Chaînes de Markov (et applications)

Raphael Lachieze-Rey*

22 février 2021

M1 MM Paris Descartes, 2020 - 2021.

Table des matières

*raphael.lachieze-rey@parisdescartes.fr

CODE COULEUR
En noir : l'essentiel
En magenta : exemples, explications, exercices, commentaires, preuves,...

Rappels

0.1 Espérances et probas conditionnelles

On rappelle la formule de probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$, pour $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On note parfois $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$, rappelons que $\mathbb{P}_B(\cdot)$ est une mesure de probabilités à part entière.

Le double conditionnement se traite ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B|C)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_C(A \cap B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_C(A|B)\mathbb{P}_C(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A|\underbrace{B,C}_{i.e. B\cap C})\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C).$$

Etant donné des variables aléatoires X et Y à valeurs réélles,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$$

est une variable aléatoire qui est entièrement déterminée par Y. Par exemple, si X, Y sont des variables de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes,

$$\mathbb{E}((X+Y)^2|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) + 2\mathbb{E}(XY|Y) + \mathbb{E}(Y^2|Y) = \mathbb{E}X^2 + 2Y\mathbb{E}X + Y^2 = \frac{1}{2} + Y + Y^2 = \varphi(Y).$$

0.2 Familles sommables et théorème de Fubini

Etant donné un espace mesuré (Ω, μ) et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx),$$

n'a de sens que si f est intégrable

$$\int_\Omega |f(x)|\mu(dx) < \infty$$

(exemple de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}$). Par contre, si $f \geqslant 0$, alors

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

est défini sans ambiguité. De même, étant donné une série $(a_n; n \in \mathbb{N})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

n'a de sens que si $a_n \geqslant 0$ ou si $(a_n; n \geqslant 0)$ est sommable, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Pour ce qui est de l'interversion, le théorème de Fubini nous dit que pour une fonction bi-mesurable $f(x, y)$ sur un produit d'espaces mesurés $\Omega \times \Omega'$,

$$\int_\Omega \left(\int_{\Omega'} f(x,y)\mu(dx) \right) \mu'(dy) = \int_{\Omega'} \left(\int_\Omega f(x,y)\mu'(dy) \right) \mu(dx)$$

si $f(x, y) \geqslant 0$ ou si

$$\int_{\Omega \times \Omega'} |f(x,y)|\mu(dx)\mu'(dy) < \infty$$

ou si, de manière équivalente,

$$\int_\Omega \left(\int_{\Omega'} |f(x,y)|\mu(dx) \right) \mu(dy) < \infty.$$

Les fonctions positives peuvent être intégrées dans l'ordre qu'on veut. Si X_n sont des variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, $\Omega' = \mathbb{N}$ et μ' est la mesure de comptage, ça nous donne avec $f(\omega, n) = X_n(\omega)$,

$$\mathbb{E} \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} X_n$$

sans besoin de justification si $f(\omega, n) \geqslant 0$, ou si

$$\mathbb{E} \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

0.3 Formule des probabilités totales

Soit U, V deux variables à valeurs dans un espace dénombrable E. Alors pour $x \in E$,

$$\mathbb{P}(U = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(U = x, V = y) = \sum_{y \in \mathrm{Supp}(Y)} \mathbb{P}(U = x | V = y)\mathbb{P}(V = y).$$

1 Chaînes de Markov homogènes

$(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.1 Exemples et définitions

Idée : Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires dans le temps ou **conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé**, ou autrement dit le futur ne dépend du passé que par le présent.

Formellement, soit E un espace fini ou dénombrable. Ce sera l'**espace d'états**.

Définition 1. *Soit $X = \{X_n; n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. On dit que X est une chaîne de Markov si, pour tout $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$, on a*

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{Le futur}} \mid \underbrace{X_0 = x_0, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n}_{\text{Le passé (et le présent)}}) = \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{Le futur}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{Le présent}})$$

Cette propriété des chaînes de Markov est aussi connue comme **propriété de Markov**.

On peut formuler cette propriété en termes de lois conditionnelles :

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X_{n+1} \text{ sachant } (X_0, \ldots, X_n) \text{ est égale à la loi conditionnelle de } X_{n+1} \text{ sachant } X_n}$$

Exercice 1.
Parmi les exemples suivants, lesquels peuvent correspondre a une chaîne de Markov ?

- Les records du monde du 100m
- La population mondiale
- La position d'une voiture (le passé nous renseigne sur sa vitesse, et donc sur sa position future)
- Le nombre de personnes dans une file d'attente
- Un marcheur aléatoire qui ne revient jamais sur ses pas.
- Le couple (position, vitesse) d'une voiture de course
- une marche aléatoire

Exemple 1. Modélisation

- Séquence d'ADN : ACGGTAACTC... peut-être vue en première approximation comme une chaîne de Markov
- Evolution de population : Chaque jour, un individu nait ou un individu meurt
- Généalogie/Epidémiologie : Chaque jour, un individu donne naissance (ou contamine) un nombre aléatoire d'individu, ou meurt (guérit)
- Intelligence artificielle
- Simulation. Exemple : jeu de cartes mélangé. On part d'un jeu de cartes (fictif) dans l'ordre, et à chaque coup on applique l'interversion de 2 cartes tirées au hasard. La "loi" du jeu de cartes converge vers la loi d'un jeu de cartes mélangé selon une permutation uniforme

Les questions auxquelles on va tenter de répondre dans ce cours :

- Conaissant la loi de X_0, quelle est la loi de $X_n, n \in \mathbb{N}$? La loi de X_n converge-t-elle ?
- Partant d'un certain $x \in E$, et pour $y \in E$, quelle est la proba que la chaîne passe par y, i.e. qu'il existe un temps $T < \infty$, aléatoire, pour que $X_T = y$? Quel est l'espérance de T ?
- ...

Exercice 2. Soit $R_n, n \geq 0$ des variables indépendantes à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^n R_i$ et $P_n = \prod_{i=1}^n R_i$ sont des chaînes de Markov.

Une chaîne de Markov peut être vue comme un **système dynamique**, ce qui veut dire que $X_{n+1} = f_n(X_n)$, ou f_n est une "transformation aléatoire" indépendante du passé. Dans l'exemple précédent, $f_n(X_n)$ est la somme (ou le produit) de X_n avec R_{n+1}.

Si la transformation aléatoire f_n ne dépend pas de n, i.e. $X_{n+1} = f(X_n)$ pour tout n pour une certaine transformation f, on dit que X est une **chaîne de Markov homogène**.

Cela veut dire que si à un certain instant $n \geq 0$ la chaîne se trouve à l'état x ($X_n = x$), alors la probabilité qu'elle se trouve à l'état y au temps $n+1$ est la même que si l'on était au temps initial.

Définition 2. *Une chaîne de Markov (X_n) est* **homogène** *si pour tout $n \geq 0$, x et y dans E*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x).$$

Dans ce cas, on pose

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x),\ x, y \in E.$$

Q est la **matrice de transition** *de la chaîne X, on dit aussi* **noyau de transition** *quand E est infini.*

Dans ce cours, toutes les chaîne de Markov sont supposées homogènes, ce ne sera pas forcément explicitement écrit.

Remarque 1. Q est éventuellement une matrice infinie

Une chaîne de Markov homogène "saute" donc aléatoirement d'états en états, et la probabilité de chaque saut est donnée par la matrice Q. En général, on montre que X est une chaîne de Markov en même temps que l'on explicite Q.

Notation : Comme E est un espace dénombrable, une mesure μ sur E est défini par sa valeur sur les atomes :

$$\mu(\{x\}), x \in E.$$

Réciproquement, si $\mu(\{x\}) \geqslant 0$ pour $x \in E$, μ définit bien une mesure sur E via

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\}), A \subset E.$$

On abrège parfois cette notation en $\mu(x) = \mu(\{x\})$. μ est alors une mesure de probabilité si

$$\sum_{x \in E} \mu(x) = 1.$$

On peut également noter cette mesure comme un vecteur si $E = \{x_1, x_2, ...\}$ est ordonné : $\mu = (\mu(x))_{x \in E} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...)$ est équivalent à $\mu(x_i) = \mu_i$.

Exemple 2. La mesure $\mu = (k^{-2})_{k \geqslant 1}$ est définie par $\mu(\{k\}) = k^{-2}, k \in \mathbb{N}^*$, ou par

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} k^{-2}, A \subset \mathbb{N}^*.$$

C'est une mesure finie car $\frac{1}{k^2}$ est une série CVG, mais pas une mesure de probabilités. Par contre la mesure

$$\pi = \left(\frac{n^{-2}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \right)_{n \geqslant 1}$$

en est une.

Définition 3. *Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène. Etant donné un état $x \in E$, la mesure*

$$Q_x(y) = Q(x, y)$$

est une distribution (i.e. une mesure de probabilité) sur E, appelée mesure de saut depuis x.

Démonstration:
En effet, pour $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} Q_x(y) = \sum_{y \in E} Q(x, y) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) = \mathbb{E}(\sum_{y \in E} \mathbf{1}_{\{X_1 = y\}} | X_0 = x) = \mathbb{E}(1 | X_0 = x) = 1.$$

□

Exercice 3. Markov lui-même a analysé la succession de voyelles et de consonnes dans le livre *Eugene Onekin* de Pushkin sous l'angle des chaînes de Markov. Il est parti des données suivantes : *A. Markov, studied the sequence of 20,000 letters in A. S. Pushkin's poem "Eugeny Onegin" discovering that the stationary vowel probability is $p = 0.432$, that the probability of a vowel following a vowel is $p_1 = 0.128$, and that the probability of a vowel following a consonant is $p_2 = 0.663$.*

1. Quel est l'espace d'état ? La Matrice de transition ?
2. Mêmes questions avec "The Childhood of Bagrov, the Grandson" : *Markov also gave the results of his other tests ; he studied the sequence of 100,000 letters in S. T. Aksakov's novel. For that novel, the probabilities were p = 0.449, p1 = 0.552, and p2 = 0.365.*

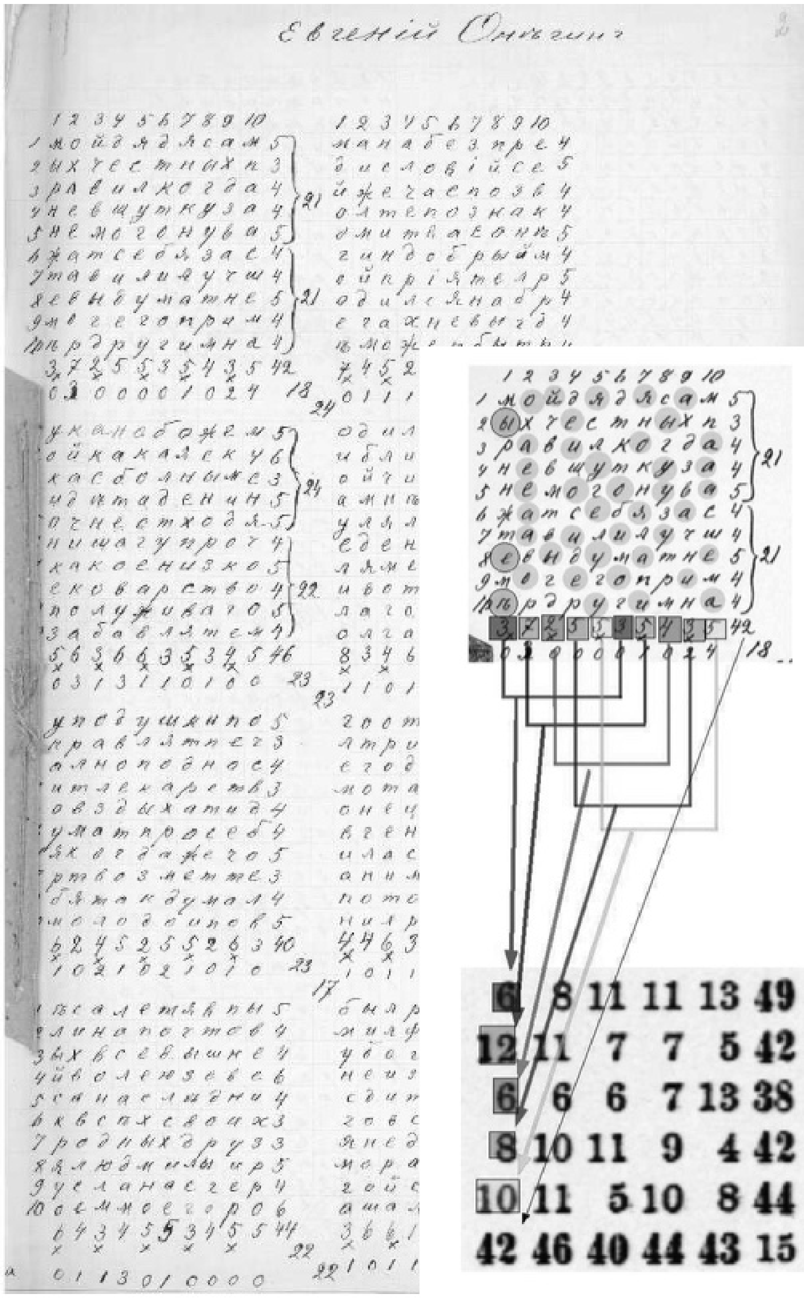


FIG. 2.1. *Left background: The first 800 letters of 20,000 total letters compiled by Markov and taken from the first one and a half chapters of Pushkin's poem "Eugeny Onegin." Markov omitted spaces and punctuation characters as he compiled the cyrillic letters from the poem. Right foreground: Markov's count of vowels in the first matrix of 40 total matrices of* 10×10 *letters. The last row of the* 6×6 *matrix of numbers can be used to show the fraction of vowels appearing in a sequence of 500 letters. Each column of the matrix gives more information. Specifically, it shows how the sums of counted vowels are composed by smaller units of counted vowels. Markov argued that if the vowels are counted in this way, then their number proved to be stochastically independent.*

