

# Intermède

## Les ensembles de nombres

Comme introduction au chapitre sur les suites qui va suivre, quelques indications et rappels sur les ensembles de nombres que les mathématiques utilisent.

Les ensembles des entiers naturels,  $\mathbb{N}$ , relatifs,  $\mathbb{Z}$ , ou des fractions,  $\mathbb{Q}$ , sont faciles à concevoir de manière intuitive ; tout le monde a en tête ce qu'est un nombre entier naturel : un nombre avec lequel on peut compter des objets, et même un entier relatif : les températures négatives, en hiver, ne posent aucun problème ou les fractions, quand il s'agit, par exemple, de monnaie : les centimes...

Les nombres réels,  $\mathbb{R}$ , sont beaucoup plus difficiles à concevoir : que sont ces nombres — dont tous les précédents font partie — que l'on ne peut nommer autrement que par des symboles de l'arithmétique :  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$  ou par des lettres, éventuellement empruntées à d'autres alphabets :  $\pi, e, \gamma, \dots$

Les suites sont un outil mathématique qui permet de calculer des valeurs approchées des nombres réels avec une erreur aussi petite que l'on veut.

Par exemple, le nombre  $\pi$ , rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, peut être approché en donnant à l'entier  $n$  des valeurs de plus en plus grande dans la somme suivante :  $4 \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$  ; ou  $\sqrt{2}$  peut être calculé par itération de la formule :  $\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$  en partant de la valeur  $x_0 = 1$ .

### Propriétés des nombres réels $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$  contient l'ensemble des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  :  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$  possède une addition et une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication définies sur  $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$  est muni d'un ordre  $\leq$  qui prolonge l'ordre défini sur  $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$  possède la *propriété d'Archimède* :

Si  $A \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$ , il existe un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A < n$

### Combinaison

#### Le binôme de Newton

Pour tous nombres (entiers,..., réels, complexes)  $a$  et  $b$  et tout nombre entier  $n \neq 0$  :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p \cdot b^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 [7\text{pt}] \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3 [7\text{pt}]$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 \cdot b + 15a^4 \cdot b^2 + 20a^3 \cdot b^3 + 15a^2 \cdot b^4 + 6a \cdot b^5 + b^6$$

## 2 Suites

### 2.1 Définitions

Une *suite* est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ccc} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longrightarrow & u_n \end{array}$$

*Remarque :* On note  $u_n$  les éléments de la suite, plutôt que  $u(n)$ ; on « numérote » chaque élément de la suite :  $u_0$  : premier élément,  $u_1$  : deuxième élément, ...,  $u_n$  :  $n+1$ -ième élément, etc.

### Exemples

$$\begin{array}{ll}
 u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, \dots & u_n = n \\
 u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8, \dots & u_n = 2n \\
 u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, u_4 = 9, \dots & u_n = 2n + 1 \\
 u_1 = \frac{1}{1}, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, u_4 = \frac{1}{4}, u_5 = \frac{1}{5}, \dots & u_n = \frac{1}{n} \\
 u_0 = 0, u_1 = \frac{\sin(1)}{2}, u_2 = \frac{\sin(2)}{5}, u_3 = \frac{\sin(3)}{10}, \dots & u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}
 \end{array}$$

### Autre manière de définir une suite

On peut aussi construire une suite en définissant chaque terme à partir du précédent, il faut dans ce cas préciser le premier terme. On appelle cette construction, une suite définie par récurrence :

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{(u_n + 1)(9 - u_n)}{4}$$

Dans cet exemple, on a donné le premier terme,  $u_0 = -\frac{1}{2}$ , et le terme de rang  $n+1$  est alors construit par une formule mathématique à partir du terme de rang  $n$ . On obtient, pour cet exemple, les premières valeurs suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = \frac{(u_0 + 1)(9 - u_0)}{4} = 1,19 & u_7 = \frac{(u_6 + 1)(9 - u_6)}{4} = 5,86 \\
 u_2 = \frac{(u_1 + 1)(9 - u_1)}{4} = 4,27 & u_8 = \frac{(u_7 + 1)(9 - u_7)}{4} = 5,39 \\
 u_3 = \frac{(u_2 + 1)(9 - u_2)}{4} = 6,23 & u_9 = \frac{(u_8 + 1)(9 - u_8)}{4} = 5,77 \\
 u_4 = \frac{(u_3 + 1)(9 - u_3)}{4} = 5,01 & u_{10} = \frac{(u_9 + 1)(9 - u_9)}{4} = 5,47 \\
 u_5 = \frac{(u_4 + 1)(9 - u_4)}{4} = 6 & u_{11} = \frac{(u_{10} + 1)(9 - u_{10})}{4} = 5,71 \\
 u_6 = \frac{(u_5 + 1)(9 - u_5)}{4} = 5,25 & u_{12} = \frac{(u_{11} + 1)(9 - u_{11})}{4} = 5,52
 \end{array}$$

## 2.2 Limite d'une suite

Les suites de nombres réels sont intéressantes si elles permettent de calculer des approximations des nombres ; autrement dit, si elles s'« approchent » aussi près que l'on veut d'un nombre. Cette propriété s'appelle en mathématique, la convergence.

