Intermède

Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$

Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$

Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$
- Les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0\}$$

Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$
- Les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0\}$$
- Les nombres réels :
$$\mathbb{R}$$

Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$
- Les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0\}$$
- Les nombres réels :
$$\mathbb{R}$$
- Les nombres complexes :
$$\mathbb{C} = \{a + i.b \quad | \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

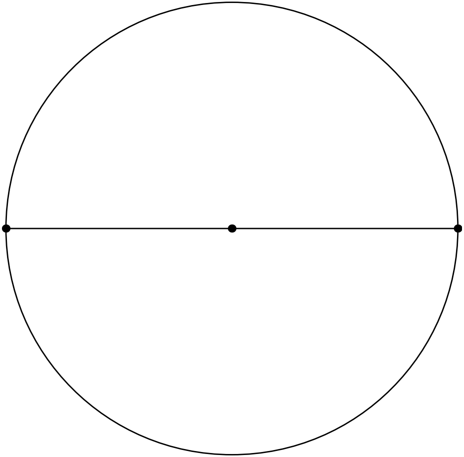
Les ensembles de nombres utilisés en mathématiques sont :

- Les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$$
- Les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, n \cdots\}$$
- Les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \quad | \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \neq 0\}$$
- Les nombres réels :
$$\mathbb{R}$$
- Les nombres complexes :
$$\mathbb{C} = \{a + i.b \quad | \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

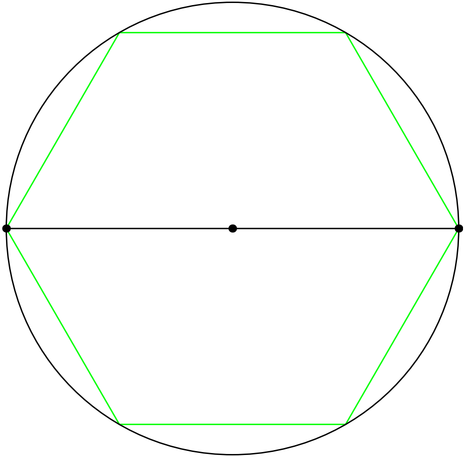
π

$$\pi = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{diamètre du cercle}}$$



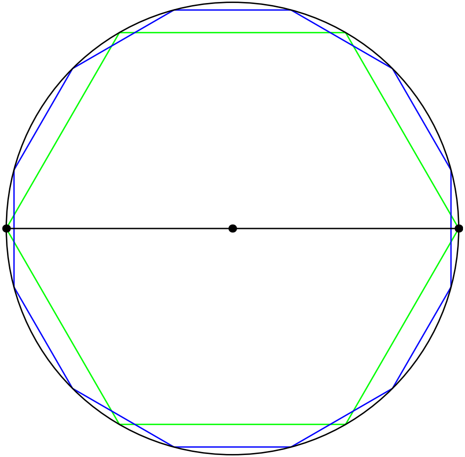
π

$$\pi = \frac{\text{périmètre de l'hexagone}}{\text{diamètre du cercle}} = 3$$



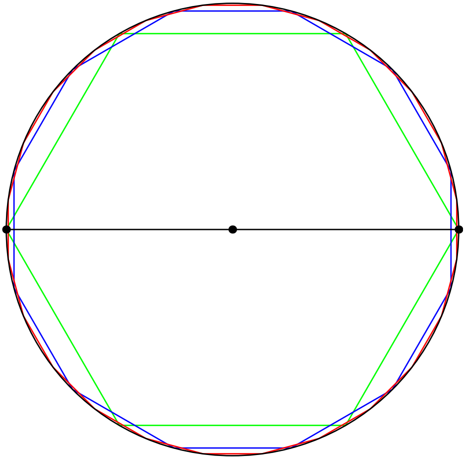
π

$$\pi = \frac{\text{périmètre du dodécagone}}{\text{diamètre du cercle}} = 3{,}105\,828\,541$$



π

$$\pi = \frac{\text{périmètre pour 24 côtés}}{\text{diamètre du cercle}} = 3,132\,628\,613$$



π

$\pi =$ 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 -
169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 -
628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 -
844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 -
701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 -
975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 -
145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 -
249 141 273 724 587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 -
829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 -
466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 -
953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 -
962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 -
833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 -
702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 -
818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 . . .

Les nombres réels

On admet qu'il existe un ensemble de nombres $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$: $\quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Les nombres réels

On admet qu'il existe un ensemble de nombres $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ possède une addition et une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{Q}$

Les nombres réels

On admet qu'il existe un ensemble de nombres $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est muni d'un ordre $\leq$ qui prolonge l'ordre défini sur $\mathbb{Q}$

Les nombres réels

On admet qu'il existe un ensemble de nombres $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède :

Si $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $A < n$

Les suites

- Définitions
- Limite d'une suite
- Unicité de la limite
- Suites bornées
- Suites divergentes
- Sommes et produits de suites
- Comparaison de suites
- Valeurs absolues
- Suites arithmétiques
- Suites géométriques
- Suites monotones
- Suites adjacentes
- Suites extraites
- Suites récurrentes

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots \qquad u_n = n$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots$ $\qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \ldots$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots \qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \ldots \qquad u_n = 2n$

$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \ldots$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$$

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n + 1$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \ldots \qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \ldots \qquad u_n = 2n$

$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \ldots \qquad u_n = 2n + 1$

$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \ldots$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$$

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n+1$$

$$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \dots \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$$

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n+1$$

$$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \dots \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sin(1)}{2},\ u_2 = \frac{\sin(2)}{5},\ u_3 = \frac{\sin(3)}{10},\ \dots$$

Une suite de nombres réels est un ensemble de nombres réels numérotés.

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 4,\ \dots \qquad u_n = n$

$u_0 = 0,\ u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6,\ u_4 = 8,\ \dots \qquad u_n = 2n$

$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,\ u_4 = 9,\ \dots \qquad u_n = 2n+1$

$u_1 = \frac{1}{1},\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3},\ u_4 = \frac{1}{4},\ u_5 = \frac{1}{5},\ \dots \qquad u_n = \frac{1}{n}$

$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{\sin(1)}{2},\ u_2 = \frac{\sin(2)}{5},\ u_3 = \frac{\sin(3)}{10},\ \dots \qquad u_n = \frac{\sin(n)}{n^2+1}$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \rightarrow & u_n \end{array}$$

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \rightarrow & u_n \end{array}$$

Remarque : On note u_n les éléments de la suite, plutôt que $u(n)$; on « numérote » chaque élément de la suite : u_0 : premier élément, u_1 : deuxième élément, ..., u_n : $n+1$-ième élément, etc.