Exemple 3. Une grenouille monte sur une échelle. Chaque minute, elle peut monter d'un barreau avec probabilité 1/2, ou descendre d'un barreau avec probabilité 1/2. L'échelle a 5 barreaux. Si la grenouille arrive tout en haut, elle saute en bas de l'échelle avec probabilité 1/2 ou redescend d'un barreau.

On appelle X_n la position de la grenouille sur l'échelle. L'espace d'états est donc $E = \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$. Si a un instant n la grenouille est au niveau $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ de l'échelle, alors à l'instant $n+1$ elle sera

$$\begin{cases} \text{au barreau } x+1 \text{ avec probabilité } 1/2, \\ \text{au barreau } x-1 \text{ avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

ce qui se traduit par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 \,|\, X_n = x) = 1/2 \quad (= \mathbb{P}(X_1 = x+1 \,|\, X_0 = x)),$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x-1 \,|\, X_n = x) = 1/2 \quad (= \mathbb{P}(X_1 = x-1 \,|\, X_0 = x)$$

Comme les probabilités ne dépendent pas de n, il semble que l'on tienne le bon bout pour avoir une chaîne de Markov homogène. Si c'est le cas, on peut écrire une partie de la matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Si la grenouille se retrouve à l'état 5, alors elle peut soit passer à l'état 4, soit passer à l'état 0. Il faut donc remplacer la dernière ligne de la matrice par

$$(1/2, 0, 0, 1/2, 0),$$

(encore une fois cela ne dépend pas de l'instant n). Si la grenouille est à l'état 0, elle ne peut que passer à l'état 1. La première ligne de la matrice est donc

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

X_n est donc bien une chaîne de Markov homogène, avec matrice de transition Q.

Exercice 4. Introduisons un facteur de fatigue $f \in (0, 1)$, et imaginons qu'à chaque instant la grenouille reste à son état actuel avec probabilité f. X_n est toujours une chaîne de Markov ? Si oui, quelle est sa matrice de transition ?

Imaginons désormais que le facteur de fatigue $f = f_n$ dépend du temps. Que cela change-t-il ?

Si désormais le facteur de fatigue dépend de tout le chemin parcouru par la grenouilleque cela change-t-il ?

Exercice 5. Le nombre d'individus d'une population évolue de la manière suivante : A chaque instant, un individu nait avec la probabilité $p \in (0, 1)$, ou un individu meurt avec la probabilité $q = 1 - p$.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et écrire le noyau de transition.
2. Ecrire la chaîne de Markov en termes des variables introduites à l'exercice 2.
3. Comment corriger la matrice de transition pour qu'il n'y ait pas un nombre négatif d'individus ?

Définition 4. *On dit qu'une matrice Q (ou un noyau éventuellement infini) est* **stochastique** *ssi tous ses coefficients sont ≥ 0 et si la somme de chaque ligne fait 1 : $\forall x \in E$,*

$$\sum_{y \in E} Q(x, y) = 1.$$

On dit aussi **matrice markovienne**.

Remarque 2. Les coefficients d'une matrice stochastique sont dans $[0,1]$.

Proposition 1. *Si Q est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, alors elle est stochastique.*

Démonstration: C'est une conséquence directe de la Définition 3. □

On va voir que réciproquement, pour toute matrice stochastique Q sur un produit $E \times E$, il existe une chaîne de Markov sur E qui admet Q comme matrice de transition . Mais elle n'est pas unique, car il faut encore préciser la loi du premier état X_0.

Proposition 2. *Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov et Q sa matrice de transition . Soit $k \in \mathbb{N}$ et $X' = (X'_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de variables aléatoires définie par*

$$\begin{aligned} X'_0 =& X_k \\ X'_1 =& X_{k+1} \\ X'_2 =& X_{k+2} \ldots \end{aligned}$$

X' est une chaîne de Markov de matrice de transition Q. On la note parfois $\tau_k X$, c'est-à-dire que τ_k est l'opérateur de translation, ou de shift temporel, agissant sur la chaîne de Markov X.

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} \mid X'_n = x_n, \ldots, X'_0 = x_0) =& \mathbb{P}(X_{n+k+1} = x_{n+1} \mid X_{n+k} = x_n, \ldots, X_k = x_0) \\ =& \mathbb{P}(X_{n+k+1} = x_{n+1} \mid X_{n+k} = x_n) \end{aligned}$$

en appliquant la propriété de Markov. Cette dernière expression est bien $\mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$.

Pour la matrice de transition :

$$Q(x_n, x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+k+1} = x_{n+1} \mid X_{n+k} = x_n) = \mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} \mid X'_n = x_n) = \mathbb{P}(X'_1 = x_{n+1} \mid X'_0 = x_n).$$

□

On appelle graphe d'une chaîne de Markov (ou d'une matrice de transition) le graphe dont les sommets sont les états possibles et étant donné $x, y \in E$, il y a une flèche de x vers y si $Q(x,y) > 0$.

1.2 Loi des marginales

Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov . Soit $n \in \mathbb{N}$. Il ne faut pas confondre "loi de X_n" et "loi conditionnelle de X_n sachant X_{n-1}". La seconde se calcule très facilement à l'aide de la matrice de transition :

$$\mathbb{P}(X_n = x \mid X_{n-1}) = Q(X_{n-1}, x).$$

Par contre, il n'y a pas de manière directe de calculer $\mathbb{P}(X_n = x)$. Reprenons l'exemple de la population où, à chaque instant, un individu naît ou un individu meurt avec probabilité $1/2$. On suppose qu'à l'instant 0, la population est constituée de $X_0 = 1000$ individus. Il est facile de dire

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 500 \mid X_n) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{X_n \in \{499,501\}\}}$$

mais il est par contre difficile de calculer directement $\mathbb{P}(X_{1000} = 500)$. Le but de cette section est d'indiquer la marche à suivre pour le calculer.

Jusqu'ici, on a uniquement pris des exemple où l'état initial était déterministe : la grenouille part de l'état 0, la population part de l'état 1000, etc...En toute généralité, on suppose que l'état initial est aléatoire et on notera μ_0 sa loi.

On appelle **loi initiale** de X la loi de X_0, c'est une mesure définie par

$$\mu_0(x) = \mu_0(\{x\}) = \mathbb{P}(X_0 = x).$$

Connaissant μ_0 et Q, on peut calculer directement la loi de X_n, aussi appelée *loi marginale* de rang n. Pour cela, il est plus facile de parler de la notion de **chemin**. Un chemin est simplement la donnée d'un vecteur fini $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. La probabilité de suivre un chemin donné est facile à calculer :

Proposition 3. *Pour tout chemin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dans E, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, &X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \mu_0(x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2)\ldots Q(x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

Démonstration:

On a (en utilisant la propriété de Markov)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\
&\quad= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= Q(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= Q(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= Q(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1} | X_{n-2} = x_{n-2})\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_{n-2}, x_{n-1})\mathbb{P}(X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_0 = x_0) \\
&\quad= \ldots \text{(récurrence)} \\
&\quad= Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_{n-2}, x_{n-1})\ldots Q(x_0, x_1)\underbrace{\mathbb{P}(X_0 = x_0)}_{\mu_0(x_0)}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 6. Soit $a \in]0, 1[$. On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Calculer la probabilité de l'événement A_3 de passer pour $n \leq 4$ trois fois par l'état 2. On commencera par faire la liste de tous les chemins de longueur 5 qui passent trois fois par l'état 2.

1. Avec $\mu_0 = (1, 0)$,
2. Avec $\mu_0 = (1/2, 1/2)$.

Dans un chemin $(x_0, \ldots, x_n)$, si il existe i tel que $Q(x_i, x_{i+1}) = 0$, cela signifie qu'il est impossible de passer de l'état x_i à l'état x_{i+1}, et il est donc impossible de suivre le chemin $(x_0, \ldots, x_n)$. On dit qu'un chemin $x_0, \ldots, x_n$ est **possible**, ou **probable**, et on le note

$$x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n, \text{ ou } x_0 \underset{n}{\to} x_n$$

si $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, Q(x_{i-1}, x_i) > 0$.

Soit $x, y \in E$. On dit qu'il existe un chemin **possible** entre x et y si il existe un chemin possible de la forme $(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$.

Pour une même chaîne X, on considère souvent plusieurs lois initiales différentes. Dans ce cas on peut préciser la loi utilisée en notant

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mu_0}$$

dans chaque calcul de probabilité, et l'espérance est alors notée $\mathbb{E}_{\mu_0}$. Si la loi est un "Dirac" : $\mu_0 = \delta_x$ pour un certain $x \in E$ (ce qui veut dire $X_0 = x$ p.s.), alors on note plus simplement $\mathbb{P}_{\delta_x} = \mathbb{P}_x, \mathbb{E}_{\delta_x} = \mathbb{E}_x$.

Exemple 4. Pour reprendre l'exemple de la grenouille,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_0(X_1 = 1) = 1,\\
&\mathbb{P}_0(X_1 = 3) = 0,\\
&\mathbb{P}_2(X_1 = 3) = 1/2,\\
&\mathbb{P}_0(X_3 = 3) = (1/2)^2 = 1/8,\\
&\mathbb{P}_0(X_3 = 4) = 0,\\
&\quad ...
\end{aligned}$$

On peut calculer directement la loi de X_n en utilisant le produit matriciel.

Notation 1. *Pour une mesure $\mu_0(x), x \in E$, et une fonction positive $Q(x, y), x, y \in E$, on note la mesure*

$$(\mu_0 \cdot Q)(y) = \sum_{x\in E} \mu_0(x)Q(x, y).$$

Cela revient à multiplier (matriciellement) la mesure μ_0 vue comme un vecteur $\mu_0 = (\mu_0(x_1), \mu_0(x_2), \dots)$ par la fonction Q vue comme une matrice (comme on additionne des quantités positives, la taille du vecteur et de la matrices peuvent être infinies).

Proposition 4. *Si μ_0 est la loi de X_0 (considérée comme un vecteur), alors $(\mu_0 \cdot Q)$ est la loi de X_1. Pour tout n, la loi de X_n est $\mu_0 \cdot Q^n$. En particulier, si $\mu_0 = \delta_x$, l'élément à la ligne x et colonne y se retrouve via*

$$(\delta_x \cdot Q^n)(y) = Q^n(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x).$$

Démonstration: Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = y) &= \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X_1 = y, X_0 = x)\\
&= \sum_{x\in E} \mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x)\mathbb{P}(X_0 = x) = \sum_{x\in E} \mu_0(x)Q(x, y) = (\mu_0 Q)(y)
\end{aligned}$$

On peut alors "oublier" la variable X_0, et ne considérer que la chaîne X' qui part de X_1 (formellement, poser $X'_0 = X_1, X'_1 = X_2, etc...$). La matrice de transition est toujours Q (cf. proposition 2), par contre la loi initiale n'est plus μ_0, c'est μ_1.