**Définition :** Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $L$  un nombre réel, on dit que

$u_n$  a pour limite  $L$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$

On dit aussi :  $u_n$  converge vers  $L$

Le nombre  $|u_n - L|$  mesure la distance entre le terme  $u_n$  de la suite et le nombre réel  $L$ . Cette définition signifie donc que si une suite converge, à partir d'un rang (le rang  $N$ ), **tous** les nombres de la suite se trouvent à une distance de la limite  $L$ , inférieure à n'importe quel nombre  $\varepsilon$  choisi.

En mathématique, cela s'exprime ainsi :

$$|u_n - L| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

### 2.3 Unicité de la limite

Voici une propriété importante de la limite d'une suite.

**Théorème :** Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $L$ , cette limite est unique

En voici la démonstration. On raisonne par l'absurde : on suppose que la suite converge et qu'elle a deux limites et, en utilisant la définition de la limite d'une suite, on aboutit à une contradiction, ce qui veut dire que l'hypothèse faite — il y a deux limites différentes — est absurde.

- S'il y a 2 limites différentes  $L$  et  $L'$  :  $|L - L'| > 0$
- pour  $0 < \varepsilon < \frac{|L - L'|}{2}$   $\exists N \in \mathbb{N}$  : si  $n \geq N$ ,  $|u_n - L| \leq \varepsilon$  et  $|u_n - L'| \leq \varepsilon$
- $|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|$

Ici, la contradiction obtenue est :  $|L - L'| < |L - L'|$ . Il n'est pas possible qu'un nombre soit **strictement** plus petit que lui-même !

### 2.4 Suites bornées

#### Définitions

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est

- *majorée* si :  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$
- *minorée* si :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$
- *bornée* si :  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq C$

**Proposition :** Une suite convergente est bornée

En effet :

- Pour  $\varepsilon = 1$   $\exists N$  :  $n \geq N, |u_n - L| \leq 1$  puisque la suite est convergente.
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$
- Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à  $N$ , l'ensemble  $\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|\}$  a donc un plus grand élément :  $M = \max_{0 \leq i \leq N-1} |u_i|$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
  - soit :  $n < N$  et :  $|u_n| \leq M$
  - soit :  $n \geq N$  et :  $|u_n| \leq 1 + |L|$
 dans tous les cas :  $|u_n| \leq \max(M, 1 + |L|)$ , donc la suite est bornée.

### 2.5 Suites divergentes

Une suite qui ne converge pas est une suite *divergente*

Exemple :  $u_n = (-1)^n$

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \dots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \dots$$

Montrons que cette suite n'a pas de limite : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a une limite.

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$

– Pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$  :  $|u_n - L| \leq \frac{1}{2}$

– Pour  $n = 2p \geq N$  :  $2 = |u_{2p} - u_{2p+1}| = |u_{2p} - L + L - u_{2p+1}| \leq |u_{2p} - L| + |u_{2p+1} - L| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Conséquence : une suite bornée n'est pas forcément convergente ! La proposition : « Toute suite convergente est bornée » (voir page 3) n'a donc pas de réciproque

Autre exemple :  $u_n = \sqrt{n+1}$

$u_0 = \sqrt{1}$ ,  $u_1 = \sqrt{2}$ ,  $u_2 = \sqrt{3}$ ,  $u_3 = \sqrt{4}$ , ...

On va montrer que  $u_n$  peut dépasser n'importe quel nombre réel.

– Soit  $A \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$

– Par la propriété d'Archimède (voir page 1) :  $\exists N \in \mathbb{N}$  :  $A^2 - 1 \leq N$

– Alors pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N$  :  $A \leq \sqrt{n+1} = u_n$

C'est une manière différente de diverger que pour la suite  $(-1)^n$  : la suite  $\sqrt{n+1}$  peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et n'atteint donc aucune valeur limite.