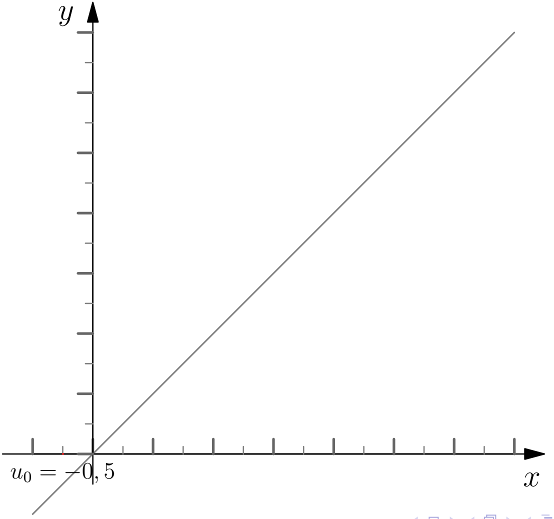
$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{(u_n + 1)(9 - u_n)}{4}$$

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$$

$u_1 = \frac{(u_0+1)(9-u_0)}{4} = 1,19$	$u_7 = \frac{(u_6+1)(9-u_6)}{4} = 5,86$
$u_2 = \frac{(u_1+1)(9-u_1)}{4} = 4,27$	$u_8 = \frac{(u_7+1)(9-u_7)}{4} = 5,39$
$u_3 = \frac{(u_2+1)(9-u_2)}{4} = 6.23$	$u_9 = \frac{(u_8+1)(9-u_8)}{4} = 5,77$
$u_4 = \frac{(u_3+1)(9-u_3)}{4} = 5,01$	$u_{10} = \frac{(u_9+1)(9-u_9)}{4} = 5,47$
$u_5 = \frac{(u_4+1)(9-u_4)}{4} = 6$	$u_{11} = \frac{(u_{10}+1)(9-u_{10})}{4} = 5,71$
$u_6 = \frac{(u_5+1)(9-u_5)}{4} = 5,25$	$u_{12} = \frac{(u_{11}+1)(9-u_{11})}{4} = 5,52$

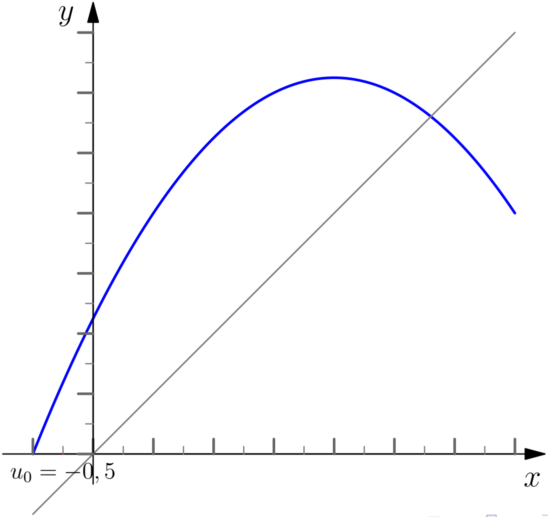
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$$



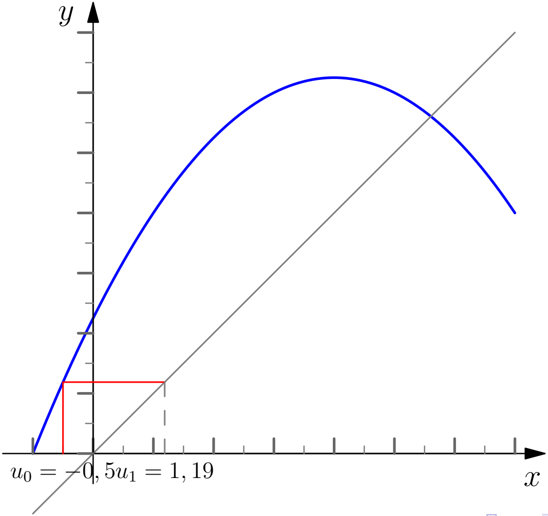
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



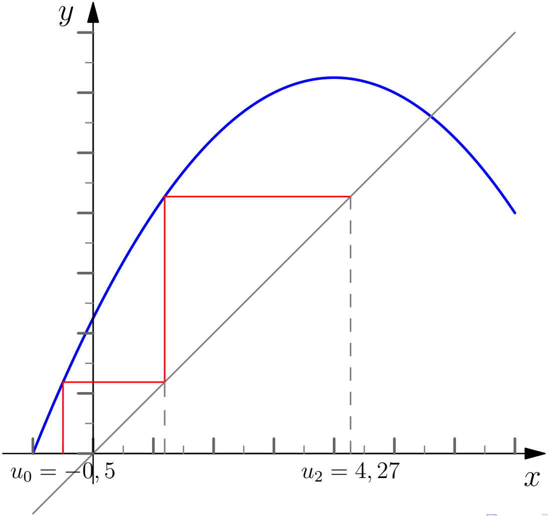
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



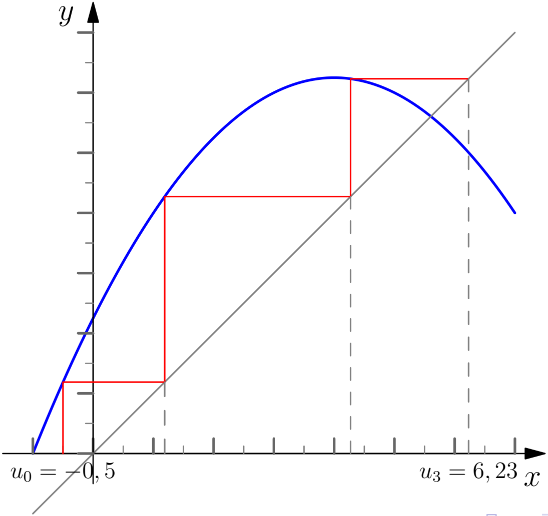
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



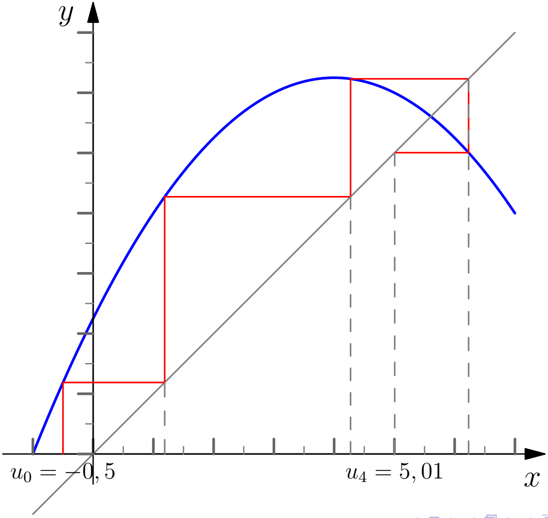
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



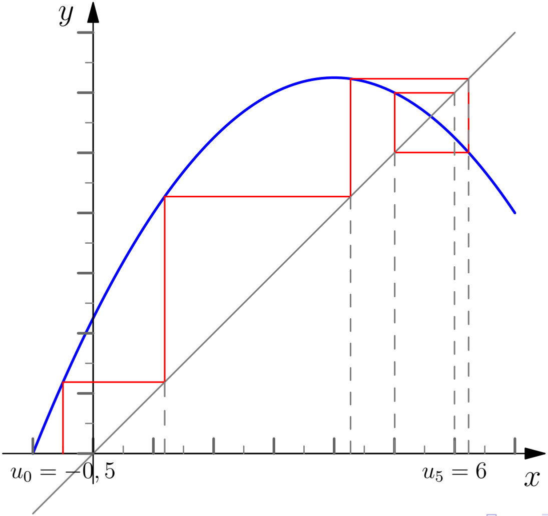
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



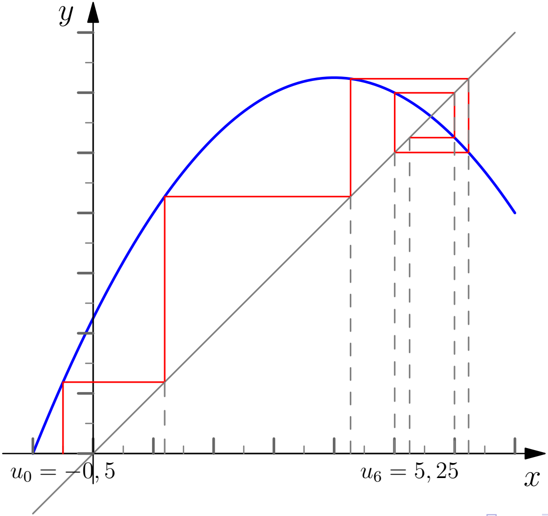
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