La loi de X_2 (i.e. X'_1) est donc, en réutilisant la proposition 4,

$$\mu_2 = (\mu_1 \cdot Q) = ((\mu_0 \cdot Q) \cdot Q).$$

Comme le produit matriciel est associatif, $((\mu_0 \cdot Q) \cdot Q) = \mu_0 \cdot Q \cdot Q = \mu_0 \cdot (Q \cdot Q) = \mu_0 \cdot Q^2$.

La loi de X_2 est donc bien $\mu \cdot Q^2$, comme annoncé. En raisonnant par récurrence, on montre bien $\mu_3 = (\mu_0 \cdot Q^2) \cdot Q = \mu_0 \cdot Q^3$, ..., ... et $\mu_n = \mu_0 \cdot Q^n$. □

Exercice 7. Une chaîne de Markov avec états $E = \{1, 2\}$ a la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

pour un nombre $a \in (0, 1)$.

1. Diagonaliser Q
2. Calculer Q^n pour $n \geqslant 1$.
3. Calculer la loi de X_n pour tout n, sachant que l'on part de l'état $X_0 = 1$. Donner par exemple $\mathbb{P}_1(X_n = 1)$ la probabilité de retour en 1 en n coups.

Exercice 8. (exercice 1.1.4 du Norris, p. 9) Une puce saute aléatoirement sur les sommets d'un triangle, sans préférence. Quelle est la probabilité qu'après n sauts la puce soit de retour à son point de départ ?

Recommencer si cette fois la puce saute dans le sens des aiguilles d'une montre avec probabilité 2/3 et dans l'autre sens avec probabilité 1/3.

Remarque 3. TRES IMPORTANT !!

$$Q^k(x,y) \neq Q(x,y)^k.$$

membre de gauche : multiplication matricielle.

membre de droite : multiplication de réels (beaucoup plus facile).

Corollaire 1. *On a pour $n \geq 0, k \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x) = Q^k(x,y).$$

Moralité : si vous voulez savoir ce qui se passe à un temps k dans le futur, il faut pouvoir calculer Q^k...

Démonstration: Pour $k = 1$ c'est simplement la définition de la matrice de transition . Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x).$$

Supposons que $\mu_0 = \delta_x$, c'est-à-dire que la chaîne démarre toujours en x. On a

$$\mathbb{P}_x(X_k = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_k = y) = (\mu_0 Q^k)(y) = (\delta_x Q^k)(y) = Q^k(x,y).$$

Dans le cas général (μ_0 quelconque), on a également $\mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_k = y) = Q^k(x,y)$.

□

Une chaîne de Markov est une variable àléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}_E := E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E. Etant donné $n \geqslant 1$ et un chemin $x = (x_0, \ldots, x_n)$ on appelle A_x l'évènement "chemin" associé :

$$A_x = (X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n).$$

On munit $E^{\mathbb{N}}$ de la tribu engendrée par les "évènements chemin", c'est-à-dire $\mathcal{B} := \sigma(A_x; x \text{ chemin fini})$. Cela signifie que deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 0}, (Y_n)_{n \geqslant 0}$ ont la même loi en tant qu'éléments de $E^{\mathbb{N}}$ si pour tout chemin fini x de taille n,

$$\mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) = x) = \mathbb{P}((Y_0, \ldots, Y_n) = x).$$

Il est clair que si deux chaîne de Markov $X = (X_n)$ et $Y = (Y_n)$ ont la même loi initiale μ_0 et la même matrice de transition Q, alors elles ont la même loi. En effet, pour tout chemin $x = (x_0, \ldots, x_n)$,

$$\mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) = x) = \mu_0(x_0) Q(x_0, x_1) \ldots Q(x_{n-1}, x_n) = \mathbb{P}((Y_0, \ldots, Y_n) = x).$$

Exercice 9. Soit E dénombrable et $x \in E$. Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E.

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que l'évènement $\mathbf{A}_n^p$="X passe au moins n fois par l'état x avant le temps p" est mesurable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'évènement $\mathbf{A_n}$ ="X passe n fois au moins par x" est mesurable.
3. Montrer que l'évènements $\mathbf{A}$ ="X passe une infinité de fois par x" est mesurable.

4. On suppose $E \subset \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que l'évènement "$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$" est mesurable.

Théorème 1. *Soit μ_0 une distribution sur E, et Q une matrice stochastique sur E. Alors il existe une unique chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ de loi initiale μ_0 et de matrice de transition Q. L'unicité est en loi dans le sens où si Y est une autre chaîne de Markov qui vérifie ça, X et Y ont la même loi sur $E^{\mathbb{N}}$ (mais on n'a pas $X_n = Y_n$ p.s.).*

Démonstration: Il suffit de définir les variables aléatoires X_n par récurrence : Soit X_0 de loi μ_0, et pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la propriété : il existe des VA $X_0, \dots, X_n$ qui vérifient pour $x = (x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)\prod_{i=1}^n Q(x_{i-1}, x_i).$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie grâce à X_0, et pour l'induction on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On définit alors X_{n+1} une variable aléatoire par sa loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X^{(n)} = x) = Q(x_n, x_{n+1}), x_{n+1} \in E, x = (x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}.$$

Ca définit bien une loi

$$\sum_{x_{n+1}\in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X^{(n)} = x) = \sum_{x_{n+1}\in E} Q(x_n, x_{n+1}) = 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0)\\ &= \mu_0(x_0)Q(x_0, x_1)\dots Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

en utilisant $\mathcal{P}(n)$. La propriété est donc vraie pour tout n. Montrons que $X = (X_n)$ est une chaîne de Markov de loi initiale X_0 et de matrice de transition Q. On a

$$\mu_0(x_0) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)$$

par définition. On a aussi la propriété de Markov qui est vraie par hypothèse. □

On peut donc assimiler (la loi d') une chaîne de Markov sur E a la donnée d'un couple (μ_0, Q) où μ_0 est une probabilité et Q est une matrice stochastique. En particulier, étant donné Q une matrice stochastique, on peut trouver (au moins) une chaîne de Markov dont la matrice de transition est Q. A chaque mesure de probabilité μ_0 correspond une chaîne de Markov de matrice de transition Q (et de loi initiale μ_0).

On peut étendre la propriété de Markov au futur et au passé au sens large :

Théorème 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F \in \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$ un évènement du "futur". Soit $S \in \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$ un évènement du "passé". Alors pour $z \in E$*

$$\mathbb{P}(F|(X_n = z) \cap S) = \mathbb{P}(F|X_n = z).$$

Démonstration:

On suppose dans un premier temps que F est de la forme $(X_{n+1} = x, X_{n+2} = y)$, où $x, y \in E$ sont fixés, et on pose $P = (X_n = z)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|P \cap S) &= \mathbb{P}(X_{n+2} = y, X_{n+1} = x|X_n = z, S)\\ &= \mathbb{P}(X_{n+2} = y \mid X_{n+1} = x, X_n = z, S)\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = z, S).\end{aligned}$$

Le fait que $\mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = z, S) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = z)$ vient du fait que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, \ldots, X_n)$ est la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n. La propriété de Markov implique aussi $\mathbb{P}(X_{n+2} = y \mid X_{n+1} = x, X_n = z, S) = \mathbb{P}(X_{n+2} = y \mid X_{n+1} = x)$, ce qui prouve que S peut être ôté du conditionnement (il n'apparaît pas dans le résultat).

Par le même principe et par récurrence, on peut montrer que pour $k \in \mathbb{N}$, et $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \in E$, on a avec $F = (X_{n+k} = x_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \mid X_n = z, S) &= \mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k}, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = z, S) = \mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k}, \ldots, X_{n+1} \mid X_n = z) \\ &= \mathbb{P}(F \mid X_n = z).\end{aligned}$$

Pour conclure, rappelons-nous que la tribu du futur $\sigma(X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ est engendré par les éléments du type précédent. $\square$

Remarque 4. Dans le résultat précédent, l'évènement $X_n = z$ ne peut pas eître remplacé par n'importe quel évènement du présent (i.e. $\sigma(X_n)$-mesurable). Par exemple dans le cas d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, on peut montrer (exercice)

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \,|X_n \in \{-1, 1\}, X_{n-1} = -2\,) = 0$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 \mid X_n \in \{-1, 1\}, X_{n-1} = 0) > 0.$$

TD 1 - Chaînes de Markov homogènes

Exercice 1. On considère un joueur qui joue au jeu suivant au casino :

— Le joueur mise une certaine somme d'argent.

— Le croupier tire à pile ou face.

— Si le croupier fait pile, le joueur double sa mise, mais donne 1\$ de commission au croupier.

— Si le croupier fait face, le joueur perd sa mise.

Le joueur arrive avec une somme d'argent X_0, et son but est d'arriver à 10\$.

1. On suppose qu'il veut y arriver le plus vite possible. A chaque coup, il mise tout son capital, ou toute la partie de son capital nécessaire pour arriver à 10\$. Par exemple s'il a 6\$, il en mise 5, car s'il gagne il se retrouve avec $6 + 5 - 1 = 10$\$, et s'il perd il se retrouve avec $6 - 5 = 1$\$. On appelle X_n la somme qu'il possède après n tentatives.
   Donner le graphe de la chaîne de Markov sur l'espace d'états $E = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.
2. Un autre joueur veut également arriver à 10\$; mais lui ne mise que 2\$ (ou 1\$ s'il n'a qu'1\$) à chaque coup. Donner le graphe de la chaîne de Markov .

Exercice 2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov (homogène) de loi initiale μ_0 et de matrice de transition Q. Montrer que X' définie par $X'_n = X_{kn}$ est une chaîne de Markov homogène, et donner sa matrice de transition .

Exercice 3. Soit E dénombrable et $x \in E$. Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur E.

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que l'évènement $\mathbf{A}_n^p$="X passe au moins n fois par l'état x avant le temps p" est mesurable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'évènement $\mathbf{A_n}$ ="X passe n fois au moins par x" est mesurable.
3. Montrer que l'évènements $\mathbf{A}$ ="X passe une infinité de fois par x" est mesurable.
4. On suppose $E \subset \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que l'évènement "$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$" est mesurable.

Exercice 4. Un homme possède un stock de bois aléatoire. Il a au jour 0 un nombre aléatoire X_0 de bûches, et chaque jour il consomme une bûche. On appelle X_n le nombre de bûches à la fin du n-ème jour. Si à un jour n il utilise sa dernière bûche, il renouvelle son stock le lendemain en allant ramasser des bûches, il en ramène un nombre aléatoire $X \geq 1$ tel que, pour $y \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = y) = f(y),$$

où

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$$

satisfait $\sum_{y\geq 1} f(y) = 1$. Le jour du ramassage, il consomme également immédiatement une bûche.

Identifier la chaîne de Markov et donner sa matrice de transition .

(Ce modèle s'appelle modèle de renouvellement, et peut s'appliquer à tout stock qui se renouvelle par un nombre aléatoire dont la loi ne varie pas.)

Exercice 5. On considère une variable aléatoire Y_0 telle que

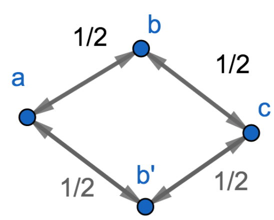
$$\mathbb{P}(Y_0 = 2) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(Y_0 = -1) = \frac{2}{3}.$$

Soit $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de meme loi que Y_0. Soit $X_0 = 0, X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov.
2. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = 0$ si n n'est pas un multiple de 3.
3. Soit $k \geqslant 1$, et $n = 3k$.
   (a) Soit un n-uplet $c \in \mathbb{R}^n$ constitué uniquement de $+2$ et de -1 (par exemple : $c = (2, 2, -1, 2)$ ou $(2, -1, -1, -1, 2)$...). Sous quelle condition la somme de tous les éléments de c est-elle égale à 0 ?
   (b) En déduire le nombre de chemins **possibles** qui vont de 0 à 0 en n coups.
   (c) Donner un équivalent quand k tend vers l'infini de
   $$\mathbb{P}_0(X_{3k} = 0).$$
   On rappelle la formule de Stirling : $k! \sim_{k\to\infty} k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$.