## Définitions

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, A \geq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \leq u_n$$

Notation :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, A \leq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \geq u_n$$

Notation :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

**Remarque :** L'écriture  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$  est une **notation** commode pour exprimer que les termes d'une suite deviennent plus grands que n'importe quel nombre réel positif ( $+\infty$ ) ou plus petits que n'importe quel nombre réel négatif ( $-\infty$ ). **Il n'existe aucun nombre réel appelé  $+\infty$  ou  $-\infty$  avec lesquels on pourrait faire des calculs !**

## 2.6 Sommes et produits de suites

Il existe des opérations sur les nombres réels, les résultats suivants montrent que les limites des suites sont compatibles avec ces opérations.

**Théorème :** Soit deux suites,  $u_n$  et  $v_n$ , **convergentes**, de limites respectives  $L$  et  $L'$ .

$$1. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n) = \lambda L$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = L \cdot L'$$

$$4. \quad \text{Si } L \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{L}$$

On peut traduire ces résultats en disant que la limite de la somme de deux suites est la somme des limites, que la limite du produit de deux suites est le produit des limites, etc.

La démonstration des résultats 1. et 2. ne posent aucun problème, il suffit d'appliquer la définition de la limite d'une suite aux nouvelles suites  $(\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . C'est un **très bon exercice** que de faire cette démonstration.

### Le coin des curieux

Le résultat 3., la limite d'un produit est égal au produit des limites, est un peu plus difficile à démontrer, on se sert de l'identité :

$$(I) \quad u_n \cdot v_n - L \cdot L' = (u_n - L) \cdot (v_n - L') + L' \cdot (u_n - L) + L \cdot (v_n - L')$$

Comme les suites  $u_n$  et  $v_n$  convergent respectivement vers  $L$  et  $L'$ , on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1 \quad |u_n - L| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2 \quad |v_n - L'| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

L'identité (I) permet alors d'écrire :

$$|u_n \cdot v_n - L \cdot L'| \leq |u_n - L| \cdot |v_n - L'| + |L'| \cdot |u_n - L| + |L| \cdot |v_n - L'| \leq \varepsilon + |L'| \cdot \sqrt{\varepsilon} + |L| \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

Les nombres  $|L|$  et  $|L'|$  étant des nombres réels fixes, la dernière inégalité montre que la distance de  $u_n \cdot v_n$  à  $L \cdot L'$  peut être rendue aussi petite que l'on veut, dès que le rang  $N \geq \max(N_1, N_2)$ .

La suite  $(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $L \cdot L'$ .

Le résultat 4. peut se démontrer comme suit : puisque la suite  $u_n$  converge vers  $L \neq 0$ , on peut écrire :

$$1. \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |u_n - L| < \frac{|L|}{2}. \quad \text{Donc : } |u_n| > \frac{|L|}{2}$$

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad N_2 \geq N_1 : \quad n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |u_n - L| < \frac{|L|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

D'où, pour  $n \geq N_2$  :

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{u_n - L}{u_n \cdot L} \right| \leq \frac{2}{|L|^2} \cdot |u_n - L| \leq \varepsilon$$

**Remarque :** un point de cette démonstration prouve que si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite non-nulle, alors à partir d'un certain rang **tous** les termes de la suite sont non-nuls. Lequel ?

Cette remarque justifie le fait que supposer que les termes de la suite sont non-nuls pour écrire : « Si  $L \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{L}$  » n'est pas nécessaire.

## 2.7 Comparaison de suites

On vient de voir que la notion de limite était compatible avec les opérations définies sur  $\mathbb{R}$ , elle est également compatible avec l'ordre défini sur les réels : si tous les termes d'une suite sont inférieurs à tous les termes d'une autre suite et si ces suites convergent, les limites sont classées dans le même ordre. Ceci va nous permettre de donner de nouveaux critères pour étudier la convergence des suites.

**Proposition :** Soit 2 suites,  $u_n$  et  $v_n$ , telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
- $u_n$  et  $v_n$  convergent

Alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

*Démonstration.* Par définition :  $u_n \leq v_n \Leftrightarrow v_n - u_n \geq 0$

Cela revient à montrer que si une suite a tous ses termes positifs, sa limite est positive. Démontrons le par l'absurde en supposant qu'une suite  $u_n$ , avec  $u_n \geq 0$ , converge vers une limite  $L < 0$ .