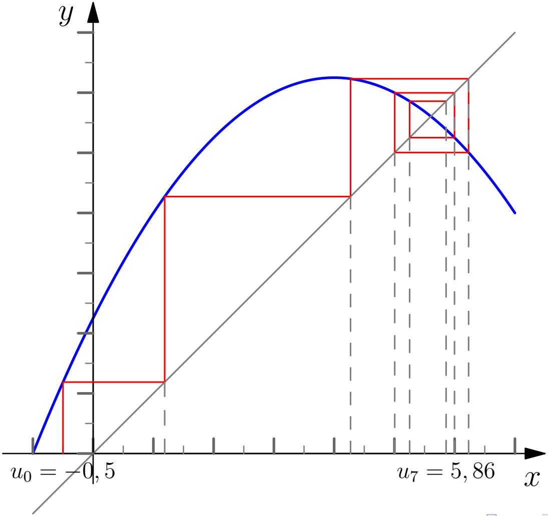
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



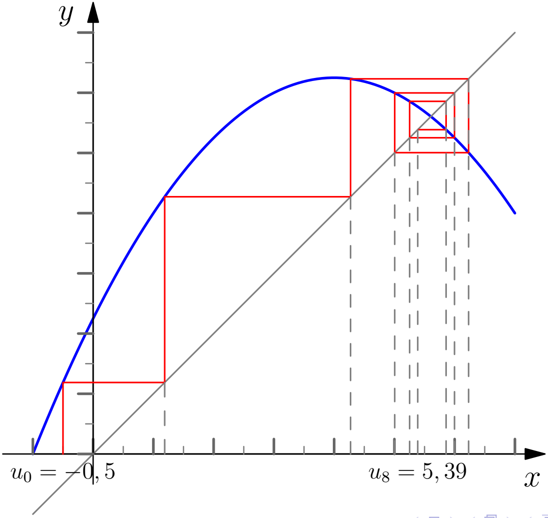
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



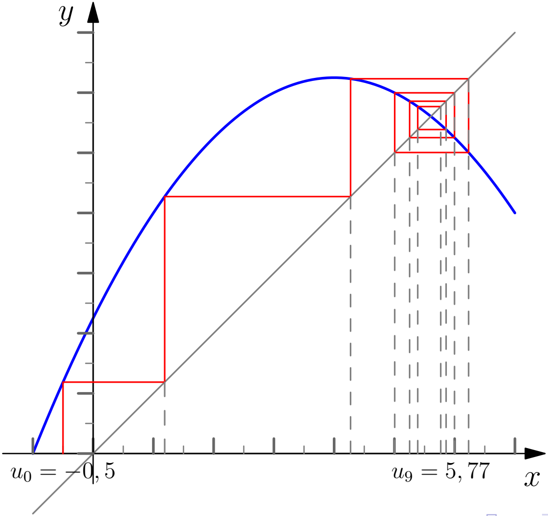
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



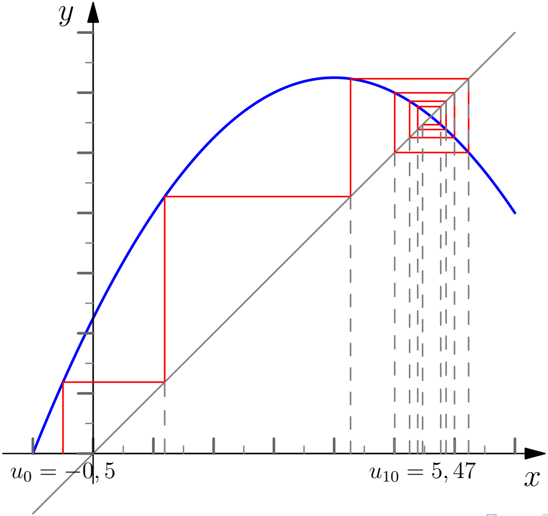
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



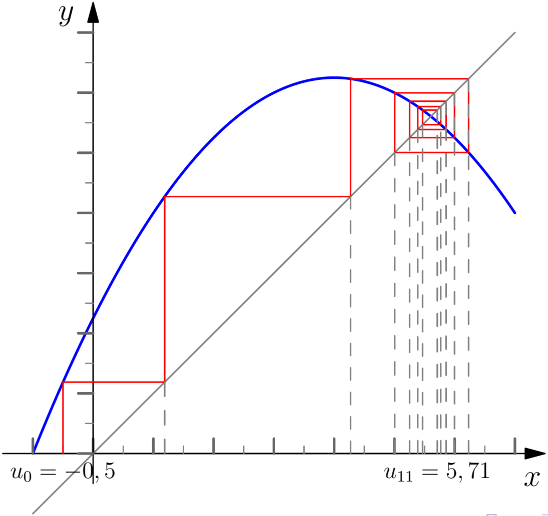
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



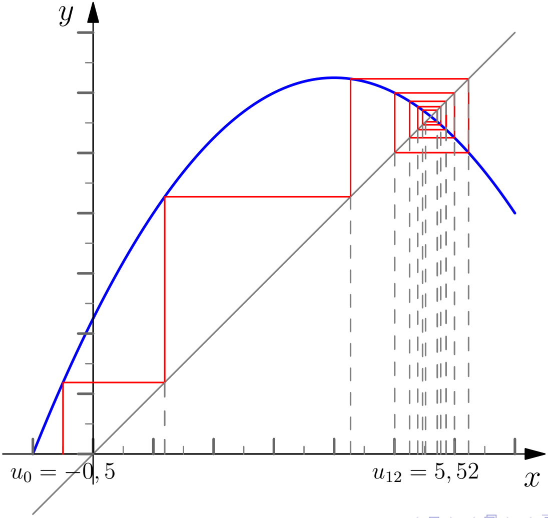
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Limite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Limite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim_{n\to\infty} u_n = L$

Limite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

On dit aussi : u_n converge vers L

Limite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

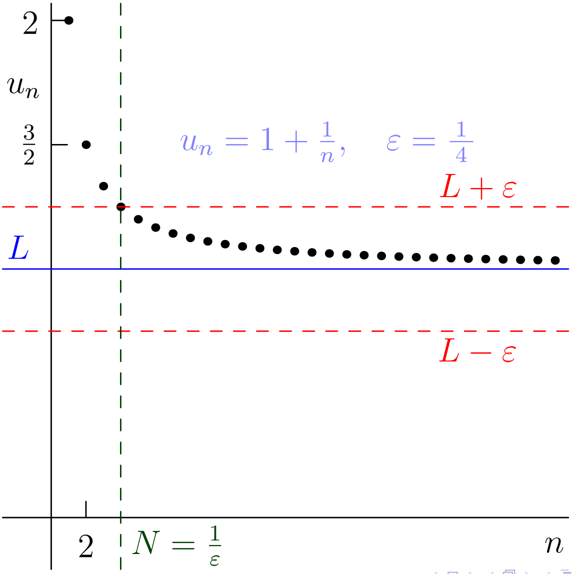
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