Exercice 6. Soit E, F deux ensembles dénombrables, et f une fonction de E dans F. Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène sur E de noyau de transition $Q(x, y), x, y \in E$. On pose $Y_n = f(X_n)$ et $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$.

1. On suppose que f est bijective. Montrer que Y est une chaîne de Markov.
2. On suppose que f est injective. Montrer que Y est une chaîne de Markov et donner son espace d'états et son noyau de transition.
3. On suppose que $E = \{a, b, b', c\}, F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. On définit f par $f(b) = f(b') = \beta, f(a) = \alpha, f(c) = \gamma$. On suppose que X a le graphe suivant :



   Montrer que Y est une chaîne de Markov en justifiant bien et donner sa matrice de transition.

4. On suppose que $E = \{a, b, c, d, e, b'\}$ et la matrice de transition est de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

   où les points représentent des nombres strictement positifs.

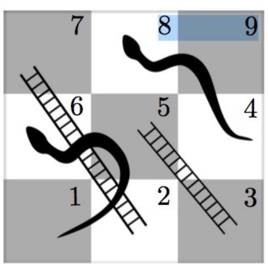
(a) Ecrire le graphe de X.

(b) On considère $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = \alpha, f(b) = f(b') = \beta, f(c) = \gamma, f(d) = \delta, f(e) = \varepsilon$. Remplacez les points par des valeurs telles que Y ne soit pas une chaîne de Markov .

Exercice 7. On considère un championnat sportif à 4 équipes, qui se prolonge indéfiniment. A chaque journée, l'équipe 1 affronte une équipe tirée au hasard parmi les 3 autres, et les 2 équipes restantes s'affrontent. Une victoire rapporte 1 points, 1 défaite -1 points. Chaque équipe à 50% de chances de gagner un match. On note $E = \mathbb{Z}^4$. On assimile un état $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ à la situation du championnat où pour $i = 1, \ldots, 4$, l'équipe numéro i a x_i points. On note $Q(x, y)$ la matrice de transition de la chaîne de Markov correspondante.

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que si $Q(x, y) > 0$, alors $\sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 y_i$.
2. On considère les score a_n et b_n des équipes 1 et 2 après n matchs, pour $n \in \mathbb{N}$, et $Y_n = (a_n, b_n)$, en supposant $a_0 = b_0 = 0$. Montrer que $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène dans $\mathbb{Z}^2$. Donner sa matrice de transition . Montrer que pour 2 couples $x = (a, b), y = (a', b')$ de $\mathbb{Z}^2$, il existe un chemin possible qui va de x à y.
3. On appelle $Z_n = (x_n, y_n, z_n)$ le score des trois premières équipes. Quelle est la matrice de transition ?
4. On considère désormais qu'à la première journée, les matchs sont 1 contre 2, et 3 contre 4. A la seconde journée, 1 contre 3 et 2 contre 4, à la 3ème journée, 1 contre 4 et 2 contre 3, puis ça recommence indéfiniment. Qu'est-ce qui change sur les questions précédente ? (réponse en 3 lignes maximum)
5. On considère désormais la suite qui contient le classement de la première équipe. Est-ce une chaîne de Markov ?

Exercice 8. On considère un jeu d'échelles et serpents qui se joue sur ce plateau :



Les règles sont les suivantes (à 1 joueur) :

- A chaque tour on lance un dé équilibré à 6 faces, et on avance du nombre de cases correspondantes, en s'arrêtant si on arrive sur la case 9.
- Si on arrive en bas d'une échelle, on monte instantanément en haut
- Si on arrive en haut d'un serpent, on descend instantanément en bas de sa queue.
- Dans les autres cas de figure, on reste sur la case.

On considère la chaîne de Markov qui donne le position d'un joueur à la fin du tour.

1. Quels sont les états qui vont être effectivement visités par la chaîne de Markov ? Dessiner le graphe de la chaîne de Markov.
2. Donner la matrice de transition.

2 Temps d'absorption

Dans ce chapitre on se pose la question suivante : Etant donné une chaîne X et x dans l'espace d'états E, quel est le temps moyen (éventuellement infini) que met X à arriver au temps x ?

Ce temps dépend évidemment de la loi initiale μ_0 : Si $\mu_0 = \delta_x$, le temps d'attente est 0. Si la chaîne n'est pas trop compliquée, il est possible de mener des calculs explicites pour trouver ce temps moyen.

2.1 Temps d'arrêt

Pour $x \in E$ on définit le temps aléatoire

$$T_x = \min\{n \geq 0 \,:\, X_n = x\},$$

premier moment où la chaîne atteint x. On étend cette définition à toute partie $A \subset E$:

$$T_A = \min\{n \geqslant 0 \;:\; X_n \in A\} = \min\{T_x \;:\; x \in A\}.$$

Définition 5. *Soit X une chaîne de Markov . Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. T est un* **temps d'arrêt** *si pour tout n, l'évènement $(T = n)$ dépend uniquement du passé, c'est-a-dire si l'évènement $(T = n)$ est entièrement déterminé par les variables $X_0, \ldots, X_n$ (c'est-à-dire mesurable par rapport à $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$).*

Exemple 5. Pour $x \in E$, le temps T_x est un temps d'arrêt : Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(T_x = n) = (X_0 \neq x, X_2 \neq x, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = x) = \varphi(X_0, \ldots, X_n)$$

où φ est mesurable. C'est bien un évènement qui est entièrement déterminé si on connait les valeurs de $X_0, \ldots, X_n$.

Exercice 1.
1. $(T = n)$ peut être remplacé par $(T \leq n)$, ou $(T > n)$ dans la définition précédente.
2. Par contre on ne peut pas le remplacer par $(T < n)$. Montrez que $S_x = T_x - 1$ est un contre-exemple.

On peut donc donner une autre preuve que T_x est un temps d'arrêt :

$$(T_x > n) = \cap_{k=0}^{n}(X_k \neq x) \in \sigma(X_0, \ldots, X_n)$$

Exercice 2. Soit $R_k, k \geq 0$, des variables iid de Rademacher, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathbb{P}(R_k = 1) = 1/2, \\ \mathbb{P}(R_k = -1) = 1/2, \end{cases}$$

et X_n leur somme. C'est une chaîne de Markov d'après l'exercice 2. Soit T le premier temps ou la chaîne est passé deux fois par l'état 10 :

$$T = \min\{n \geqslant 0 : X_n = 10 \text{ et il existe un seul } k < n \text{ tel que } X_k = 10\}.$$

Montrer que T est un temps d'arrêt.

On peut alors élargir la **propriété de Markov** aux temps aléatoires, à condition que ceux-ci soient des temps d'arrêt .

Proposition 5 (**propriété de Markov forte**)**.** *Soit $k \geq 1$, et T un temps d'arrêt . Pour $x, y \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{T+k} = y | X_T = x) = \mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = Q^k(x, y).$$

Remarque 5. Si $T = n$ est déterministe (pour un $n \in \mathbb{N}$), alors c'est le résultat qu'on a vu à la fin du chapitre précédent.

Démonstration:
Prouvons-le dans le cas où $T = T_x$ pour un x quelconque de E, et $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x) &= \sum_n \mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x, T_x = n)\mathbb{P}(T_x = n) && (1)\\
&= \sum_n \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x; T_x = n)\mathbb{P}(T_x = n) && (2)\\
&= \sum_n \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)\mathbb{P}(T_x = n) && (3)
\end{aligned}$$

car la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_0, \dots, X_n$ est mesurable par rapport à X_n et $T = n$ est mesurable par rapport à $X_0, \dots, X_n$. Donc

$$= \sum_n Q(x, y)\mathbb{P}(T_x = n) = Q(x, y) \sum_n \mathbb{P}(T_x = n) = Q(x, y).$$

En appliquant ce raisonnement itérativement k fois (ou en l'appliquant une fois à la chaine $X' = (X_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ dont la matrice de transition est Q^k), on obtient le résultat pour k quelconque. □

On pourra utiliser la formulation suivante de la **propriété de Markov forte**.

Proposition 6. *Pour tout temps d'arrêt T, la chaîne*

$$\tau_T X := X' = (X_T, X_{T+1}, \dots)$$

est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est Q et la loi initiale μ_0 est la distribution de la variable aléatoire X_T. De plus, la loi de X' est indépendante de $(X_0, \dots, X_{T-1})$ conditionnellement à X_T.

Si $T = T_x$ pour un certain $x \in E$, alors trivialement $X_T = x$ et $\mu_0 = \delta_x$.

Démonstration: Soit $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} | X'_n = x_n, X'_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X'_0 = x_0)\\
&\quad= \mathbb{P}(X_{T+n+1} = x_{n+1} | X_{T+n}, \dots, X_T = x_0)\\
&\quad= \sum_{q\geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \dots, X_q = x_0)\mathbb{P}(X_{q+n+1} = x_{n+1} | T = q, X_{q+n} = x_n, \dots, X_q = x_0)\\
&\quad= \sum_{q\geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \dots, X_q = x_0)\mathbb{P}(X_{q+n+1} = x_{n+1} | X_{n+q} = x_n)\\
&\quad= \sum_{q\geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \dots, X_q = x_0)Q(x_n, x_{n+1})\\
&\quad= Q(x_n, x_{n+1}) \sum_{q\geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \dots, X_q = x_0)\\
&\quad= Q(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

Comme la loi de X' est déterminée par les évènements de type "chemin", pour montrer l'indépendance, soit A un évènement qui dépend uniquement de $(X_0, \dots, X_{T-1})$ ($A \in \sigma((X_0, \dots, X_{T-1}))$). On veut montrer que A peut disparaître du conditionnement,

$$\mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} | X'_n = x_n, X'_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X'_0 = x_0, A).$$

ce qui revient, après avoir conditionné par la valeur de T, à montrer que $A \in \sigma(X_0, \ldots, X_{q-1})$ disparaît du conditionnement

$$\mathbb{P}(X_{n+q+1} = x_{n+1} | T = q, X_{n+q} = x_n, X_{n+q-1} = x_{n-1}, \ldots, X_q = x_0, A),$$

ce qui est une conséquence de la propriété de Markov étendue. $\square$

2.2 Probabilités et temps d'absorptions

Avec le langage introduit dans la section précédente, on s'intéresse pour $A \subset E$ aux quantités

$$h^A = \mathbb{P}(T_A < \infty),$$
$$k^A = \mathbb{E}(T_A).$$

Si $h_A \neq 1$, alors $k^A = \infty$. Donc il faut calculer h^A en premier, et ensuite k^A si ça a du sens. Si l'on conditionne par l'état de départ $x \in E$, on a

$$h_x^A = \mathbb{P}_x(T_A < \infty) \quad \text{Probabilité d'arriver un jour en } A \text{ en partant de } x \ ,$$
$$k_x^A = \mathbb{E}_x(T_A) \qquad \text{Temps moyen pour y arriver.}$$

Si $x \in A$, h_x^A est trivialement 1, et T_x^A est trivialement 0. Si $A = \{y\}$ est constitué d'un unique point, on note $h_x^{\{y\}} = h_x^y, k_x^{\{y\}} = k_x^y$.

Théorème 3. *$(h_x^A)_{x \in E}$ et $(k_x^A)_{x \in E}$ sont solutions des systèmes (éventuellement infinis) d'équations :*

$$h_x^A = \sum_{y \in E} Q(x,y) h_y^A, \ \textit{pour tout } x \notin A$$
$$k_x^A = 1 + \sum_{y \in E} Q(x,y) k_y^A, \ \textit{pour tout } x \notin A$$

avec $h_x^A = 1$ et $k_x^A = 0$ pour $x \in A$. Si le premier (resp. le second) système a plusieurs solutions, $(h_x^A)_x$ (resp.$(k_x^A)_x$) est la plus petite solution positive du système : pour toute solution $(u_x)_{x \in E}, \forall x \in E, h_x^A \leqslant u_x$.

Traitons un exemple d'utilisation avant d'étudier la preuve :

Exemple 6. Une puce saute sur un triangle, avec une probabilité 2/3 dans le sens horaire, et 1/3 dans le sens anti-horaire.

