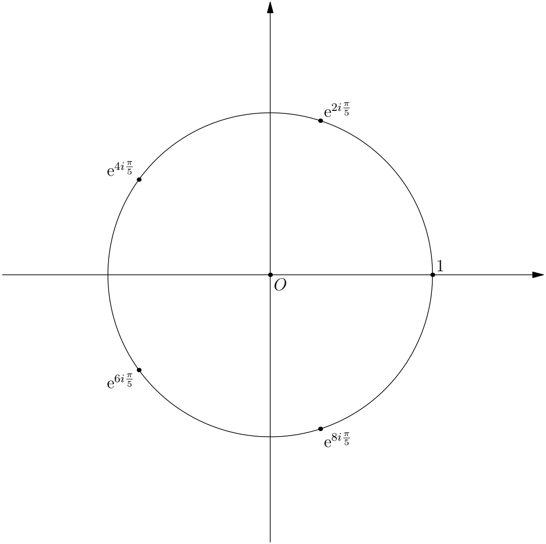
Pour $n = 3$:

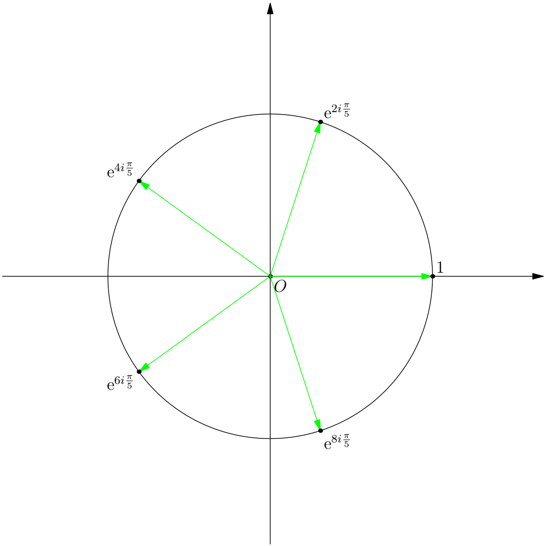
$$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 0$$

Pour n quelconque :

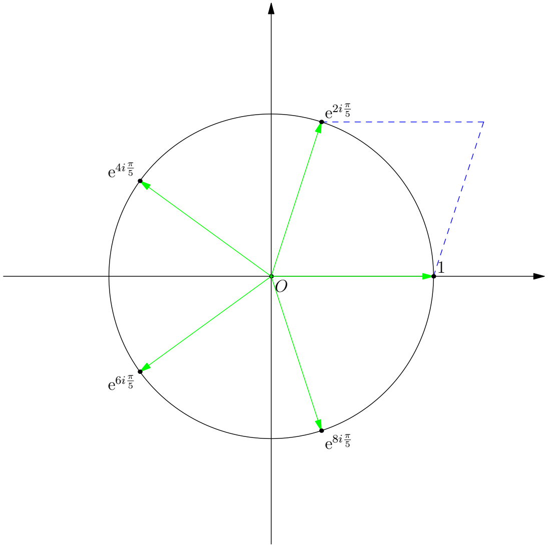
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = \frac{1 - (e^{i\frac{2\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

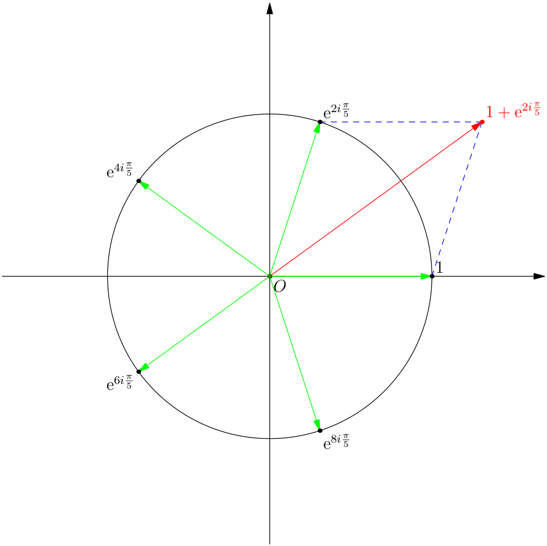
La somme des racines *n-ièmes* de l'unité est nulle