Si  $L < 0$ , alors  $-L > 0$ . Choisissons  $\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$  et écrivons que la suite converge vers  $L$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} : |u_n - L| \leq \varepsilon = -\frac{L}{2}$$

On a alors, pour tout  $n \geq N$  :  $\frac{L}{2} \leq u_n - L \leq -\frac{L}{2} \Rightarrow u_n \leq \frac{L}{2} < 0$

Ce qui est contraire à l'hypothèse :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ . □

Conséquence : si  $u_n$  converge et si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq a$

**Remarque :** même si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > a$ , on ne peut conclure que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq a$  comme le montre l'exemple suivant :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} > 0$ , mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

### Le théorème dit « des gendarmes »

Soit 3 suites,  $u_n, v_n$  et  $w_n$ .

- si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
- si  $u_n$  et  $w_n$  convergent
- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

Alors :

1.  $v_n$  converge
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

**Remarque :** les trois hypothèses doivent être vérifiées à la fois ; si l'une d'entre elles manque, la conclusion peut être fausse.

Exemple :  $u_n = -2 - \frac{1}{n}, v_n = (-1)^n, w_n = 2 + \frac{1}{n}$

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n$  et  $w_n$  convergent :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 2$
- mais :  $v_n$  ne converge pas !

*Démonstration.* Puisque les suites  $u_n$  et  $w_n$  convergent vers la même limite  $L$ , on peut écrire :  $\forall \varepsilon > 0$  :

1.  $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1, L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$
2.  $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2, L - \varepsilon \leq w_n \leq L + \varepsilon$

Donc : si  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , on a les deux à la fois et, comme  $v_n$  est encadré par  $u_n$  et  $w_n$ , on a le classement :

$$L - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq L + \varepsilon$$

Ce qui veut dire que la limite de  $v_n$  est  $L$ . □

**Voici un exemple d'utilisation du théorème « des gendarmes »**

Soit la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Nous allons montrer que cette suite converge en l'encadrant par deux suites dont les limites, égales, sont faciles à trouver.

La difficulté de cette suite vient du fait que nous avons une somme de termes qui augmente avec  $n$  ; à la limite, cette somme aura une infinité de termes... or nous ne savons calculer que des sommes qui ont un nombre fini de termes !

$$v_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+\sqrt{1}}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

$$v_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3+\sqrt{1}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}$$

$$v_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4+\sqrt{4}}$$

etc .....

On peut, très facilement, encadrer les dénominateurs des fractions :

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$$

Tous ces nombres sont positifs, donc si on prend leurs inverses, on change le sens des inégalités :

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad \frac{1}{n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n + \sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

On va maintenant écrire, ligne par ligne, tous ces encadrements pour  $k$  variant de 0 à  $n$  :

$$n+1 \text{ lignes} \quad \left\{ \begin{array}{lllll} k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k=n & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

Si on additionne toutes ces inégalités, on obtient :

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n}$$

Donc la suite  $v_n$  est encadrée entre deux suites  $u_n$  et  $w_n$  :

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$$

En simplifiant par  $n$  les suites  $u_n$  et  $w_n$ , on peut écrire :

$$u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad \text{donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

$$w_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$$

Toutes les hypothèses du théorème « des gendarmes » sont alors satisfaites, on peut conclure que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$

## 2.8 Valeurs absolues

**Proposition :** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |L|$

La démonstration repose sur l'inégalité triangulaire :  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , on a :  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

On a supposé que la suite convergeait vers  $L$ , on peut donc écrire, par définition de la limite d'une suite et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \quad ||u_n| - |L|| \leq |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Ce qui veut dire que la suite  $|u_n|$  converge vers  $|L|$ .

Remarque : cette proposition n'admet pas de réciproque ; si la suite  $|u_n|$  converge, la suite  $u_n$  peut ne pas converger, comme le montre l'exemple de la suite  $(-1)^n$  dont la valeur absolue est constante, et donc convergente, alors que la suite ne converge pas.

Cette proposition trouve son application dans le théorème suivant :

**Théorème :** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite *bornée* et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite qui *converge vers 0*, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = 0$

1.  $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$  Puisque la suite  $u_n$  est bornée.
2.  $0 \leq |u_n \cdot v_n| \leq M \cdot |v_n|$  D'après 1.
3. Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n| = 0$  et donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n \cdot v_n| = 0$  Ce qui veut dire :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = 0$

## 2.9 Suites arithmétiques

**Définition :** Soit  $a$  et  $r$  deux nombres réels, la suite  $u_n = a + nr$  s'appelle une *suite arithmétique* de terme initial  $a$  et de *raison*  $r$ .

### Convergence d'une suite arithmétique

**Proposition :** Si  $r > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$   
 Si  $r < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$   
 Si  $r = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$

- Soit  $A \in \mathbb{R}$ ,  $A > 0$ , par la propriété d'Archimède,  $\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{A-a}{r}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n = a + nr \geq A$   
 $u_n$  peut dépasser tout nombre réel positif, c'est la définition de  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

La première proposition est donc établie.