- On numérote les sommets : 1,2,3. Matrice de transition :
- Intéressons-nous aux temps d'atteinte. Soit $A = \{1\}$ le sommet 1. On a pour $i = 2, 3$:

$$k_i^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(i,j) k_j^1.$$

On a donc $k_1^A = 0$ et 2 équations :

$$k_2^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(2,j) k_j^1 = 1 + \frac{1}{3} k_1^1 + 0 + \frac{2}{3} k_3^1 = 1 + \frac{2}{3} k_3^1.$$
$$k_3^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(3,j) k_j^1 = 1 + \frac{2}{3} k_1^1 + \frac{1}{3} k_2^1 + 0 = 1 + \frac{1}{3} k_2^1.$$

Il faut résoudre ce système à 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{aligned} k_3^1 =& 1 + \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3}k_3^1) \text{ donc } \frac{7}{9}k_3^1 = \frac{4}{3} \text{ et } k_3^1 = \frac{12}{7} \\ k_2^1 =& 1 + \frac{2}{3}k_3^1 = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7} > k_3^1. \end{aligned}$$

Logiquement, comme 3 envoie plus facilement vers 1 que 2, on observe que $\mathbb{E}_3(T_1) < \mathbb{E}_2(T_1)$.

Démonstration: Les deux expressions sont obtenues en conditionnant par la valeur de X_1 dans le calcul de $\mathbb{P}(X_n \in A)$: Pour $x \notin A$,

$$\begin{aligned} h_x^A &= \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_0 = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_1 = y, X_0 = x)\mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_1 = y) Q(x, y) \\ &= \sum_{y \in E} Q(x, y) h_y^A. \end{aligned}$$

De même pour k_x^A :

$$\begin{aligned} k_x^A &= \sum_n n\mathbb{P}(T_A = n | X_0 = x) \\ &= \sum_n n \sum_{y \in E} \mathbb{P}(T_A = n | X_1 = y, X_0 = x)\mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) \\ &= \sum_{y \in E} Q(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T_A = n | X_1 = y) \\ &= \sum_{y \in E} Q(x, y)\mathbb{E}(T_A | X_1 = y) \end{aligned}$$

T_A est le temps que met la chaîne $(X_0 = x, X_1, X_2, \dots)$ pour arriver en A. $T'_A = T_A - 1$ est donc le temps mis par la chaîne $X' = (X'_0 = X_1 = y, X'_1 = X_2, X'_2 = X_3, \dots)$ pour arriver en A (car au lieu de partir au temps 0 on part au temps 1).

On a donc

$$\mathbb{E}(T_A | X_1 = y) = \mathbb{E}(T'_A + 1 | X'_0 = y) = 1 + \mathbb{E}_y(T'_A).$$

T'_A est le temps mis par la chaîne $X' = (X'_0 = X_1, X'_1 = X_2, \dots)$ pour arriver en A. Ce temps est exactement le même que le chaîne $(X_0, X_1, \dots)$ conditionnée par $X_0 = y$ pour arriver en y. Donc

$$\mathbb{E}_y(T'_A) = k_y^A.$$

En reportant, on a

$$k_x^A = \sum_y Q(x, y)(1 + k_y^A) = 1 + \sum_y Q(x, y) k_y^A$$

car Q est une matrice de transition , donc stochastique.

On admet la minimalité dans ce cours.

$\square$

TD 2 - Temps d'arrêt

Exercice 1. Soit $R_k, k \geq 0$, des variables iid de Rademacher, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathbb{P}(R_k = 1) = 1/2, \\ \mathbb{P}(R_k = -1) = 1/2, \end{cases}$$

et X_n leur somme. C'est une chaîne de Markov d'après l'exercice 2. Soit T le premier temps ou la chaîne est passé deux fois par l'état 10 :

$$T = \min\{n \geqslant 0 : X_n = 10 \text{ et il existe un seul } k < n \text{ tel que } X_k = 10\}.$$

Montrer que T est un temps d'arrêt.

Exercice 2 (Extension de l'exercice 1)**.** On considère un joueur qui joue au jeu suivant au casino :

— Le joueur mise une certaine somme d'argent.
— Le croupier tire à pile ou face.
— Si le croupier fait pile, le joueur double sa mise, mais donne 1\$ de commission au croupier.
— Si le croupier fait face, le joueur perd sa mise.

Le joueur arrive avec une somme d'argent X_0, et son but est d'arriver à 10\$.

1. On suppose qu'il veut y arriver le plus vite possible. A chaque coup, il mise tout son capital, ou toute la partie de son capital nécessaire pour arriver à 10\$. Par exemple s'il a 6\$, il en mise 5, car s'il gagne il se retrouve avec $6 + 5 - 1 = 10$\$, et s'il perd il se retrouve avec $6 - 1 = 5$\$.
   (a) Donner le graphe et la matrice de transition de la chaîne de Markov .
   (b) Donner le système d'équations vérifié par les $h_k = \mathbb{P}_k(T_{10} < \infty), 0 \leqslant k \leqslant 10$, sans le résoudre.
   (c) Calculer la probabilité de succès si il arrive avec 3\$. En déduire $\mathbb{P}_3(T_0 < \infty)$.
2. Un autre joueur veut également arriver à 10\$; mais lui ne mise que 2\$ (ou 1\$ s'il n'a qu'un \$) à chaque coup.
   (a) Donner le graphe de la chaîne de Markov .
   (b) Donner les équations vérifiées par les h_k^{10}.

Exercice 3. Soit une population X_n qui s'éteint si $X_n = 0$ et autrement croît (ou décroît) à chaque temps n par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = p, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = q = 1 - p. \end{cases}$$

La matrice de transition est

$$Q(x, y) = \begin{cases} p \text{ si } x \neq 0, y = x + 1 \\ q \text{ si } y = x - 1, \\ 1 \text{ si } x = y = 0, \end{cases}$$

et $Q(x, y) = 0$ partout ailleurs.

Le but de l'exercice est de trouver la probabilité d'atteindre 0 en partant de $n \in \mathbb{N}$ (extinction)

On pose $h_n^0 = \mathbb{P}_n(T_0 < \infty)$.

1. Trouver une relation entre $h_n^0, h_{n-1}^0, h_{n+1}^0$.
   Rappel sur les suites récurrentes d'ordre 2 : Si (U_n) vérifie $aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, il faut considérer les racines (éventuellement complexes) x_1 et x_2 du polynôme $aX^2 + bX + c$. Si $x_1 \neq x_2$, U_n est de la forme
   $$U_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n,\ n \geq 0$$
   avec α et β a déterminer en calculant des valeurs particulières de la suite. Si $x_1 = x_2$ est une racine double,
   $$U_n = (\alpha + \beta n)x_1^n.$$
2. En déduire la forme générale de la suite $(h_n^0)_n$.
3. En utilisant le fait que $h_n^0 \in [0, 1]$, montrer que si $p \leq 1/2$, $\beta = 0$. Qu'en déduisez-vous pour la population ?
4. Donner la probabilité d'extinction en partant de n si $p > 1/2$.

Exercice 4. On consdière une puce qui saute sur les 8 sommets d'un cube en 3 dimensions. A chaque saut, elle choisit arbitrairement entre tous les sommets adjacents. On appelle $X = (X_n)$ la chaîne de Markov correspondante.

1. Donner le graphe de la chaîne de Markov .
2. On appelle arbitrairement O l'un des sommets. On appelle $C_i, i \geqslant 0$, l'ensemble des sommets qui sont atteignables en i sauts minimum depuis O. On a donc $C_0 = \{O\}$.
   (a) Décrire les ensembles C_i.
   (b) Soit $I_n, n \in \mathbb{N}$ défini par $X_n \in C_{I_n}$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition .
   (c) Calculer, pour la chaîne de Markov X, le temps moyen requis pour atteindre le sommet complètement opposé.

Exercice 5. 1. Soit $X_n, n \geqslant 1$ des variables aléatoires iid positives de même loi qu'une variable X. On sait que
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
   est une chaîne de Markov. Soit T un temps d'arrêt. Montrer que
   $$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T} X_k) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X).$$
   (Indice : le terme de gauche est égal à $\mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty} X_k 1_{\{T>k-1\}}$)
2. Sans l'hypothèse des X_k positifs, montrez que le résultat est toujours vrai si $E(T) < \infty$ et les X_k sont bornées.
3. On considère le modèle de population aléatoire avec paramètre $p \in [0, 1]$. Soit T_k le temps d'atteinte de $k \in \mathbb{N}$. On s'intéresse particulièrement au temps d'extinction T_0.
   (a) Montrez que pour $j > k \in \mathbb{N}$
   $$\mathbb{E}_j(T_{k+1} - T_k) = \mathbb{E}_1(T_0).$$
   (b) On suppose $p \geqslant 1/2$. Montrez par l'absurde que $\mathbb{E}(T_0) = \infty$.
   (c) On prend cette fois $p < 1/2$. Supposons $\mathbb{E}(T_0) < \infty$. Que vaut $\mathbb{E}(T_0)$?. Quel est le temps moyen que met une population initiale de taille k pour s'éteindre ?

Exercice 6. Pour la population de l'exercice 3, on souhaite calculer la distribution du temps d'extinction T_0 en partant de 1 individu. On note plus généralement T_j le premier temps de passage à j. On considère la fonction caractéristique

$$\varphi(s) = \mathbb{E}_1(s^{T_0}) = \sum_{n \geq 0} s^n \mathbb{P}_1(T_0 = n),\ 0 \leq s < 1.$$

1. Montrer que

$$\mathbb{E}_2(s^{T_0}) = \mathbb{E}_2(s^{T_1})^2 = \varphi(s)^2.$$

On pourra introduire pour $\mu_0 = \delta_2$:

$$T_{2\to 1} = \min\{n : X_n = 1\}$$
$$T_{1\to 0} = \min\{n : X_n = 0\} - T_{2\to 1}$$

et montrer que ces temps sont indépendants.

2. Montrer que

$$\mathbb{E}_1(s^{T_0} | X_1 = 2) = \mathbb{E}_2(s^{1+T_0}).$$

3. En déduire que pour tout s $\varphi(s)$ vérifie la relation

$$ps\varphi(s)^2 - \varphi(s) + qs = 0.$$

On pourra conditionner par la valeur de X_1.

4. Montrer que

$$\mathbb{E}_1(T_0) = \lim_{s\uparrow 1} \varphi'(s).$$

En déduire la valeur du temps moyen d'extinction lorsqu'il est fini (on peut utiliser les résultats de l'exercice 3).

Exercice 7. Un joueur joue à pile-ou face. La pièce a une probabilité p de tomber sur pile, et $q = 1-p$ de tomber sur face. Le joueur mise 1\$ a chaque fois et parie toujours sur pile.

1. Quel est la probabilité de perdre tout son capital de départ ? (Faire le lien avec l'exo précédent).
2. Le joueur décide que si jamais il atteint 10\$, il repart avec son pactole. Quelle est la probabilité qu'il y parvienne ?

Exercice 8. Un joueur a 2\$ et a besoin rapidement d'avoir 10\$. Il peut jouer son argent à pile ou face selon les règles suivantes : Si il gagne, il double sa mise, et si il perd, il perd sa mise. Il décide d'adopter une stratégie où il joue tout son argent à chaque fois si il a moins de 5\$, et sinon il ne joue que la quantité nécessaire pour arriver à 10\$.

1. Identifier la chaîne de Markov.
2. Donner le graphe de la chaîne de Markov.
3. Quelle est la probabilité pour le joueur d'atteindre son objectif ?
4. Quel temps mettra-t-il en moyenne pour que le jeu s'arrête (soit parce qu'il perd tout soit parce qu'il atteint 10\$) ?

3 Classification des états

On s'intéresse à la "dynamique" des chaînes de Markov dans ce chapitre. On dit qu'un état $x \in E$ mène à un état $y \in E$ si $\exists n \geqslant 0$ tel que

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = Q^n(x, y) > 0.$$

Cela équivaut à dire qu'il y a un **chemin possible entre** x **et** y, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 = x, x_1 \in E \ldots, x_{n-1} \in E, x_n = y$ tel que

$$Q(x_0, x_1) > 0, \ldots, Q(x_{n-1}, x_n) > 0.$$

On note dans ce cas

$$x \to y \text{ ou } x \overset{n}{\to} y.$$

Si $x \to y$ et $y \to x$, on note

$$x \leftrightarrow y$$

et on dit que x et y communiquent. On adopte la convention $x \leftrightarrow x$ (car on peut passer de x à x en 0 coups).