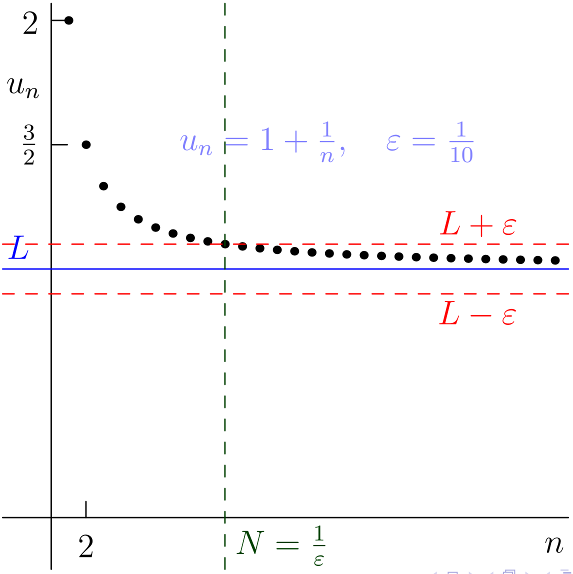
On dit aussi : u_n converge vers L

$$|u_n - L| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

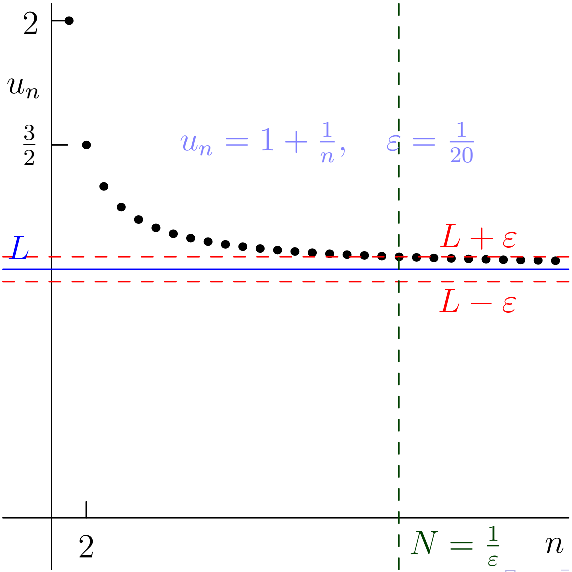
Limite


2
u_n
$\frac{3}{2}$
$u_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}$
$L + \varepsilon$
L
$L - \varepsilon$
2
$N = \frac{1}{\varepsilon}$
n

Limite


2
u_n
$\frac{3}{2}$
$u_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varepsilon = \frac{1}{10}$
$L + \varepsilon$
L
$L - \varepsilon$
2
$N = \frac{1}{\varepsilon}$
n

Limite


2
u_n
$\frac{3}{2}$
$u_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \varepsilon = \frac{1}{20}$
L
$L + \varepsilon$
$L - \varepsilon$
2
$N = \frac{1}{\varepsilon}$
n

Unicité de la limite

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique

Unicité de la limite

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique

- S'il y a 2 limites différentes L et L' : $|L - L'| > 0$

Unicité de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique

- S'il y a 2 limites différentes L et L' : $\quad |L - L'| > 0$
- pour $0 < \varepsilon = \frac{|L-L'|}{3}$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{si } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - L'| \leq \varepsilon$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Unicité de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Théorème : Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, cette limite est unique

- S'il y a 2 limites différentes L et L' : $\quad |L - L'| > 0$
- pour $0 < \varepsilon = \frac{|L-L'|}{3}$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{si } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - L'| \leq \varepsilon$$

- $|L - L'| = |L - u_n + u_n - L'| \leq |L - u_n| + |u_n - L'| \leq \frac{2|L-L'|}{3}$

Suites bornées

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq M$

Suites bornées

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq M$
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq m$

Suites bornées

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq M$
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq m$
- bornée si : $\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_n| \leq C$

Suites bornées

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq M$
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq m$
- bornée si : $\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad |u_n| \leq C$

Ce qui revient à dire que l'ensemble :

$$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est majoré, minoré, borné}$$

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$
- Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à N, l'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \cdots |u_{N-1}|\}$ a donc un plus grand élément : $M = \max_{0 \leq i \leq N-1} |u_i|$

Propriété des suites convergentes

Proposition : Une suite convergente est bornée

- Pour $\varepsilon = 1 \quad \exists N : \quad n \geq N, \quad |u_n - L| \leq 1$
- $|u_n| = |u_n - L + L| \leq |u_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$
- Il n'y a qu'un nombre fini d'entiers inférieurs à N, l'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \cdots |u_{N-1}|\}$ a donc un plus grand élément : $M = \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} |u_i|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{llll} \text{soit :} & n < N & \text{et} & |u_n| \leq M \\ \text{soit :} & n \geq N & \text{et} & |u_n| \leq 1 + |L| \end{array}$ dans tous les cas :

$$|u_n| \leq \max(M, 1 + |L|)$$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \ldots$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \ldots$

Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \dots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \dots$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$

- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : \quad |u_n - L| \leq \frac{1}{2}$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \ldots$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$

- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : \quad |u_n - L| \leq \frac{1}{2}$
- Pour $n = 2p \geq N$:

$$2 = |u_{2p} - u_{2p+1}| = |u_{2p} - L + L - u_{2p+1}|$$

$$\leq |u_{2p} - L| + |u_{2p+1} - L| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = (-1)^n$$

$u_0 = 1, \quad u_n = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \quad \ldots, \quad u_{2p} = 1, \quad u_{2p+1} = -1, \quad \ldots$

Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$

- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N : \quad |u_n - L| \leq \frac{1}{2}$
- Pour $n = 2p \geq N$:

$$\begin{aligned} 2 = |u_{2p} - u_{2p+1}| &= |u_{2p} - L + L - u_{2p+1}| \\ &\leq |u_{2p} - L| + |u_{2p+1} - L| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Conséquence : une suite bornée n'est pas forcément convergente !

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \ldots$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \ldots$$

- Soit $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \ldots$

- Soit $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad A^2 - 1 \leq N$

Rappel

On admet qu'il existe un ensemble de nombres $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède :

Si $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $A < n$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \dots$$

- Soit $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad A^2 - 1 \leq N$

Une suite qui ne converge pas est une suite divergente

Exemples :

$$u_n = \sqrt{n+1}$$

$u_0 = \sqrt{1}, \quad u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{3}, \quad u_3 = \sqrt{4}, \quad \dots$

- Soit $A \in \mathbb{R}, \quad A \geq 0$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad A^2 - 1 \leq N$
- Alors pour $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad A \leq \sqrt{n+1} = u_n$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \geq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \leq u_n$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \geq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \leq u_n$$

Notation : $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \geq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \leq u_n$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ A \leq 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad A \geq u_n$$

Notation : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to \infty} (\lambda u_n) = \lambda L$

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to \infty} (\lambda u_n) = \lambda L$
- $\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = L + L'$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to \infty} (\lambda u_n) = \lambda L$
- $\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = L + L'$
- $\lim_{n \to \infty} (u_n . v_n) = L . L'$

Limites et opérations

Soit 2 suites, u_n et v_n, convergentes, de limites respectives L et L'.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n \to \infty} (\lambda u_n) = \lambda L$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = L + L'$
- $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n . v_n) = L . L'$
- Si $L \neq 0, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{L}$

Limites et opérations

Exercice

Soit une suite u_n qui converge vers $L \neq 0$.

Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N, \quad u_n \neq 0$

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et si u_n et v_n convergent,

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$ et si u_n et v_n convergent,

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

En particulier : si u_n converge et si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq a$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$$

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$ et si u_n et v_n convergent,

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

En particulier : si u_n converge et si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq a$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$$

Attention : même si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > a, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

Limites et inégalités

Soit 2 suites, u_n et v_n.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$ et si u_n et v_n convergent,

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

En particulier : si u_n converge et si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq a$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \geq a$$

Attention : même si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > a, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n \geq a$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} > 0, \quad$ mais $\quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- si u_n et w_n convergent

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- si u_n et w_n convergent
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n$

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- si u_n et w_n convergent
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n$
- Alors :

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- si u_n et w_n convergent
- si $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n$
- Alors :
  1. v_n converge

Limites et inégalités

Soit 3 suites, u_n, v_n et w_n.

- si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- si u_n et w_n convergent
- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$
- Alors :
  1. v_n converge
  2. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$v_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+\sqrt{1}}$$
$$v_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$
$$v_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3+\sqrt{1}} + \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}$$
$$v_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4+\sqrt{4}}$$

....

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k$: $\quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k$: $\quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n}$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$k = 0 \quad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \leq \quad \frac{1}{n} \quad \leq \quad \frac{1}{n}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{lccccc} k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \end{array}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{lccccc}
k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n}
\end{array}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{lccccc}
k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n}
\end{array}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{cccccc}
k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{cccccc}
k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\
k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
k=n & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n}
\end{array}$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$n+1 \text{ lignes} \quad \left\{ \begin{array}{llclcl} k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k=n & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

Technique de calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$$

$$n+1 \text{ lignes} \quad \left\{ \begin{array}{llllll} k=0 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=1 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{1}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=2 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{2}} & \leq & \frac{1}{n} \\ k=3 & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{3}} & \leq & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k=n & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n+\sqrt{n}} & \leq & \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n}$$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n}$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$
- $w_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$, donc : $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
- $w_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, donc : $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

- $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \qquad n \leq n + \sqrt{k} \leq n + \sqrt{n}$
- Donc : $\forall k : \quad 0 \leq k \leq n, \quad u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n} = w_n$
- $u_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$
- $w_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 1$$

Limites et inégalités

Attention : si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

Limites et inégalités

Attention : si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq \lim_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

$$u_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Limites et inégalités

Attention : si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq \lim_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

$$u_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

Limites et inégalités

Attention : si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

$$u_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- u_n et w_n convergent :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -2 \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = 2$$

Limites et inégalités

Attention : si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq \lim_{n\to\infty} w_n$ la conclusion est fausse !

$$u_n = -2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = (-1)^n, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$
- u_n et w_n convergent :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = -2 \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = 2$$
- mais : v_n ne converge pas !

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, $\quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

$$\big||u_n| - |L|\big| \leq |u_n - L|$$

Limites et valeurs absolues

Proposition : Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$

$$\big||u_n| - |L|\big| \leq |u_n - L|$$

Attention : si $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |L|$, la suite u_n peut ne pas être convergente !

$$u_n = (-1)^n$$

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$
- $0 \leq |u_n.v_n| \leq M.|v_n|$

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$
- $0 \leq |u_n.v_n| \leq M.|v_n|$
- puisque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$
- $0 \leq |u_n.v_n| \leq M.|v_n|$
- puisque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

Attention : si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l \neq 0$, c'est faux !

Théorème : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0, alors $\lim_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

- $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$
- $0 \leq |u_n.v_n| \leq M.|v_n|$
- puisque $\lim_{n\to\infty} v_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} u_n.v_n = 0$

Attention : si $\lim_{n\to\infty} v_n = l \neq 0$, c'est faux !

$u_n = (-1)^n$ est bornée, $\quad v_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ est convergente,

mais : $u_n.v_n = (-1)^n.2$ ne converge pas !

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \Big(\cos(n)\Big) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \Big(\cos(n)\Big) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ;

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \left(\cos(n)\right) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \big(\cos(n)\big)\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- donc la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge aussi vers 0 puisque $\sin 0 = 0$

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \left(\cos(n)\right) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- donc la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge aussi vers 0 puisque $\sin 0 = 0$
- La suite $\cos(n)$ est bornée et la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0

Exemple

Trouver la limite de la suite $u_n = \big(\cos(n)\big) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

- La suite $(-1)^n$ est bornée, la suite $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ; donc la suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0
- donc la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge aussi vers 0 puisque $\sin 0 = 0$
- La suite $\cos(n)$ est bornée et la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 0 , donc la suite u_n converge vers 0

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Proposition : Si $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Si $r < 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Si $r = 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = a$

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Proposition : Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
Si $r = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

- Si $r > 0$, soit $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, par la propriété d'Archimède, $\exists N \in \mathbb{N}$: $N > \frac{A-a}{r}$

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Proposition : Si $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Si $r < 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Si $r = 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = a$

- Si $r > 0$, soit $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, par la propriété d'Archimède, $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > \frac{A-a}{r}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n = a + nr \geq A$

Exemples importants

Suite arithmétique

Soit a et r deux nombres réels, la suite $u_n = a + nr$ s'appelle une suite arithmétique de terme initial a et de raison r.

Proposition : Si $r > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Si $r < 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Si $r = 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = a$

- Si $r > 0$, soit $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, par la propriété d'Archimède, $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > \frac{A-a}{r}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n = a + nr \geq A$

$$\lim_{n\to\infty} = +\infty$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr$$

$$S = a + a+r + a+2r + \cdots + a+(n-1)r + a+nr$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$S = a + a+r + a+2r + \cdots + a+(n-1)r + a+nr$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$+\begin{array}{ccccccccccc} S & = & a & + & a+r & + & a+2r & +\cdots+ & a+(n-1)r & + & a+nr \\ S & = & a+nr & + & a+(n-1)r & + & a+(n-2)r & +\cdots+ & a+r & + & a \end{array}$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & S & = & a & + & a+r & + & a+2r & +\cdots+ & a+(n-1)r & + & a+nr \\
+ & S & = & a+nr & + & a+(n-1)r & + & a+(n-2)r & +\cdots+ & a+r & + & a \\
 & 2S & = & 2a+nr & + & 2a+nr & + & 2a+nr & +\cdots+ & 2a+nr & + & 2a+nr
\end{array}
$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & S & = & a & + & a+r & + & a+2r & +\cdots+ & a+(n-1)r & + & a+nr \\
+ & S & = & a+nr & + & a+(n-1)r & + & a+(n-2)r & +\cdots+ & a+r & + & a \\
 & 2S & = & 2a+nr & + & 2a+nr & + & 2a+nr & +\cdots+ & 2a+nr & + & 2a+nr
\end{array}$$

$$2S = (n+1)(2a+nr)$$

Exemples importants

Somme d'une suite arithmétique

$$S = \sum_{k=0}^{n} a + kr = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & S & = & a & + & a+r & + & a+2r & + \cdots + & a+(n-1)r + & a+nr \\ + & S & = & a+nr & + & a+(n-1)r & + & a+(n-2)r & + \cdots + & a+r & + & a \\ \hline & 2S & = & 2a+nr & + & 2a+nr & + & 2a+nr & + \cdots + & 2a+nr & + & 2a+nr \end{array}$$

$$2S = (n+1)(2a+nr)$$

Si $a = 0$ et $r = 1$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k$$

Rappel

Pour tous nombres (entiers,..., réels, complexes) a et b et tout nombre entier $n \neq 0$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p . b^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^{n-p} . b^p$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a.b + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2.b + 3\,a.b^2 + b^3$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6\,a^5.b + 15\,a^4.b^2 + 20\,a^3.b^3 + 15\,a^2.b^4 + 6\,a.b^5 + b^6$$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k$$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0}$$