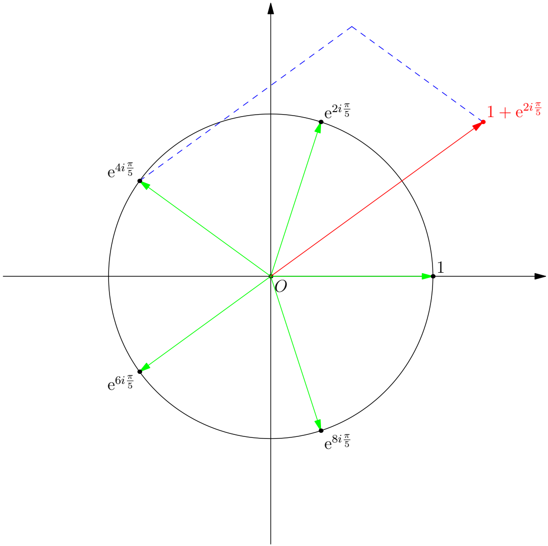

$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$

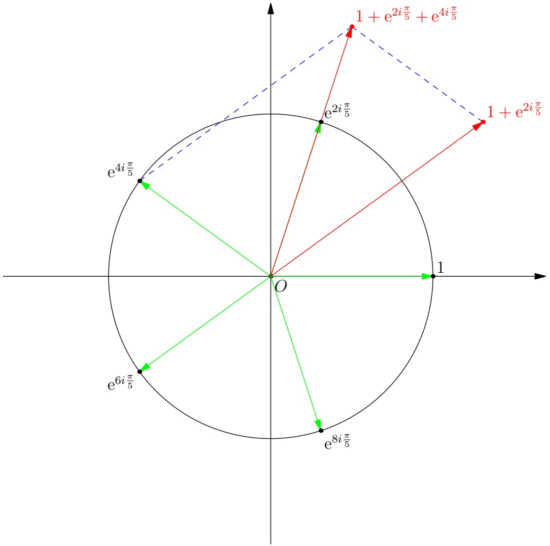


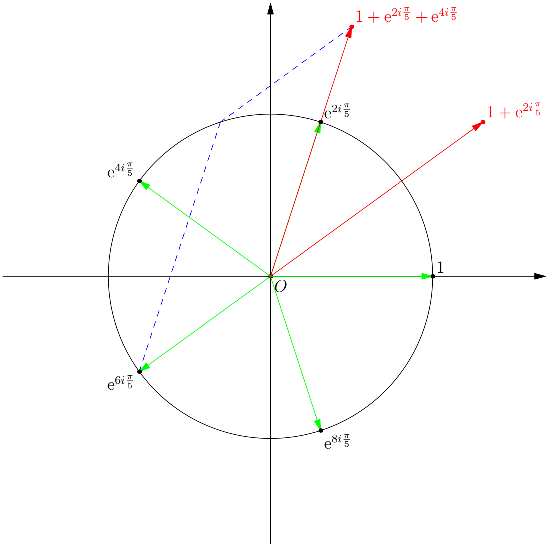
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$

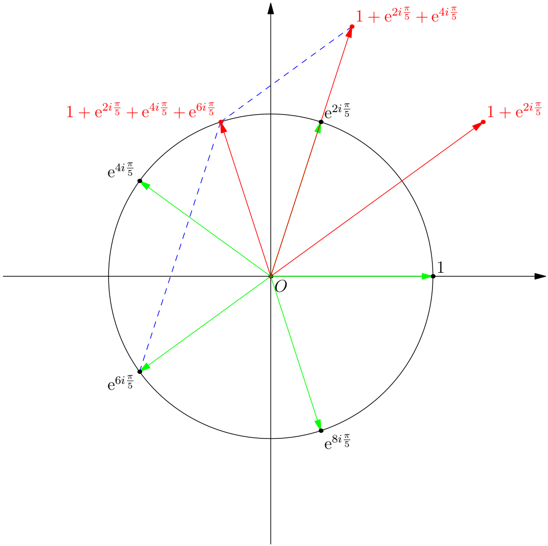

$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$

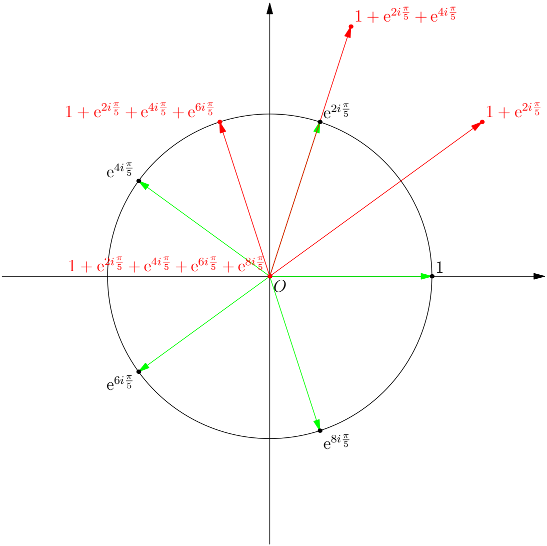

$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}+e^{4i\frac{\pi}{5}}$
$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}}$
$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}}$
$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$