La deuxième se déduit de la première en changeant  $r$  en  $-r$  et donc le sens des inégalités.

La troisième proposition, si  $r = 0$ , est évidente : dans ce cas, une suite arithmétique est constante.

### Somme des termes d'une suite arithmétique

**Proposition :** Soit  $u_n = a + nr$  une suite arithmétique de terme initial  $a$  et de raison  $r$ . Alors :

$$S = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n a + kr = \frac{(n+1)(2a + nr)}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= a + a+r + a+2r + \cdots + a+(n-1)r + a+nr \\ S &= a+nr + a+(n-1)r + a+(n-2)r + \cdots + a+r + a \end{aligned}$$

En faisant la somme des deux lignes précédentes, on obtient :

$$2S = 2a + nr + 2a + nr + 2a + nr + \cdots + 2a + nr + 2a + nr$$



$$\text{Donc : } 2S = (n+1)(2a + nr)$$

## 2.10 Suites géométriques

**Définition :** Soit  $a \in \mathbb{R}$  on appelle suite géométrique de raison  $a$ , la suite  $u_n$  définie par :  $u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### Convergence d'une suite géométrique

**Théorème :**

1. Si  $a > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$
2. Si  $|a| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$
3. Si  $a = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$
4. Si  $a \leq -1$ ,  $a^n$  n'est pas convergente

**Démonstration:**

1. Si  $a > 1$ ,  $a = 1 + h$ ,  $h > 0$

Donc, par la formule du binôme, on peut écrire :

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

2. Si  $a \neq 0$ ,  $\frac{1}{|a|} > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a|^n} = +\infty$  d'après 1. Donc :  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$

$$\text{Si } a = 0, \quad a^n = 0 : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$$

3. La suite est constante, égale à 1

4. Si  $a < -1$ ,  $|a| > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = +\infty$ , d'après 1. La suite n'est pas bornée et ne peut donc converger.

$$\text{Si } a = -1, \quad a^n = (-1)^n \text{ diverge.}$$

### Somme des termes d'une suite géométrique

**Proposition :** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .  $S = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \\ S.a & = & a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} \end{array}$$

En faisant la différence des deux lignes précédentes, on obtient :

$$S - S.a = 1 - a^{n+1}$$

$$\text{D'où : } S = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{En particulier, si } |a| < 1, \text{ on a : } S = \frac{1}{1-a}$$

**Application des suites géométrique : Suites  $u_n$  telles que :**  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \alpha < 1$

**Proposition :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ , et  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \alpha$

Alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

**Démonstration :**

$$1. \left| \frac{u_n}{u_0} \right| = \left| \frac{u_1}{u_0} \right| \left| \frac{u_2}{u_1} \right| \left| \frac{u_3}{u_2} \right| \dots \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \prod_{k=1}^n \left| \frac{u_k}{u_{k-1}} \right| < \alpha^n$$

$$2. \text{ On en déduit : } |u_n| < \alpha^n |u_0|$$

$$3. \text{ Puisque } \alpha < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \text{Donc, d'après 2.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

**Application des suites géométrique :**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

**Proposition :** Pour tout réel  $a$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

**Démonstration :**

On suppose  $a \neq 0$ , sinon la proposition est évidente !

On va se ramener à l'exemple précédent.

$$- \text{ On calcule le rapport de deux termes consécutifs : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

$$- \text{ Par la propriété d'Archimède : } \exists N \in \mathbb{N} : N > 2|a|$$

- On majore la valeur absolue du rapport calculé en 1. ; on utilise pour cela, une propriété évidente des fractions : quand on diminue le dénominateur d'une fraction sa valeur augmente.

$$\text{Pour } n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$$

- On calcule maintenant le rapport entre le terme de rang  $n$  et le terme de rang  $N \leq n$  et on utilise la majoration du rapport de deux termes consécutifs trouvée en 3.

$$\left| \frac{u_n}{u_N} \right| = \left| \frac{u_{N+1}}{u_N} \right| \left| \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \right| \dots \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \prod_{k=N+1}^n \left| \frac{u_k}{u_{k-1}} \right| < \left( \frac{1}{2} \right)^{n-N} = \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot 2^N$$

$$- \text{ Finalement : } |u_n| < \left( \frac{1}{2} \right)^n \cdot 2^N \cdot |u_N|$$

- Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0$  (voir la proposition sur les suites géométriques) :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  puisque  $|u_N|$  est un nombre fixe.