Exemple 7. Dans l'exemple d'une population (Exercice 3), en général, pour tout $n \geq 1$, $n \to 0$, mais $0 \to n$ pour aucun n excepté 0. On a aussi $n \leftrightarrow m$ pour tous $n, m > 0$.

On dit que $\{0\}$ est un état absorbant.

Cette propriété d'existence d'un chemin est en fait nécessaire : Si aucun chemin possible ne mène de x à y, alors on n'a aucune chance d'atteindre y.

D'une manière différente, on sait que la loi de X_n en partant de x est $Q^n(x, y)$ (proposition 4). Donc en notant $Q^n(x, y)$ les coefficients de la matrice de transition Q^n,

Théorème 4. *La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence et on peut décomposer E par l'ensemble des classes d'équivalences*

$$E = \cup_{x \in E} C_x$$

avec $C_x = C_y$ si $x \leftrightarrow y$, et $C_x \cap C_y = \emptyset$ sinon.

De plus l'ensemble des classes d'équivalence fournit une partition de E.

Par convention, $x \in C_x$ pour tout $x \in E$.

Démonstration: Prouvons que si deux états x et y ne communiquent pas, alors $C_x \cap C_y = \emptyset$. En effet, s'il existe $z \in C_x \cap C_y$, alors il existe un chemin de x à z car $x \to z$ et il existe un chemin de z à y. En mettant ces chemins bout a bout, on obtient un chemin $x \to z$. En raisonnant en partant de y, on trouve aussi un chemin $y \to x$; on a donc $x \leftrightarrow y$, contradiction.

Cela revient en fait à montrer la transitivité et la réflexivité de $\leftrightarrow$ (nécessaires d'après la définition) pour montrer que c'est une relation d'équivalence. □

Définition 6. *S'il n'y a qu'une classe, c'est-à-dire si tous les états communiquent, on dit que X est* **irréductible**.

Voir exos 1,exo :mat-to-classes

3.1 Récurrence et transience

Définition 7. *Soit $x \in E$. Pour $r \geq 0$, on note*

$$T_x^{(r)} \text{ le temps de } r\text{-ème retour en } x \text{ (ou } (r+1)\text{-ème passage),}$$

défini par récurrence par

$$T_x^{(0)} = T_x = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = x\}; \quad T_x^{(r+1)} = \min\{n > T_x^{(r)} : X_n = x\}.$$

Définition 8. *Un état x est dit* **récurrent** *si la probabilité de retour est* 1*, c'est-à-dire si*

$$\mathbb{P}_x(T_x^{(1)} < \infty) = 1.$$

Si cette propriété n'est pas vérifiée, on dit que l'état est **transient**.

Remarquons que $\mathbb{P}_x(T_x^{(0)} < \infty) = 1$ car $X_0 = x$ p.s. implique $T_x^{(0)} = 0$ p.s.. Par contre rien n'impose que $T_x^{(1)} < \infty$ dans ce cas.

L'idée de la récurrence est la suivante : si un point est récurrent, la chaîne en partant de x est sûre d'y repasser en un temps fini. Par la propriété de Markov, elle repartira de x et sera donc sûre d'y repasser. Elle y repassera encore, et encore, une infinité de fois. La transience est le comportement contraire : En partant de x, la chaîne n'a qu'une probabilité $p = \mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$ de repasser un jour en x. Si elle y repasse, elle aura encore une probabilité p de repasser encore une fois de plus. Elle aura en fait une probabilité p^r de passer r fois, et donc une probabilité 0 de repasser une infinité de fois, par opposition aux points récurrents.

Exercice 1. Dans l'exercice 1, quels sont les points récurrents ? Transients ?

Proposition 7. *Pour tous $x \in E, r \geq 0$, $T_x^{(r)}$ est un temps d'arrêt.*

Démonstration: On peut commencer par réfléchir à ce que ça veut dire et voir que c'est assez évident : "au temps n, je peux dire si oui ou non je suis passé r fois par x"...Plus formellement :

Il suffit de montrer que pour $n \geq 0$ l'événement $(T_x^{(r)} = n)$ est déterminé par ce qui se passe avant n :

$$\begin{aligned} T_x^{(r)} = n \Leftrightarrow & \exists \text{ une sous-partie } P \subseteq \{0, \ldots, n-1\} \text{ de cardinal } |P| = r \\ & \text{telle que } (X_i = x) \text{ pour } i \in P \text{ et } X_i \neq x \text{ pour } i \notin P \text{ et } X_n = x. \end{aligned}$$

Donc

$$(T_x^{(r)} = n) = \bigcup_{P \subseteq \{0,\ldots,n-1\}, |P| = r} (X_n = x;\ X_i = x, i \in P; X_i \neq x, i \notin P),$$

On pouvait le montrer par récurrence en remarquant

$$(T_x^{(r)} = n) = \cup_{0 \leq k < n} (T_x^{(r-1)} = k; X_m \neq x, k < m < n; X_n = x).$$

□

On appelle r-ème excursion

$$S_x^{(r)} = T_x^{(r+1)} - T_x^{(r)}$$

le temps passé loin de x entre le r-ème et le $r+1$-ème retour.

Proposition 8. *La loi de $S_x^{(r)}$ ne dépend pas de r : Pour tout $k \geq 1$*

$$\mathbb{P}(S_x^{(r)} = k) = \mathbb{P}(S_x^{(0)} = k) = \mathbb{P}_x(T_x^{(1)} = k).$$

De plus, $S_x^{(r)}$ est indépendante de $(X_k; k \leq T_x^{(r)})$. Les $S_x^{(r)}, r \geqslant 0$, forment donc une suite de variables IID (indépendantes et identiquement distribuées).

Démonstration: Rappelons tout d'abord que pour montrer que des variables $S_r, r \in \mathbb{N}$ sont indépendantes, il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, S_{r+1} est indépendante de $(S_0, \ldots, S_r)$ (se montre par récurrence).

On note $\mathcal{A}_-^{(r)}$ la tribu engendrée par les variables $X_0, \ldots, X_{T_x^{(r)}-1}$, et $\mathcal{A}_+^{(r)}$ celle engendrée par les $X_{T_x^{(r)}}, X_{T_X^{(r)}+1}, etc...$ En appliquant la **propriété de Markov forte** (Proposition 6), la chaîne

$$X^{(r)} = (X_0^{(r)} = X_{T_x^{(r)}} = x, X_1^{(r)} = X_{T_x^{(r)}+1}, X_2^{(r)} = X_{T_x^{(r)}+2}, \ldots)$$

est est une chaîne de Markov de matrice de transition Q qui démarre de $X_0^{(r)} = x$ (i.e. de loi initiale $\mu_0 = \delta_x$), qui est mesurable par rapport à $\mathcal{A}_+^{(r)}$, et qui est indépendante de $\mathcal{A}_-^{(r)}$. Donc $S_x^{(r)} \in \sigma(X^{(r)})$ est indépendante des $S_x^{(k)}, k < r$ car ces derniers sont mesurables par rapport à $\mathcal{A}_-^{(r)}$. Il reste à montrer qu'ils ont la même distribution. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_x^{(r)} = k) = & \sum_{y_1,\ldots,y_{k-1} \in E \setminus \{x\}} \mathbb{P}(X_{T_x^{(r)}+k} = x, X_{T_x^{(r)}+k-1} = y_{k-1}, \ldots, X_{T_x^{(r)}+1} = y_1) \\
= & \sum_{y_1,\ldots,y_{k-1} \in E \setminus \{x\}} \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_{k-1} = y_{k-1}, X_k = x) \text{ car } T_x^{(r)} = x \\
= & \mathbb{P}(S_x^{(0)} = k).
\end{aligned}$$

□

Une autre manière de voir les choses est de considérer le nombre de visites en un point x après 1 sachant $X_0 = x$:

$$V_x = \#\{n \geq 0 : X_n = x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = x}.$$

Proposition 9. *Soit $p_r = \mathbb{P}_x(V_x > r), r \in \mathbb{N}$. Alors $p_r = p_1^r$, et*

$$\mathbb{E}(V_x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r = \begin{cases} \infty & si\ p_1 = 1 \\ \frac{1}{1-p_1} & sinon \end{cases}$$

Démonstration: Montrons $p_r = p_1^r$ par récurrence. C'est évident pour $r = 0$. Supposons donc $p_r = p_1^r$. Remarquons que $(V_x > r)$ équivaut à $(T_x^{(r)} < \infty)$ (le r-ème retour, i.e. le $r+1$-ème passage, survient en un temps fini). Calculons p_r par récurrence :

$$\begin{aligned}
p_{r+1} = \mathbb{P}(T_x^{(r+1)} < \infty) &= \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty \text{ et } T_x^{(r+1)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(T_x^{(r+1)} < \infty | T_x^{(r)} < \infty) \mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(S_x^{(r)} < \infty) \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_x(T_x^{(1)} < \infty) \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty) \\
&= p_1 p_r = p_1 p_1^r = p_1^{r+1}.
\end{aligned}$$

Pour conclure on utilise la formule

$$\sum_r \mathbb{P}(V > r) = \mathbb{E}(\sum_r \mathbf{1}_{\{V > r\}}) = \mathbb{E}(\sum_{r=0}^{V-1}) = \mathbb{E}(V).$$

□

Proposition 10. *Soit X une chaîne de Markov . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

— *(i) $x \in E$ est récurrent*

— *(ii) si $X_0 = x$ p.s.,*

$$V_x = \infty \quad p.s.$$

— *(iii)*

$$\sum_{n \geq 0} Q^n(x, x) = \infty.$$

où Q est la matrice de transition

Démonstration: Le point -clé est de calculer l'espérance de V_x de deux manières. On a tout d'abord par le théorème de Fubini/Beppo-Levi

$$\mathbb{E}_x V_x = \mathbb{E}_x(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{X_n=x}) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{X_n=x}) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n\geq 0} Q^n(x,x).$$

On a donc :

$$\underbrace{p_1 = 1}_{(i)} \Leftrightarrow \mathbb{E}(V_x) = \infty \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} Q^n(x,x) = \infty}_{(iii)}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$V_x = \infty \ p.s. \Leftrightarrow \forall r, \mathbb{P}(V_x > r) = 1 \Leftrightarrow \forall r, p_1^r = 1 \Leftrightarrow p_1 = 1.$$

□

Proposition 11. *Au sein d'une même classe d'équivalence, les états sont soit tous récurrents, soit tous transients. On parle alors de* <u>*classe récurrente*</u> *ou de* <u>*classe transiente*</u>*.*

Démonstration:
Soit $x \leftrightarrow y$ deux états d'une même classe, avec x transient (donc $\sum_r Q^r(x,x) < \infty$). Il existe alors n, m tels que

$$\mathbb{P}_x(X_m = y) = Q^m(x,y) > 0, \quad \mathbb{P}_y(X_n = x) = Q^n(y,x) > 0.$$

Pour $r \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(X_{n+m+r} = x) \geq \mathbb{P}_x(X_m = y; X_{m+r} = y; X_{m+r+n} = x),$$

qui correspond à la probabilité du chemin $(x \xrightarrow{m} y \xrightarrow{r} y \xrightarrow{n} x)$. En décomposant la chaîne selon les temps d'arrivée en x et de r-ème passage en y, on en déduit :

$$\mathbb{P}_x(X_{n+m+r} = x) \geq Q^m(x,y) Q^r(y,y) Q^n(y,x).$$

Donc

$$\sum_r Q^r(y,y) \leq \frac{1}{Q^m(x,y) Q^n(y,x)} \sum_r Q^r(x,x) < \infty.$$

Si x est transient, $\sum_r Q^r(x,x) < \infty$, donc idem pour y. Si y est récurrent, $\sum_r Q^r(y,y) = \infty$, donc idem pour x. En inversant les rôles de x et y on montre l'équivalence. □

Définition 9. *Si une chaîne de Markov est* <u>*irréductible*</u>*, il n'y a qu'une seule classe. On parle alors de chaîne récurrente ou de chaîne transiente.*

Théorème 5 (Polya,1921)**.** *La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ est irréductible et récurrente si $d \leq 2$ et transiente si $d \geq 3$.*

Voir exo 4

Remarque 6. Si E est fini, il y a toujours au moins une classe récurrente. (Il est impossible que tous les états n'aient été visités qu'un nombre fini de fois en un temps infini).