$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}+e^{4i\frac{\pi}{5}}$
$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}+e^{4i\frac{\pi}{5}}+e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}$
$e^{4i\frac{\pi}{5}}$
$1+e^{2i\frac{\pi}{5}}+e^{4i\frac{\pi}{5}}+e^{6i\frac{\pi}{5}}+e^{8i\frac{\pi}{5}}$
1
O
$e^{6i\frac{\pi}{5}}$
$e^{8i\frac{\pi}{5}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z.

$$a^n = b^n = z$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z.

$$a^n = b^n = z$$

Soit :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = b.\omega_k$$

Où ω_k, $(0 \leq k \leq n-1)$ est une racine *n-ièmes* de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et a et b deux racines *n-ièmes* de z.

$$a^n = b^n = z$$

Soit :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = b.\omega_k$$

Où ω_k, $(0 \leq k \leq n-1)$ est une racine *n-ièmes* de l'unité.

Théorème : On obtient les n racines *n-ièmes* d'un nombre complexe en multipliant l'une d'entre elles par les n racines *n-ièmes* de l'unité.

Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2} e^{i \frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}$$

Exemple : soit à calculer les racines 7-*ièmes* de $z = \frac{3}{2} e^{i\,\frac{5\pi}{12}}$

On doit trouver a tel que $a^7 = z$.

$$|a| = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} \qquad a_0 = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{5\pi}{7\times 12}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{5\pi}{84}}$$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{29\pi}{84}}$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\,\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\,\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{53\pi}{84}}$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

- $a_1 = a_0 e^{i\,\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\,\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\,\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{77\pi}{84}}$

Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

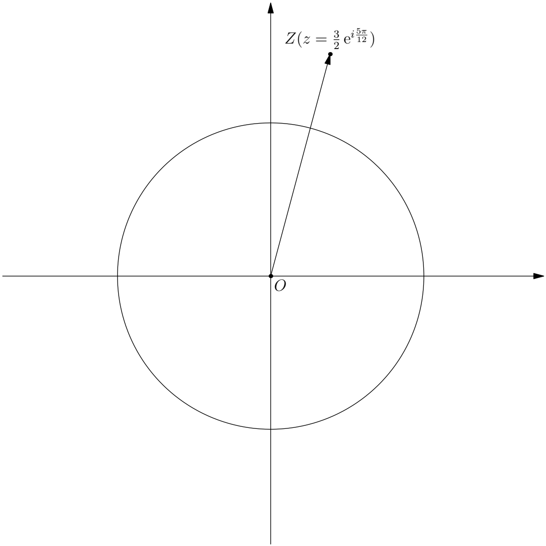
- $a_1 = a_0 e^{i\,\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\,\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\,\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\,\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7})} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\,\frac{101\pi}{84}}$

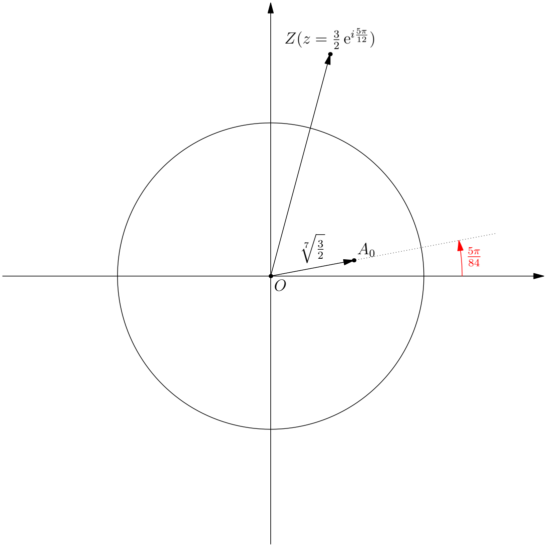
Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