Exemples importants
Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h$$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Si $a > 1$: $\quad a = 1 + h, \quad h > 0$

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + n.h + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k}_{>0} \geq 1 + n.h$$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

2. Si $|a| < 1$

Si $a \neq 0$, $\quad \frac{1}{|a|} > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$

Si $a \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{|a|} > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$

Si $a \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{|a|} > 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \quad \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$

Si $a = 0$, $\quad a^n = 0 : \quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Si $a \neq 0$, $\quad \dfrac{1}{|a|} > 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n = +\infty \quad \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$

Si $a = 0$, $\quad a^n = 0$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$

Si $a < -1$, $\quad |a| > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \quad a^n$ n'est pas bornée

Rappel

Proposition : Une suite convergente est bornée

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\qquad \lim_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$

Si $a < -1$, $\quad |a| > 1$, $\quad \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \quad a^n$ n'est pas bornée

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\qquad \lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\qquad \lim_{n \to \infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\qquad \lim_{n \to \infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$

Si $a < -1$, $\quad |a| > 1$, $\quad \lim_{n \to \infty} |a|^n = +\infty \qquad a^n$ n'est pas bornée

Si $a = -1$, $\quad a^n = (-1)^n$

Exemples importants

Suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\quad u_n = a^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Si $a > 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
2. Si $|a| < 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$
3. Si $a = 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1$
4. Si $a \leq -1$, $\quad a^n$ n'est pas convergente

Si $a < -1$, $\quad |a| > 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = +\infty \quad a^n$ n'est pas bornée

Si $a = -1$, $\quad a^n = (-1)^n$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\begin{array}{lllllllllllll}
S & = 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & \\
S.a & = & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & + \quad a^{n+1}
\end{array}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
 & S & = & 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & & \\
- & S.a & = & & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & + & a^{n+1}
\end{array}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
 & S & = & 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & & \\
- & S.a & = & & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & + & a^{n+1} \\
 & S - S.a & = & 1 & & & & & & & & & & & - & a^{n+1}
\end{array}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll} & S & = 1 & + & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & & \\ - & S.a & = & & a & + & a^2 & + & a^3 & + & \cdots & + & a^n & + & a^{n+1} \\ & S - S.a & = 1 & & & & & & & & & & & - & a^{n+1} \end{array}$$

$$S(1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

Exemples importants

Somme d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Si $|a| < 1$, $\quad u_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{u_1}{u_0}\right|\left|\frac{u_2}{u_1}\right|\left|\frac{u_3}{u_2}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right|$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\dfrac{u_n}{u_0}\right| = \left|\dfrac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\dfrac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\dfrac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\dfrac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left|\dfrac{u_k}{u_{k-1}}\right|$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \alpha^n$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \alpha^n$
- $|u_n| < \alpha^n|u_0|$

Exemples importants

Suites u_n telles que : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha < 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 0, \quad \text{et} \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- $\left|\frac{u_n}{u_0}\right| = \left|\frac{\cancel{u_1}}{u_0}\right|\left|\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}}\right|\left|\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \alpha^n$
- $|u_n| < \alpha^n |u_0|$
- $\alpha < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemples importants

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1}$

Exemples importants

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1}$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N, \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1}$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{n+1} \leq \dfrac{|a|}{N+1} \leq \dfrac{|a|}{N}$

Exemples importants

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{n+1} \leq \dfrac{|a|}{N+1} \leq \dfrac{|a|}{N} < \dfrac{1}{2}$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right| \cdots \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|$

Exemples importants

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{n+1} \leq \dfrac{|a|}{N+1} \leq \dfrac{|a|}{N} < \dfrac{1}{2}$
- $\left|\dfrac{u_n}{u_N}\right| = \left|\dfrac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \displaystyle\prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\dfrac{u_k}{u_{k-1}}\right|$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $$\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Exemples importants

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{a^n} = \dfrac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{n+1} \leq \dfrac{|a|}{N+1} \leq \dfrac{|a|}{N} < \dfrac{1}{2}$
- $\left|\dfrac{u_n}{u_N}\right| = \left|\dfrac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\dfrac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \displaystyle\prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\dfrac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}.2^N$

Exemples importants

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right| \cdots \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n} \left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N$
- $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N.|u_N|$

Exemples importants $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N$
- $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N.|u_N| \quad$ or $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemples importants

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$a \neq 0, \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$$

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$
- Par la propriété d'Archimède : $\exists N \in \mathbb{N} : \quad N > 2|a|$
- Pour $n \geq N$, $\quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{N+1} \leq \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2}$
- $\left|\frac{u_n}{u_N}\right| = \left|\frac{u_{N+1}}{u_N}\right|\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \prod_{k=N+1}^{k=n}\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N$
- $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n.2^N.|u_N|$ or $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Quelques définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$

Quelques définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$

Quelques définitions

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$

Pour étudier la croissance (ou la décroissance) d'une suite, on calcule

$$u_{n+1} - u_n$$

et on étudie le signe de la différence.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$u_{n+1} - u_n = \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$u_{n+1} - u_n = \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$$
$$= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \ln\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big) + \ln\Big(\frac{n}{n+1}\Big) \\ &= \ln\Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big) \end{aligned}$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) < 0$

u_n est décroissante.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$, pour étudier la croissance de u_n, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$, pour étudier la croissance de u_n, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante

Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$, pour étudier la croissance de u_n, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante
- si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite est décroissante

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}}$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}}$$

$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}}$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}}$$
$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}}$$
$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1$$

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = ne^{-\frac{1}{n!}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,e^{-\frac{1}{(n+1)!}}}{ne^{-\frac{1}{n!}}}$$

$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}}$$

$$= \frac{n+1}{n}\,e^{\frac{n}{(n+1)!}} > 1$$

La suite u_n est donc croissante

Limites et monotonie

Théorème : Une suite croissante et majorée converge.

Limites et monotonie

Théorème : Une suite croissante et majorée converge.

Une suite décroissante et minorée converge.

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \varnothing$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

Rappel

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L un nombre réel, on dit que

u_n a pour limite L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{pour } n \geq N, \quad |u_n - L| \leq \varepsilon$$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \varnothing$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

Limites et monotonie

Une suite croissante et majorée converge

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $A \neq \emptyset$
- La suite est majorée ($\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$), donc A est majorée :

  $A \subset \mathbb{R}$ donc A admet une borne supérieure L.
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad L - \varepsilon < u_N \leq L$
- La suite est croissante, donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N : \quad L - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$$|u_n - L| \leq \varepsilon$$

La suite u_n a pour limite L

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$u_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

$$u_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

....