Il peut y avoir plusieurs classes récurrentes.

Exemple 8. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est irréductible. Attention : Il n'y a qu'une seule classe et pourtant cette classe peut être transiente ! (Lorsque $p \neq 1/2$).

TD 3 - Classes d'équivalence

Exercice 1. Un sondeur se déplace au hasard dans un immeuble, sonnant parfois plusieurs fois chez la même personne. Cet immeuble comporte trois étages, et il n'y a qu'un ascenseur, qui de surcroît ne peut que monter. Trouvez la chaîne de Markov, et déterminer ses classes d'équivalences.

Exercice 2. Une chaîne de Markov a la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelles sont ses classes d'équivalence ?

On pourra dessiner un diagramme expliquant comment passer d'un état à l'autre.

Exercice 3. Soit X_n la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = p, \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = q,$$

où $p, q \in]0, 1[, p + q = 1$.

1. Montrez que $X = (X_n)$ est irréductible.
2. Montrez que $\mathbb{P}_0(X_n = 0) \neq 0$ ssi n est un multiple de 2.
3. Comptez le nombre de chemins $0 \xrightarrow{n} 0$ pour n pair.
4. On suppose $p = q = 1/2$. Calculez
$$\mathbb{P}_0(X_n = 0), n \in \mathbb{N}?$$
5. Déduisez-en si la chaîne de Markov est récurrente ou transiente.
6. Même questions pour p, q quelconques.

Exercice 4. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ (suite de l'exo précédent). On définit des variables aléatoires iid $X_n, n \geqslant 1$, sur $\mathbb{Z}^2$ telles que

$$\mathbb{P}(X_n = (-1, 0)) = \mathbb{P}(X_n = (1, 0)) = \mathbb{P}(X_n = (0, 1)) = \mathbb{P}(X_n = (0, -1)) = 1/4,$$

et $S_0 = 0; S_{n+1} = S_n + X_n$ est la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$.

On va montrer que c'est une chaîne de Markov récurrente.

1. Soit u le vecteur directeur de norme 1 dirigé en haut à droite pour la droite d'équation $y = x$, et $X_n^+ = \langle X_n, u \rangle$. De même soit $X_n^- = \langle X_n, v \rangle$ où v est un vecteur directeur unitaire de la droite d'équation $y = -x$ dirigé en bas à droite. Donnez les valeurs de X_n^+ et X_n^- en fonction des valeurs de X_n.

(a) Montrer que

$$X_n^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ avec probabilité } 1/2, \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

et qu'il en est de même de X_n^-.

(b) Montrer que X_n^+ et X_n^- sont indépendantes.

2. On appelle $S_n^+ = \sum_{k\le n} X_n^+$ la projection de S_n sur la droite "$y = x''$ et $S_n^- = \sum_{k\le n} X_n^-$.

(a) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_0(S_n^- = S_n^+ = 0)$?

(b) En déduire que la chaîne est récurrente.

3. Montrer que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est transiente pour $d \geq 3$.

Exercice 5. Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov transiente sur un espace d'états E dénombrable. Soit $x, y \in E$. Montrer que $\mathbb{P}_y(X_n = x) \to 0$.

Exercice 6 (Encore une autre manière de montrer que la marche aléatoire dissymétrique est transiente)**.** Soit $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ où les X_k sont des variables iid de Rademacher dissymétriques, c'est-à-dire $p = \mathbb{P}(X_k = 1) = p \neq 1/2$. Appliquer la loi des grands nombres à S_n et en déduire que la chaîne de Markov est transiente.

Exercice 7. On considère la situation de l'exercice 1 (TD1). On suppose désormais que lorsque le joueur atteint 10\$, il ajoute automatiquement 1\$ d'une source externe pour arriver à 11\$. Puis il se remet à jouer normalement en misant à chaque fois tout l'excédent qu'il a en gardant 10\$ de côté. S'il retourne à 10, il remet 1\$ automatiquement, etc...Exemples de chemins possibles :

— $10 \to 11 \to 12 \to 14 \to 10 \to 11 \to 10$

— $10 \to 11 \to 10 \to 11 \to 10$

1. Quel est l'espace d'états ? Dessiner le nouveau graphe de la chaîne de Markov , et identifier les classes récurrentes et les classes transientes.
2. Pour chaque classe C, donner la probabilité de $\mathbb{P}_2(T_C < \infty)$. Décrire en français le comportement général de la chaîne de Markov .

Exercice 8. Soit X la chaîne de Markov de l'exercice 8 du chapitre 1. Donner les classes transientes et les classes récurrentes.

Exercice 9. Soit X la chaîne de Markov de l'exercice 5 du TD1.

1. Donner les différentes classes d'équivalence.
2. En utilisant les résultats de la question 3, dire si ces classes sont transientes ou récurrentes.

Exercice 10. Soit $X = (X_n), Y = (Y_n)$ et $Z = (Z_n)$ les chaîne de Markov de l'exercice 7 du TD1.

1. Montrer que X a une infinité de classes d'équivalence.
2. Montrer que Z est irréductible.
3. Montrer que Y a une infinité de classes d'équivalence.

Exercice 11. Il existe au plus une unique classe dans laquelle une chaîne de Markov X passe un temps infini. Cette classe n'est pas forcément récurrente, et il peut n'y avoir aucune telle classe.

4 Distributions invariantes

Proposition 12. *Il existe au plus une unique classe dans laquelle la chaîne de Markov X passe un temps infini. Cette classe n'est pas forcément récurrente, et il peut n'y avoir aucune telle classe.*

Démonstration: La marche aléatoire dissymétrique sur $\mathbb{Z}$ est transiente, ce qui prouve que cette classe n'est pas forcément récurrente. Une chaîne de Markov déterministe qui ferait $0 \to 1 \to 2...$ prouve qu'il peut n'y avoir aucune classe où la chaîne passe un temps infini.

Passons à la preuve proprement dite. Supposons qu'il y ait deux classes C_1, C_2 comme ça. Alors il y a une suite de temps aléatoires $T_0 < T_1 < T_2 < T_3...$ tels que

$$X_{T_{2k}} \in C_1, X_{T_{2k+1}} \in C_2, k \in \mathbb{N}.$$

En posant $x = X_{T_0} \in C_1, y = X_{T_1} \in C_2, z = X_{T_2} \in C_1$, on a un chemin $(x = X_{T_0}, X_{T_0}+1, \ldots, X_{T_1} = y)$ qui va de x à y, et un chemin $(X_{T_1} = y, X_{T_1}+1, \ldots, X_{T_2} = z)$ qui va de y à z. Comme y et z sont dans la même classe, il existe de plus un chemin $z \to x$. En mettant ces deux derniers chemins bout-à-bout, il existe un chemin possible $y \to x$, donc x et y communiquent, donc ils sont dans la même classe. Contradiction. □

Analyse asymptotique d'une chaîne de Markov :

1. Découper les états en classes.
2. On analyse chaque classe séparément :
   — Si la classe est transiente, la chaîne s'échappe "à l'infini" en temps long, voir exercice 5, donc asymptotiquement elle n'est nulle part en particulier (ex : Marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$)...(ou alors elle est passée dans une classe récurrente et ne reviendra plus) :
   En effet, pour y transient, le nombre V_y de visites en y est p.s. fini, et le temps $T = \max\{n : X_n = y\}$ de dernier passage en y est p.s. fini. Donc

   $$\mathbb{P}(X_n = y) \leqslant \mathbb{P}(T \geqslant n) \to 0.$$

   (Remarque : T n'est pas un temps d'arrêt).
   — Si la classe est récurrente, elle visite les états les uns après les autres, en revenant sur ses pas (C'est notamment le cas lorsque la classe est finie). On se pose alors les questions suivantes :
   - Combien de temps passe-t-elle en moyenne dans chaque état ? C'est-à-dire, que vaut

     $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k = x\}} \text{ pour } x \text{ dans une classe récurrente ?}$$

   - Y'a-t-il convergence (pour chaque x, y de la classe) de $\mathbb{P}_y(X_n = x)$? Si oui, la limite dépend-elle de y ?

Pour simplifier, on considère qu'il n'y a qu'une seule classe (quand il y en a plusieurs, on peut utiliser les résultats de la partie 2 pour savoir quelle est l'unique classe dans laquelle la chaîne passera un temps infini, et avec quelle probabilité, comme dans l'exercice 7)

Définition 10. *Soit μ une mesure sur E. On dit que μ est invariante, ou stationnaire, pour la chaîne de Markov X de matrice de transition Q si $\mu Q = \mu$.*

μ est une mesure invariante ssi pour tout $x \in E$

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} Q(y, x)\mu(y).$$

(Il suffit de regarder la coordonnée x de l'égalité $\mu = \mu Q$.)

C'est équivalent à dire que si X_0 a la loi μ, alors X_1 aussi (et donc par récurrence tous les autres temps aussi) :

Proposition 13. *Si μ_0 la distribution initiale est invariante, alors μ_0 est également la distribution de $X_1, X_2, \ldots,$ c'est-à-dire pour tout $x \in E$*

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(X_1 = x) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_2 = x) = \cdots = \mu_0(x).$$

Cette relation caractérise les distributions invariantes.

Démonstration: La loi de X_1 est $\mu_0 Q = \mu_0$, celle de X_2 est $\mu_0 Q^2 = (\mu_0 Q)Q = \mu_0 Q = \mu_0$, etc... De manière plus explicite :

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(X_1 = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_{\mu_0}(X_1 = x \mid X_0 = y)\mathbb{P}_{\mu_0}(X_0 = y) = \sum_{y \in E} Q(y, x)\mu_0(y) = \mu_0(x).$$

□

Rappel : Une distribution est une mesure dont la masse totale est 1 (c'est-à-dire une mesure pour laquelle la somme des masses de tous les termes vaut 1). On dit aussi une mesure de probabilité, ou juste une probabilité.

Donc une distribution invariante est une mesure invariante dont la masse vaut 1.

La mesure est dite invariante car si le premier état est tiré au hasard selon cette loi μ, alors le second point aura la même loi (mais dans ce cas il ne peut s'agir que de lois de probabilités) :

Exercice 1. On considère une puce qui saute sur les trois sommets d'un triangle. Quand elle est sur le sommet 1, elle saute automatiquement sur le sommet 2. Quand elle est en 2 ou 3, elle choisit un des 2 sommets avec probabilité 1/2.

1. Donner la matrice de transition .
2. Trouver la (les) distribution(s) invariante(s).

Remarque 7. Les équations (où les inconnues sont les $a_x, x \in E$)

$$a_x = \sum_{y \in E} Q(y, x)a_y, x \in E,$$

qui caractérisent les mesures invariantes, sont a ne pas confondre avec les équations

$$a_x = \sum_{y \in E} Q(x, y)a_y,$$

dont la plus petite solution donne les probabilités d'absorption.

L'idée cachée derrière une distribution invariante est la suivante (nous allons la concrétiser dans cette partie) : le temps moyen passé par la chaîne en un état x est proportionnel à $\mu_0(x)$. De plus dans certains cas, on a la convergence en loi $X_n \to \mu_0$, i.e. $\mathbb{P}_y(X_n = x) \to \mu_0(x)$ indépendamment de y (ces résultats sont faux dans un cadre général mais on précisera par la suite).

Quelle est la conséquence de l'existence d'une mesure invariante ? Intuitivement, la fréquence de retour à un état x dépend du nombre de points y qui “pointent” vers x, c'est-à-dire tels que $Q(y, x)$ est “grand”, pondérés par la probabilité de passer vers ces points y. En d'autres termes, le temps moyen passé en x sera proportionnel à

$$\sum_y \mu_0(y)Q(y, x) = \mu_0(x)$$

car μ_0 est invariante !