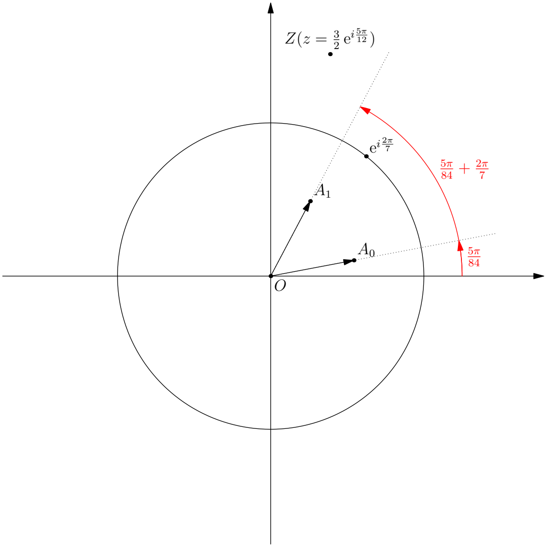
- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{125\pi}{84}}$

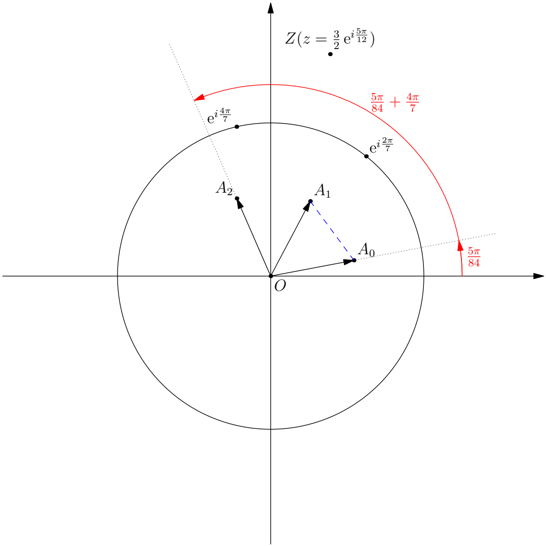
Les autres racines sont obtenue en multipliant a_0 par les six racines 7-*ièmes* de l'unité (différentes de 1) :

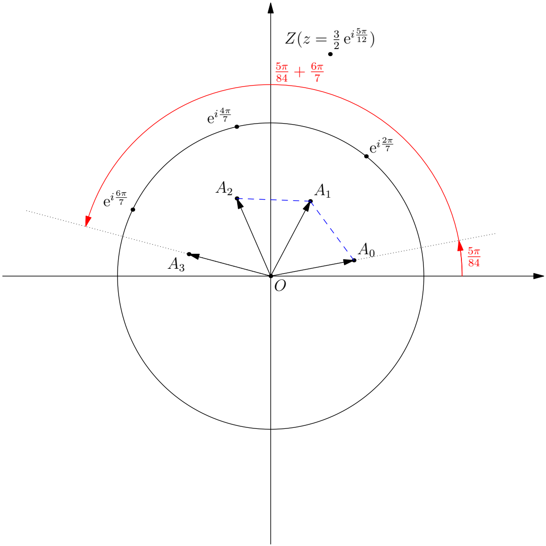
- $a_1 = a_0 e^{i\frac{2\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{2\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{29\pi}{84}}$
- $a_2 = a_0 e^{i\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{4\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{53\pi}{84}}$
- $a_3 = a_0 e^{i\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{6\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{77\pi}{84}}$
- $a_4 = a_0 e^{i\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{101\pi}{84}}$
- $a_5 = a_0 e^{i\frac{10\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{10\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{125\pi}{84}}$
- $a_6 = a_0 e^{i\frac{12\pi}{7}} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{84}+\frac{12\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{\frac{3}{2}} e^{i\frac{149\pi}{84}}$