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ u_n est croissante

Exemple

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ u_n est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ $\quad u_n$ est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ u_n est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ u_n est majorée

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ u_n est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ u_n est majorée

Exemple $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ u_n est croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
  1. vraie pour $n = 1$: $u_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$
  2. supposons $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ (hypothèse de récurrence)
  3. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$
  4. $\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  5. $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ u_n est majorée

u_n est convergente

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Alors :

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Alors :

1. les deux suites u_n et v_n convergent

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Alors :

1. les deux suites u_n et v_n convergent
2. $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} v_n$

Suites adjacentes

Théorème : Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. u_n est croissante et v_n est décroissante
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$

Alors :

1. les deux suites u_n et v_n convergent
2. $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = \lim\limits_{n\to\mathbb{N}} v_n$

Deux suites qui vérifient ces hypothèses sont dites adjacentes

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots$$

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :

$$\ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$
- u_n est majorée par v_0, comme elle est croissante, elle converge vers L

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$
- u_n est majorée par v_0, comme elle est croissante, elle converge vers L
- v_n est minorée par u_0, comme elle est décroissante, elle converge vers L'

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$
- u_n est majorée par v_0, comme elle est croissante, elle converge vers L
- v_n est minorée par u_0, comme elle est décroissante, elle converge vers L'
- $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq L \leq L' \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$

Suites adjacentes

Démonstration

- On a le classement :
$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$
- u_n est majorée par v_0, comme elle est croissante, elle converge vers L
- v_n est minorée par u_0, comme elle est décroissante, elle converge vers L'
- $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq L \leq L' \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0, \quad L = L'$

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{3n}$

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{3n}$
- $\dots$

La construction repose sur deux moyens :

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{3n}$
- ...

La construction repose sur deux moyens :

1. on choisit certains termes de la suite

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut construire plusieurs suites à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- La suite des termes de rang pair : $v_n = u_{2n}$
- La suite des termes de rang impair : $w_n = u_{2n+1}$
- La suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{3n}$
- ...

La construction repose sur deux moyens :

1. on choisit certains termes de la suite
2. on ne revient pas en arrière

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemples :

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair : $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemples :

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair : $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$
- $\varphi(n) = 2n + 1$: suite des termes de rang pair : $w_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1}$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On appelle suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemples :

- $\varphi(n) = 2n$: suite des termes de rang pair : $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$
- $\varphi(n) = 2n + 1$: suite des termes de rang pair : $w_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n+1}$
- $\varphi(n) = 3n$: suite des termes de rang multiple de 3 : $a_n = u_{\varphi(n)} = u_{3n}$

Proposition : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers L.

Toute suite v_n extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite L.

(Proposition admise)

Proposition : Soit$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers L.

Toute suite v_n extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite L.

(Proposition admise)

Cette proposition est utile pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Si u_n converge vers L, toute suite extraite de u_n converge aussi vers L

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Si u_n converge vers L, toute suite extraite de u_n converge aussi vers L

- La suite extraite $v_n = u_{2n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 1$

Exemple : $u_n = (-1)^n$

Si u_n converge vers L, toute suite extraite de u_n converge aussi vers L

- La suite extraite $v_n = u_{2n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$
- La suite extraite $w_n = u_{2n+1} = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n\to\infty} w_n = -1$

Proposition : Soit u_n une suite ; on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$$

Démonstration.

Démonstration.

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$

Démonstration.

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L$

1. Les suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont extraites de la suite u_n qui converge vers L, elles convergent donc aussi vers L

Démonstration.

2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

Démonstration.

2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

2. ▸ v_n et w_n convergent vers L, donc :
   $\forall \varepsilon, \quad \exists N : \quad \forall n \geq N,\ |v_n - L| \leq \varepsilon,$ et $|w_n - L| \leq \varepsilon$

Démonstration.

2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

2.
   - v_n et w_n convergent vers L, donc :
     $\forall \varepsilon, \quad \exists N : \quad \forall n \geq N, \ |v_n - L| \leq \varepsilon, \ \text{ et } |w_n - L| \leq \varepsilon$

     Soit $n > 2N$ (donc $n \geq 2N + 1$) :

Démonstration.

2. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = L$

2. - v_n et w_n convergent vers L, donc :
     $\forall \varepsilon, \quad \exists N : \quad \forall n \geq N,\ |v_n - L| \leq \varepsilon,$ et $|w_n - L| \leq \varepsilon$

     Soit $n > 2N \quad$ (donc $\quad n \geq 2N+1$) :
     - Si n est pair, $n = 2p$ et $p > N$ donc :
       $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$

Démonstration.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$

2.
- v_n et w_n convergent vers L, donc :
  $\forall \varepsilon, \quad \exists N : \quad \forall n \geq N, \ |v_n - L| \leq \varepsilon,$ et $|w_n - L| \leq \varepsilon$

  Soit $n > 2N \quad$ (donc $\quad n \geq 2N + 1$) :
  - Si n est pair, $n = 2p$ et $p > N$ donc :
    $|u_n - L| = |u_{2p} - L| = |v_p - L| \leq \varepsilon$
  - Si n est impair, $n = 2p + 1$ et $p \geq N$ donc :
    $|u_n - L| = |u_{2p+1} - L| = |w_p - L| \leq \varepsilon$

Suites récurrentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I :

$$f : I \longmapsto \mathbb{R}$$

Une suite récurrente est définie

1. par son terme initial : u_0

Suites récurrentes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I :

$$f : I \longmapsto \mathbb{R}$$

Une suite récurrente est définie

1. par son terme initial : u_0
2. et par son terme général : $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

Exemple
Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

- Pour $n = 1, \quad u_1 = u_0 + r = a + r$

Exemple
Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

- Pour $n = 1$, $\quad u_1 = u_0 + r = a + r \qquad$ Vrai pour $n = 1$

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

- Pour $n = 1, \quad u_1 = u_0 + r = a + r \qquad$ Vrai pour $n = 1$
- Supposons que pour $1 \leq k \leq n, \quad u_k = a + kr$

Exemple
Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

- Pour $n = 1$, $\quad u_1 = u_0 + r = a + r \qquad$ Vrai pour $n = 1$
- Supposons que pour $1 \leq k \leq n$, $\quad u_k = a + kr \quad$ (hypothèse de récurrence)

Exemple

Suite arithmétique

Une suite arithmétique, de terme initial a et de raison r, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n + r$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x + r$

Proposition : $u_n = a + nr$

- Pour $n = 1$, $\quad u_1 = u_0 + r = a + r \qquad$ Vrai pour $n = 1$
- Supposons que pour $1 \leq k \leq n$, $\quad u_k = a + kr \quad$ (hypothèse de récurrence)
- Calculons : $u_{n+1} = u_n + r = (a + nr) + r = a + (n+1)r$

Exemple
Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$

Exemple

Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

Exemple
Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Exemple

Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

La fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Proposition : $u_n = a.q^n$

Exemple
Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Proposition : $u_n = a.q^n$

- Pour $n = 1, \quad u_1 = u_0.q = a.q$

Exemple

Suite géométrique

Une suite géométrique, de terme initial a et de raison q, est définie par :

1. $u_0 = a$
2. $u_{n+1} = u_n.q$

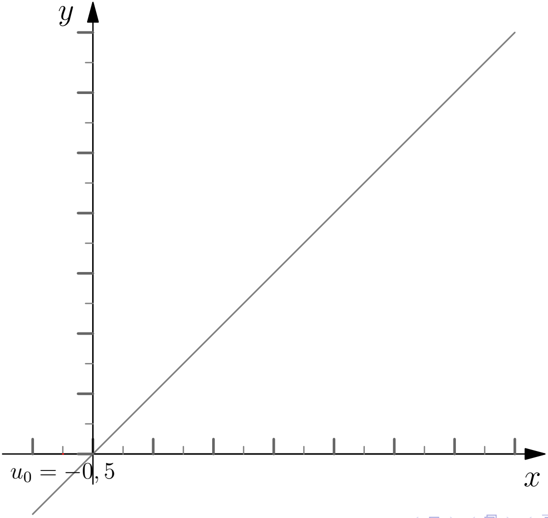
La fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ associée est alors : $f(x) = x.q$

Proposition : $u_n = a.q^n$

- Pour $n = 1, \quad u_1 = u_0.q = a.q$
- etc.