## 2.11 Suites monotones

Certaines propriétés des suites permettent de trouver des critères de convergence ; c'est le cas pour les suites dont la valeur des termes augmente — suites croissantes — ou diminue — suites décroissantes — : les suites monotones.

**Définition :** On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- *croissante* si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$

- *décroissante* si :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$

Pour étudier la croissance (ou la décroissance) d'une suite, on calcule  $u_{n+1} - u_n$  et on étudie le signe de la différence.

**Exemple :** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= (\ln(n+2) - \ln(n+1)) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
 &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) < 0 \quad u_n \text{ est décroissante.}$$

**Autre possibilité :** Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , pour étudier la croissance de  $u_n$ , on peut calculer :  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , la suite est croissante
- si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ , la suite est décroissante

**Exemple :** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}} \\
 &= \frac{n+1}{n} e^{\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}} \\
 &= \frac{n+1}{n} e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1
 \end{aligned}$$

La suite  $u_n$  est donc croissante.

**Théorème :** Une suite *croissante et majorée* converge.  
Une suite *décroissante et minorée* converge.

**Démonstration:**

Montrons, par exemple, qu'une suite croissante et majorée converge.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante et  $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

1.  $A \neq \emptyset$  puisque la suite existe !
2. La suite est majorée, donc  $A$  est majorée ;  $A \subset \mathbb{R}$  donc  $A$  admet une borne supérieure  $L$ .

RAPPEL : Les nombres réels, bornes 

3. Par définition de la borne supérieure, on a :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < u_N \leq L$
4. La suite est croissante, on a donc le classement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L \leq L + \varepsilon \quad \text{C'est-à-dire : pour } n \geq N : |u_n - L| \leq \varepsilon$$

La suite  $u_n$  a donc pour limite  $L$ .

**Exercice :** Imiter la démonstration ci-dessus pour montrer la deuxième assertion du théorème : toute suite décroissante et minorée converge.

**Exemple :** Étudier la suite :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ . On montrera qu'elle est croissante et majorée et on conclura qu'elle converge.

Voici les premiers termes de cette suite :

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$u_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

$$u_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

.....

On notera que le nombre de termes de la somme augmente de un à chaque nouvelle valeur de  $n$ .

Montrons que la suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad u_n \text{ est donc croissante.}$$

Montrons que cette suite est majorée ; pour cela on va d'abord montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

**Attention :** Ceci n'est pas une majoration de la suite ! Majorer un ensemble de nombres — les termes de la suite —, veut dire trouver un nombre **fixe** supérieur à tous les nombres de l'ensemble et ici le nombre  $2 - \frac{1}{n}$  change avec  $n$ , ce n'est pas le même pour tous les termes de la suite.

On va utiliser un raisonnement par récurrence.

1. vrai pour  $n = 1$  :  $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
2. supposons que pour  $1 \leq k \leq n \quad u_k \leq 2 - \frac{1}{k}$  (hypothèse de récurrence)
3.  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$  et, en appliquant l'hypothèse de récurrence :  $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
4. Or on a :  $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
5. On en déduit :  $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$  L'hypothèse de récurrence est encore vérifiée au rang  $n+1$ , elle est donc vraie pour tout entier  $n$ .

Maintenant, puisque pour tout  $n$ , on a :  $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ , comme  $\frac{1}{n}$  est positif, on a :  $u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ . La suite est donc majorée par 2 ; comme on a montré qu'elle est croissante, le théorème « toute suite croissante et majorée converge » permet de conclure que cette suite est convergente.

**Remarque :** on ne cherchera pas à calculer la limite de cette suite ! On sait seulement qu'elle existe.

## 2.12 Suites adjacentes

**Théorème et définition :** Soit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

1.  $u_n$  est croissante et  $v_n$  est décroissante
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$

Alors :

1. les deux suites  $u_n$  et  $v_n$  convergent
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Deux suites qui vérifient ces hypothèses sont dites *adjacentes*

**Démonstration:**

– On a le classement :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

- $u_n$  est majorée par  $v_0$ , comme elle est croissante, elle converge vers  $L$
- $v_n$  est minorée par  $u_0$ , comme elle est décroissante, elle converge vers  $L'$
- On peut alors écrire :

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq L \leq L' \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |L - L'| \leq |v_n - u_n| \leq \varepsilon$

On conclut alors :  $L = L'$

**Exemple :** Montrer que les suites  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ,  $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$  sont adjacentes.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \quad u_n$  est donc croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)!(n+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

$v_n$  est décroissante

- $v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \geq 0$  donc :  $v_n \geq u_n$  et  $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ces deux suites sont donc adjacentes, elles sont donc convergentes et ont même limite. Ici non plus on ne cherchera pas à calculer la limite.