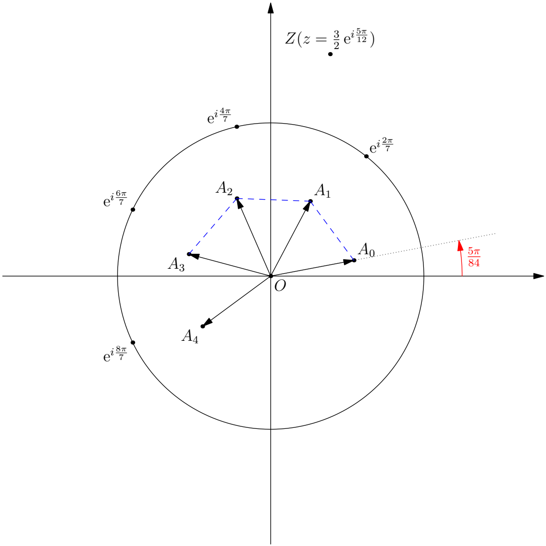

$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
O

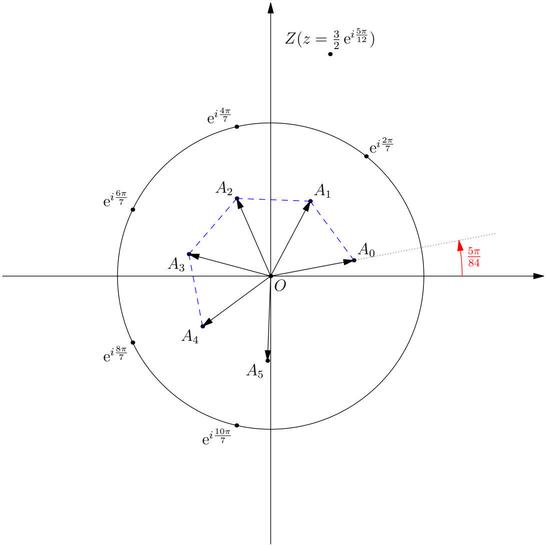

$Z(z = \frac{3}{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\sqrt[7]{\frac{3}{2}}$
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
O


$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
$\frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi}{7}$
A_1
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
O

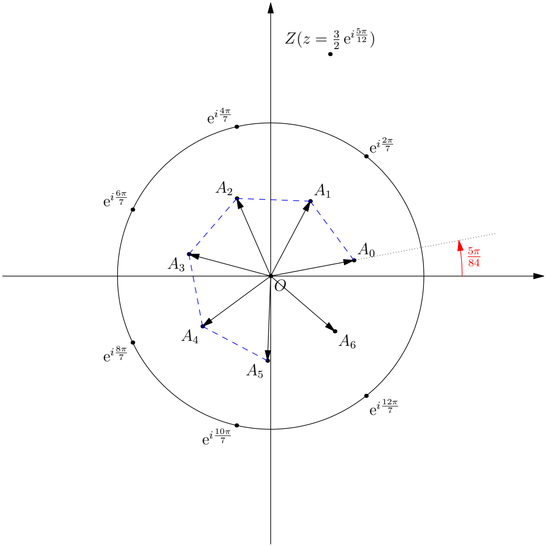

$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7}$
$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
A_2
A_1
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
O

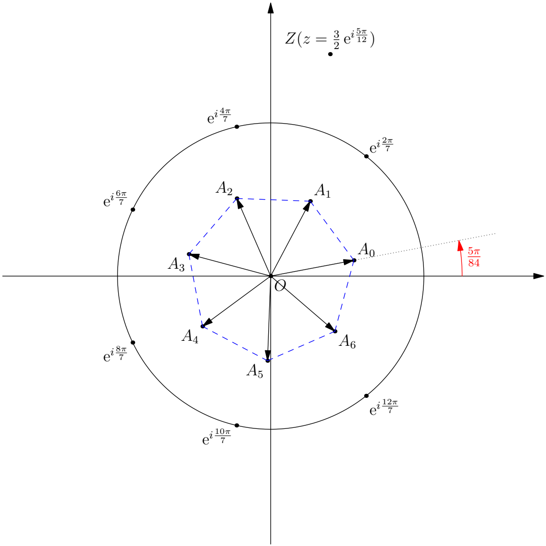

$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\frac{5\pi}{84} + \frac{6\pi}{7}$
$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{7}}$
A_2
A_1
A_0
A_3
$\frac{5\pi}{84}$
O


$Z(z = \frac{3}{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}})$
$e^{i\frac{4\pi}{7}}$
$e^{i\frac{2\pi}{7}}$
$e^{i\frac{6\pi}{7}}$
A_2
A_1
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
A_3
O
A_4
$e^{i\frac{8\pi}{7}}$



$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{7}}$
A_2
A_1
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
A_3
O
A_4
$\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$
A_5
$\mathrm{e}^{i\frac{10\pi}{7}}$


$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{7}}$
A_2
A_1
A_0
$\frac{5\pi}{84}$
A_3
O
A_4
A_6
$\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$
A_5
$\mathrm{e}^{i\frac{12\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{10\pi}{7}}$



$Z(z = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}})$
$\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{10\pi}{7}}$
$\mathrm{e}^{i\frac{12\pi}{7}}$
A_0
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
O
$\frac{5\pi}{84}$

Trigonométrie

Formules d'Euler

Leonhard Euler

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\Re(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

$$\Re(z) = \cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\Im(z) = \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

Transformation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$ en une somme des sinus et cosinus des multiples de θ.