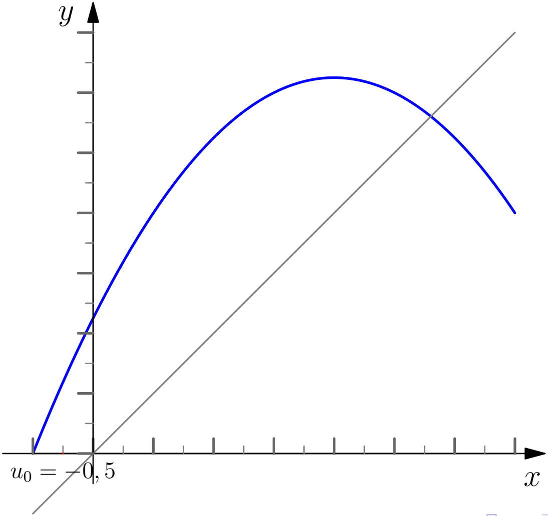
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$$



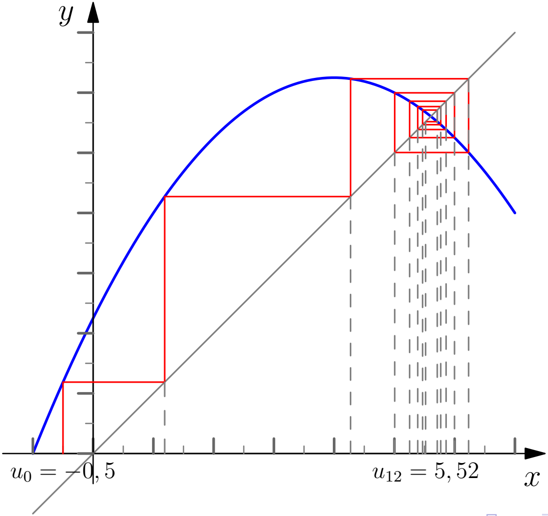
Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Soit une u_n une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante.}$$

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Soit une u_n une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante.}$$

1. Si $u_1 \geq u_0$, alors la suite u_n est croissante

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Soit une u_n une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante.}$$

1. Si $u_1 \geq u_0$, alors la suite u_n est croissante
2. Si $u_1 \leq u_0$, alors la suite u_n est décroissante

Propriétés des suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. On dit que f est croissante si :

$$\forall x,\ x' \in \mathbb{R}, \quad x \geq x' : \quad f(x) \geq f(x')$$

Soit une u_n une suite récurrente définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante.}$$

1. Si $u_1 \geq u_0$, alors la suite u_n est croissante
2. Si $u_1 \leq u_0$, alors la suite u_n est décroissante
3. Si $u_1 = u_0$, alors la suite u_n est constante

$u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante et $u_1 \geq u_0$

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

- La proposition est vraie pour $n = 1$

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

- La proposition est vraie pour $n = 1$
- Supposons que pour $0 \leq k \leq n, \quad u_k \geq u_{k-1}$ (hypothèse de récurrence)

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

- La proposition est vraie pour $n = 1$
- Supposons que pour $0 \leq k \leq n, \quad u_k \geq u_{k-1}$ (hypothèse de récurrence)
- La fonction f est croissante, donc :

$$u_n \geq u_{n-1} \quad \Rightarrow \qquad\qquad f(u_n) \geq f(u_{n-1})$$

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f \text{ croissante et } u_1 \geq u_0$$

- La proposition est vraie pour $n = 1$
- Supposons que pour $0 \leq k \leq n, \quad u_k \geq u_{k-1}$ (hypothèse de récurrence)
- La fonction f est croissante, donc :

$$u_n \geq u_{n-1} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n$$

Théorème : Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si u_n est convergente vers $L \in I$

Théorème : Soit $f: I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si u_n est convergente vers $L \in I$
2. Si f est continue

Théorème : Soit $f: \; I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si u_n est convergente vers $L \in I$
2. Si f est continue

Alors L vérifie : $f(L) = L$

Théorème : Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et u_n une suite définie par récurrence par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

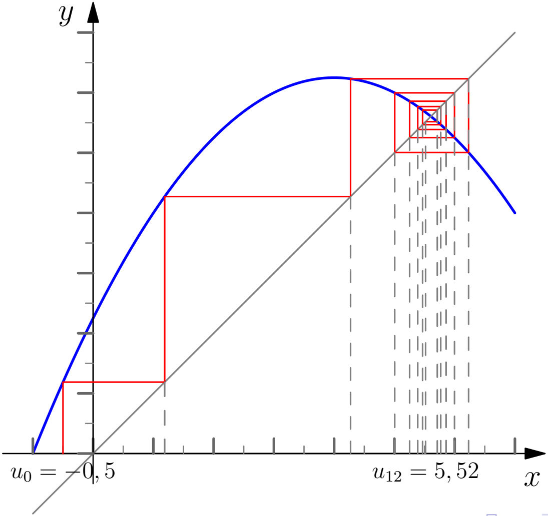
1. Si u_n est convergente vers $L \in I$
2. Si f est continue

Alors L vérifie : $f(L) = L$

Théorème provisoirement admis...

Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Exemple

Si la suite $u_0 = -\frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$ est convergente,

sa limite L vérifie : $L = \dfrac{(L+1)(9-L)}{4}$

Exemple

Si la suite $u_0 = -\frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$ est convergente,

sa limite L vérifie : $L = \dfrac{(L+1)(9-L)}{4}$

On doit donc résoudre l'équation :

$$x = \frac{(x+1)(9-x)}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x - 9 = 0$$

Exemple

Si la suite $u_0 = -\frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$ est convergente,

$$\text{sa limite } L \text{ vérifie : } L = \frac{(L+1)(9-L)}{4}$$

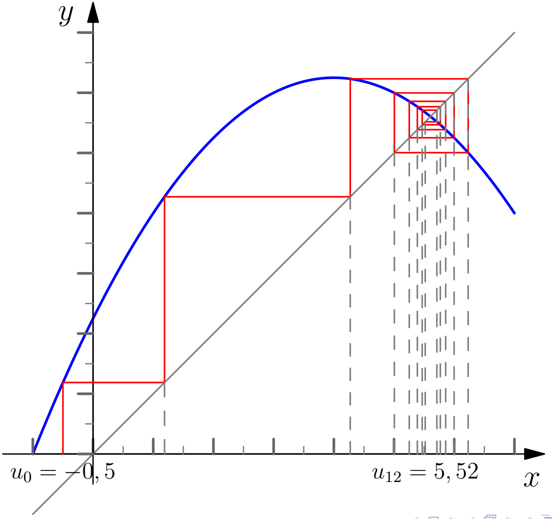
On doit donc résoudre l'équation :

$$x = \frac{(x+1)(9-x)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 9 = 0$$

Les deux racines sont : $x_1 = 2 - \sqrt{13} \quad x_2 = 2 + \sqrt{13}$

Exemple

$$u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4} \qquad f(x) = \frac{(x+1)(9-x)}{4}$$



Exemple

Si la suite $u_0 = -\frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n+1)(9-u_n)}{4}$ est convergente,

$$\text{sa limite } L \text{ vérifie : } L = \frac{(L+1)(9-L)}{4}$$

On doit donc résoudre l'équation :

$$x = \frac{(x+1)(9-x)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 9 = 0$$

Les deux racines sont : $x_1 = 2 - \sqrt{13} \quad x_2 = 2 + \sqrt{13}$

$$L = 2 + \sqrt{13} = 5,605551275\cdots$$