## 2.13 Suites extraites

**Définition :** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  une application *strictement croissante*.

On appelle suite extraite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :  $v_n = u_{\varphi(n)}$

**Commentaire :** dire que l'application  $\varphi$  est strictement croissante, signifie que si  $n > m$ , alors  $\varphi(n) > \varphi(m)$ . Donc pour construire une suite extraite d'une suite donnée, on choisit certains termes de la suite — ceux de rang  $\varphi(n)$  — sans jamais revenir en arrière.

**Exemples :** Étant donnée une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire de celle-ci :

- La suite des termes de rang pair :  $v_n = u_{2n} \quad (\varphi(n) = 2n)$
- La suite des termes de rang impair :  $w_n = u_{2n+1} \quad (\varphi(n) = 2n+1)$
- La suite des termes de rang multiple de 3 :  $a_n = u_{3n} \quad (\varphi(n) = 3n)$

On peut, bien sûr, imaginer des situations plus compliquées...

**Proposition :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $L$ .

Toute suite  $v_n$  extraite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la même limite  $L$ .

## Le coin des curieux

### Démonstration:

On va d'abord montrer par récurrence que si  $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  est une application strictement croissante, alors :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geq n$

1. C'est évidemment vrai pour 0 : l'application étant strictement croissante et 0 étant le plus petit entier naturel on a  $\varphi(0) \geq 0$
2. Hypothèse de récurrence :  $\forall k, \quad 0 \leq k \leq n \quad \varphi(k) \geq k$
3. Montrons que  $\varphi(n+1) \geq n+1$  : Puisque  $n+1 > n$  et que  $\varphi$  est strictement croissante :  $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$  (la dernière inégalité étant l'hypothèse de récurrence)
4. On en déduit que  $\varphi(n+1) \geq n+1$

Maintenant, la suite  $u_n$  est convergente de limite  $L$ , on peut donc écrire :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq N \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Si  $n \geq N$  on a :  $\varphi(n) \geq n \geq N$ , on en conclut que :  $|u_{\varphi(n)} - L| \leq \varepsilon$ .

La suite extraite  $u_{\varphi(n)}$  converge donc vers  $L$ .

La réciproque de cette proposition est fautive : des suites extraites d'une suite peuvent converger sans que la suite converge comme le montre l'exemple de la suite  $u_n = (-1)^n$  :

- On a :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} = 1$  La suite extraite formée des termes de rang pair est constante et donc convergente.
- On a :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n+1} = -1$  La suite extraite formée des termes de rang impair est constante et donc convergente.

Mais la suite  $u_n$  ne converge pas.

Cependant on a la proposition suivante :

**Proposition :** Soit  $u_n$  une suite ; on pose  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = L$$

### Démonstration:

On vient de voir, dans la proposition précédente, que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = L$

Pour établir l'équivalence, il faut montrer l'implication inverse.

On suppose donc que  $v_n$  et  $w_n$  convergent vers la même limite  $L$ . On peut écrire :

$$\forall \varepsilon, \exists N : \quad \forall n \geq N, \quad |v_n - L| \leq \varepsilon, \text{ et } |w_n - L| \leq \varepsilon$$

Soit  $n > 2N$  :

- Si  $n$  est pair,  $n = 2p$  alors  $p > N$  donc :  $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$
- Si  $n$  est impair,  $n = 2p + 1$  alors on a aussi  $p > N$ , donc :  $|u_n - L| \leq \varepsilon$

Un entier étant soit pair, soit impair, on a écrit que la suite  $u_n$  convergeait vers  $L$ .

### Exercices :

1. Soit  $u_n$  une suite et  $x_n = u_{2n}$ ,  $y_n = u_{2n+1}$ ,  $z_n = u_{3n}$  3 suites extraites de  $u_n$ . Montrer que si ces 3 suites sont convergentes, alors  $u_n$  est convergente. (Indication : réfléchir sur la parité des multiples de 3)
2. Soit  $u_n$  une suite telle que pour  $k \in \mathbb{N}$  les suites extraites  $u_{kn}$  soient convergentes. Peut-on dire que  $u_n$  est convergente ? (Indication : pensez qu'il existe des nombres premiers...)

## 2.14 Suites récurrentes

On appelle suites récurrentes, des suites dont les termes sont définis en fonction d'un, ou de plusieurs, termes précédents ; pour pouvoir commencer le processus, il faut alors donner le premier terme, si les termes sont définis chacun en fonction du précédent, ou les premiers termes, si plusieurs termes précédents entrent dans la définition du terme générique.