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\cos^3\theta$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$2^3 \cos^3 \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} 2^3 \cos^3 \theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \end{aligned}$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
2^3 \cos^3\theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\
&= (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})
\end{aligned}$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$
\begin{aligned}
2^3 \cos^3\theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\
&= (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= 2\cos 3\theta + 6\cos\theta
\end{aligned}
$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} 2^3\cos^3\theta &= (e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) \\ &= 2\cos 3\theta + 6\cos\theta \end{aligned}$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned} 2^3 \cos^3\theta &= (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ &= 2\cos 3\theta + 6\cos\theta \end{aligned}$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

- On écrit : $2^n \cos^n\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
2^3\cos^3\theta &= (e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3\\
&= e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\\
&= (e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\\
&= 2\cos 3\theta+6\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

- On écrit : $2^n\cos^n\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$
- On développe $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}
2^3\cos^3\theta &= (e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3\\
&= e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\\
&= (e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\\
&= 2\cos 3\theta+6\cos\theta
\end{aligned}$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

- On écrit : $2^n\cos^n\theta=(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$
- On développe $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n$ avec la formule du binôme
- On regroupe chaque $e^{ki\theta}$ avec son conjugué $e^{-ki\theta}$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\sin^3 \theta$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$(2i)^3 \sin^3 \theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3\\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\end{aligned}$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\end{aligned}$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$\begin{aligned}(2i)^3 \sin^3\theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\ &= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\ &= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta\end{aligned}$$

Trigonométrie

Linéarisation des puissances de sinus et cosinus

$$
\begin{aligned}
(2i)^3 \sin^3 \theta &= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3 \\
&= e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta} \\
&= (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= 2i\sin 3\theta - 6i\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta
$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$\cos n\theta = \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$$
$$\sin n\theta = \Im\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\cos 4\theta + i \sin 4\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^4$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i \sin 4\theta &= (\cos\theta + i \sin\theta)^4 \\ &= (\cos\theta)^4 + 4\, i\, (cos\theta)^3 \sin\theta \\ &\quad + 6\, i^2\, (cos\theta)^2 (\sin\theta)^2 + 4\, i^3\, (cos\theta)(\sin\theta)^3 \\ &\quad + i^4\, (\sin\theta)^4\end{aligned}$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= (\cos\theta)^4 + 4\,i\,(cos\theta)^3\sin\theta \\ &\quad + 6\,i^2\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4\,i^3\,(cos\theta)(\sin\theta)^3 \\ &\quad + i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4\\ &= (\cos\theta)^4 + 4i(cos\theta)^3\sin\theta\\ &\quad + 6i^2(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4i^3(cos\theta)(\sin\theta)^3\\ &\quad + i^4(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= (\cos\theta)^4 + 4\,i\,(cos\theta)^3\sin\theta \\ &\quad + 6\,i^2\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4\,i^3\,(cos\theta)(\sin\theta)^3 \\ &\quad + i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

Trigonométrie

Calcul des sinus et cosinus de $n\theta$

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + i\sin 4\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4\\ &= (\cos\theta)^4 + 4\,i\,(cos\theta)^3\sin\theta\\ &\quad + 6\,i^2\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + 4\,i^3\,(cos\theta)(\sin\theta)^3\\ &\quad + i^4\,(\sin\theta)^4\end{aligned}$$

$$\cos 4\theta = (\cos\theta)^4 - 6\,(cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

$$\sin 4\theta = 4\,(cos\theta)^3\sin\theta - 4\,cos\theta(\sin\theta)^3$$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Théorème de d'Alembert

Jean d'Alembert

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Théorème de d'Alembert

Théorème : Tout polynôme non-constant à coefficients complexes a au moins une racine complexe.

Corollaire : Tout polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients complexes, a n racines complexes.