Plus précisément :

**Définition :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$  :

$$f : I \mapsto \mathbb{R}$$

Une suite *récurrente* est définie

1. par son *terme initial* :  $u_0$
2. et par son terme général :  $u_{n+1} = f(u_n)$ , défini en fonction du précédent.

**Exemples :**

**Suite arithmétique.** Une suite arithmétique, de terme initial  $a$  et de raison  $r$ , peut être définie par :

1.  $u_0 = a$
2.  $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  associée est alors :  $f(x) = x + r$

Il s'agit bien de la suite arithmétique définie précédemment :

**Proposition :**  $u_n = a + nr$

**Démonstration:**

La démonstration se fait par récurrence, outil privilégié de ce type de suite !

1. Pour  $n = 1$ ,  $u_1 = u_0 + r = a + r$  C'est donc vrai pour  $n = 1$
2. Hypothèse de récurrence : supposons que pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $u_k = a + kr$
3. Calculons  $u_{n+1} = u_n + r = (a + nr) + r = a + (n + 1)r$

On retrouve bien la définition de la suite arithmétique.

**Suite géométrique.** Une suite géométrique, de terme initial  $a$  et de raison  $q$ , est définie par :

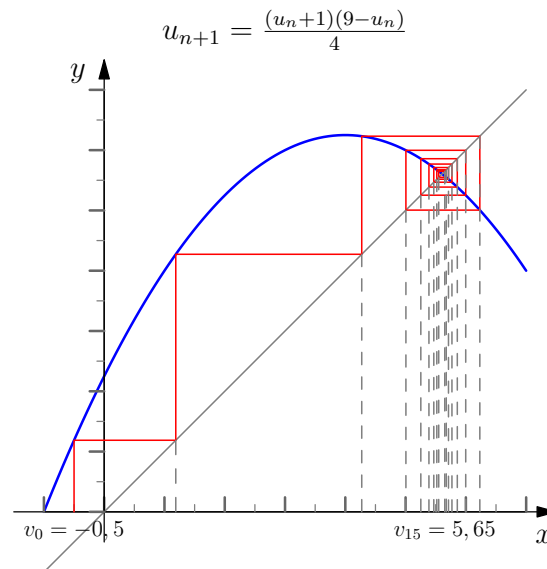
1.  $u_0 = a$
2.  $u_{n+1} = u_n \cdot q$

La fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  associée est alors :  $f(x) = x \cdot q$

**Proposition :**  $u_n = a \cdot q^n$

**Démonstration:**

1. Pour  $n = 1$ ,  $u_1 = u_0 \cdot q = a \cdot q$  C'est donc vrai pour le premier terme.
2. Hypothèse de récurrence : supposons que pour  $1 \leq k \leq n$ ,  $u_k = a \cdot q^k$
3. Calculons  $u_{n+1} = u_n \cdot q = (a \cdot q^n) \cdot q = a \cdot q^{n+1}$

**Contruction géométrique d'une suite récurrente.**

Certaines propriétés de la fonction  $f$  qui sert à la définition des termes de la suite, permettent de simplifier l'étude d'une suite récurrente.

**Définition :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est croissante si :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

**Proposition :** Soit une  $u_n$  une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{avec } f \text{ croissante.}$$

Alors :

1. Si  $u_1 \geq u_0$ , alors la suite  $u_n$  est croissante
2. Si  $u_1 \leq u_0$ , alors la suite  $u_n$  est décroissante
3. Si  $u_1 = u_0$ , alors la suite  $u_n$  est constante

**Remarque :** On fera bien attention, si on veut utiliser cette proposition, à montrer que la fonction  $f$ , qui définit la suite, est croissante et ne pas se contenter de comparer les deux premiers nombres d'un ensemble qui en compte une infinité pour conclure que tous les nombres sont classés comme les deux premiers !

**Démonstration:**

La démonstration se fait par récurrence. Démontrons la première assertion en supposant que  $f$  est croissante et que  $u_1 \geq u_0$ .

1. La proposition est vraie pour  $n = 1$
2. Supposons que pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $u_k \geq u_{k-1}$  (hypothèse de récurrence)
3. La fonction  $f$  est croissante, donc :  $u_n \geq u_{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n$

**Théorème :** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $u_n$  une suite définie par récurrence par :  $u_0$ , et  $u_{n+1} = f(u_n)$

Alors :

1. Si  $u_n$  est convergente vers  $L \in I$
2. Si  $f$  est continue  
 $L$  vérifie :  $f(L) = L$

La démonstration de ce théorème sera donnée dans le chapitre sur les fonctions.