Si la mesure de départ n'est pas invariante, on espère qu'on va “converger” vers la distribution invariante. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

Exercice 2. Donner toutes les mesures et les probabilités invariantes de la chaîne de Markov qui a pour matrice de transition

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

en fonction de a.

Remarquons aussi que si μ est une mesure invariante, et $t \geqslant 0$, alors $t\mu$ aussi est invariante :

$$Q(t\mu) = t(Q\mu) = t\mu.$$

On dit que μ et $t\mu$ sont égales à une constante près. En particulier, si la masse totale de μ, c'est-a-dire $\mu(E)$, est finie,

$$\pi(x) := \frac{\mu(x)}{\mu(E)}$$

est une probabilité invariante.

Modulo cette liberté, y'a-t-il beaucoup de mesures invariantes ?

Proposition 14. *Soit μ une mesure invariante sur une chaîne irréductible. Alors si μ est non-nulle, $\mu(x) > 0$ pour tout $x \in E$. Si $\exists x \in E$ tel que $\mu(x) < \infty$, alors $\forall y \in E, \mu(y) < \infty$.*

Démonstration: Comme $\sum_{y\in E} \mu(y) \neq 0$, il existe $y \in E$ pour lequel $\mu(y) \neq 0$. Comme la chaîne est irréductible, $\exists n \geq 0$ tel que $Q^n(y,x) > 0$. Comme μ est invariante, $\mu Q^n = \mu$:

$$\mu(x) = \sum_{z\in E} \mu(z) Q^n(z,x) \geqslant Q^n(y,x)\mu(y) > 0.$$

De même, $\exists m \in \mathbb{N} : Q^m(x,y) > 0$, et si $\mu(x) < \infty$,

$$\mu(x) = \sum_{z} Q^m(z,x)\mu(z) \geqslant \mu(y) Q^m(y,x)$$

et donc $\mu(y) < \infty$.

□

4.1 Théorème ergodique

Le théorème de convergence en moyenne p.s. par excellence est la loi des grands nombres :

Théorème 6 (LGN)**.** *Soit $(Z_n)_n$ des variables IID avec $\mathbb{E}|Z_1| < \infty$. Alors p.s.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \to \mathbb{E}(Z_1).$$

Si l'on n'a pas l'hypothèse $\mathbb{E}|Z_1| < \infty$, le résultat est encore vrai si les V_i sont positifs ou nuls (avec éventuellement $\mathbb{E}(Z_1) = +\infty$).

Théorème 7 (Théorème ergodique)**.** *Soit X une chaîne de Markov irréductible de distribution initiale μ_0. Pour $n \geq 1$, on note $V_x(n)$ le nombre de visites en x avant le temps n*

$$V_x(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k = x}.$$

Alors pour tout état $x \in E$

$$\frac{1}{n}V_x(n) \to \pi(x) := \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})} \text{ p.s.}$$
$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(V_x(n)) \to \pi(x)$$

Si X est transiente, $\pi = 0$. Si μ_0 est invariante, alors $\mu_0 = \pi$. On en déduit les 2 faits suivants :
- *Une chaîne de Markov transiente n'admet pas de distribution invariante*
- *Il y a unicité de la distribution invariante, quand elle existe.*

Selon la légende, une des raisons pour lesquelles Markov a introduit son modèle est qu'il a eu un débat avec un autre mathématicien qui prétendait qu'il était impossible d'avoir une Loi des Grands Nombres avec des variables qui ne sont pas indépendantes. Ce résultat en donne donc un contre-exemple (avec $Z_k = \mathbf{1}_{\{X_k=x\}}$).

Démonstration: Si la chaîne est transiente, le nombre de visites est p.s. fini. De plus, la probabilité de retour n'est pas 1, donc

$$\mathbb{E}(T_x^{(1)}) \geqslant +\infty \times \mathbb{P}(T_x^{(1)} = \infty) = \infty$$

et donc

$$\frac{V_x(n)}{n} \to 0 = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})}$$

p.s..

Supposons la chaîne récurrente. Alors $T_x^{(r)} < \infty$ pour $r \in \mathbb{N}$ et $T_x^{(r)} \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$.

Lemme 1.

$$\frac{T_x^{(r)}}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{E}(T_x^{(1)})$$

Démonstration: Par la LGN pour des VA positives :

$$\frac{T_x^{(r)}}{r} = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} S_x^{(k)}}{r} \to \mathbb{E}(S_x^{(0)}) = \mathbb{E}(T_x^{(1)})$$

□

Comme il y a eu $V_x(n)$ visites au temps n, on a

$$T_x^{(V_x(n)-1)} \leq n \leq T_x^{(V_x(n))}$$

On a donc pour n tel que $V_x(n) \neq 0$,

$$\frac{T_x^{(V_x(n)-1)}}{V_x(n)} \leq \frac{n}{V_x(n)} \leq \frac{T_x^{(V_x(n))}}{V_x(n)}$$

en utilisant le Lemme 1 et le fait que $V_x(n) \to \infty$ p.s. on peut donc conclure que $\frac{T_x^{(V_x(n)-1)}}{V_x(n)} \cdot \frac{V_x(n)}{V_x(n)-1} = \frac{T_x^{(V_x(n)-1)}}{V_x(n)-1}$ et $\frac{V_x(n)}{V_x(n)-1} \to 1$

$$\frac{n}{V_x(n)} \to \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) p.s.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{x\in E} V_x(n) = n.$$

On a donc $V_x(n)/n \leqslant 1$. Par le TCD,

$$\mathbb{E}(V_x(n)/n) \to \pi(x).$$
$$\frac{1}{n}\sum_k \mathbb{P}_{\mu_0}(X_k = x) \to \pi(x).$$

Si μ_0 est invariante, $X_k \sim \mu_0$ et donc

$$\pi(x) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_k \mu_0(x) = \mu_0(x).$$

□

4.2 Existence

Proposition 15. *On dit qu'une mesure μ est réversible pour une chaîne de Markov de matrice de transition Q si*

$$\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x), x, y \in E,$$

Toute mesure réversible est aussi invariante.

Si de plus μ est une distribution, la chaîne de Markov est dite "réversible". C'est équivalent à $\mathbb{P}_\mu(X_0 = x, X_1 = y) = \mathbb{P}_\mu(X_0 = y, X_1 = x)$.

Démonstration: Pour $x \in E$

$$\sum_{y\in E} Q(y,x)\mu(y) = \sum_{y\in E} \mu(x)Q(x,y) = \mu(x)\sum_{y\in E} Q(x,y) = \mu(x)$$

c'est-à-dire $\mu Q = \mu$. □

cf. exo 5.

Remarque 8. Une chaîne de Markov est dite **symétrique** si sa matrice de transition Q vérifie $Q(x,y) = Q(y,x)$ pour tous $x, y \in E$. Dans ce cas, toute mesure constante est réversible, et donc invariante.

Il existe toujours une mesure invariante pour une chaîne récurrente. On la construit comme ceci :

Proposition 16. *Soit X une chaîne de Markov IR (irréductible récurrente), et $x \in E$. On appelle μ_x la mesure définie par*

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbf{1}_{X_n=y}), y \in E$$

le nombre moyen de visites en y entre 2 passages en x. Alors pour tout x, μ_x est une mesure invariante.

Remarquons que $\mu_x(x) = 1$.

On a donc $0 < \mu_x(y) < \infty$ pour tout $x, y \in E$ en vertu de la proposition 14.

Démonstration: Vérifions que cette mesure est bien invariante.

Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned}
\mu_x(y) &= \mathbb{E}_x(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_n=y \text{ et } n\leq T_x^{(1)}}) \\
&= (\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = y \text{ et } n \leq T_x^{(1)})) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y, X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y | X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \text{ on conditionne par la valeur de } X_{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y | X_{n-1} = z)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&\quad \text{car } (T_x^{(1)} \geq n) = (T_x^{(1)} \leq n-1)^c \text{ est mesurable par rapport à } X_0, X_1, \ldots, X_{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} Q(z,y)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = z, T_x^{(1)} \geq n+1) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y)\mathbb{E}_x(\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbf{1}_{X_n=z}) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y)\mathbb{E}_x(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbf{1}_{X_n=z}) \text{ car } X_0 = z \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow X_{T_x^{(1)}} = z \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y)\mu_x(z)
\end{aligned}$$

Comme $\mu_x(x) > 0$, pour tout $y \in E, \mu_x(y) > 0$. Comme $\mu_x(x) < \infty$, pour tout $y \in E, \mu_x(y) < \infty$. □

Comme la chaîne est récurrente, on sait que $T_x^{(1)} < \infty$ p.s.. Par contre, rien n'indique que $\mathbb{E}T_x^{(1)} < \infty$. Si c'est le cas, on en déduit

$$\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x T_x^{(1)}}$$

Avec $x = y$, ça nous donne notamment une relation entre la valeur de la distribution invariante en x et le temps de retour moyen :

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x^{(1)}}$$

Théorème 8. *Soit X une chaîne de Markov irréductible récurrente. Alors on a les équivalences suivantes :*

(i)X admet une distribution invariante (unique grâce au théorème ergodique)

(ii) Tout état x vérifie

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) < \infty$$

(iii) Un état x le vérifie.

On a alors

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$$

et π est aussi la mesure donnée par le théorème ergodique.

Démonstration plus bas.

Si X vérifie la condition (i) (ou de manière équivalente (ii) et (iii)), on dit que X est **récurrente positive**, sinon on dit qu'elle est **récurrente nulle**.

Théorème 9. *Soit X une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini. Alors X est IRP.*

Démonstration: Montrons tout d'abord qu'elle est récurrente. Comme E est fini et $\sum_{x\in E} V_x = \infty$ p.s., il existe un état $x \in E$ tel que $\mathbb{P}(V_x = \infty) > 0$, et donc $\mathbb{E}(V_x) = \infty$ et d'après la Proposition 9 $p_1 = \mathbb{P}(T_x^{(1)} < \infty) = 1$, donc $x \in E$ est récurrent et par irréductibilité tous les états sont récurrents.

Soit $x \in E, \mu_x$ la mesure définie à la proposition 16. Comme $\mu_x(y) < \infty$ pour $y \in E$, $\mu_x(E) = \sum_{y\in E} \mu_x(y) < \infty$, et donc

$$\pi = \frac{\mu_x}{\mu_x(E)}$$

définit une distribution invariante. □

Exemple 9. Comme la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ n'admet pas de distribution stationnaire, elle est récurrent nulle. C'est une autre manière de prouver que $\mathbb{E}T_0 = \infty$.

Le temps moyen de retour pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ est également infini, c'est donc également une chaîne de Markov irréductible récurrente nulle.

Démonstration: (ii)$\Rightarrow$ (iii) est évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$ On a

$$\mu_x(E) = \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} 1_{X_n=y} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \sum_{y} 1_{X_n=y} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} 1 = \mathbb{E}_x T_x^{(1)}.$$

Comme μ_x est une mesure invariante, si sa masse est finie, alors

$$\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(E)} = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}, y \in E.$$

est une distribution invariante.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Par unicité de la limite dans le théorème ergodique,

$$\frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})} = \pi(x) > 0$$

□

Même si c'est théoriquement intéressant, $\mathbb{E}_x T_x^{(1)}$ (ou $\pi_x(y)$) est dur à calculer en pratique : Il faut résoudre un systèmes de $|E|$ équations a $|E|$ inconnues.

Proposition 17 (Théorème ergodique dans le cas récurrent positif)**.** *Soit X une chaîne de Markov récurrente positive, et π sa distribution invariante. Pour toute fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ bornée, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to \overline{f} := \sum_{x\in E} f(x)\pi(x).$$

Cela donne une manière d'estimer l'espérance $\mathbb{E}(f(X))$ pour une variable X de loi π. Ce type de méthode rentre dans les "méthodes de Monte-Carlo", où la simulation directe d'une variable de loi π est compliquée.

Démonstration:

On a pour la fonction f,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \overline{f}\right| = \left|\sum_{x\in E} f(x)\left(\frac{V_x}{n} - \pi(x)\right)\right| \leqslant \sum_{x\in E}\left|\left|f(x)\right|\left|\frac{V_x}{n} - \pi(x)\right|\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est dénombrable on numérote ses points $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. On choisir N_ε tel que $\sum_{i>N_\varepsilon} \pi(x_i) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. C'est possible car $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(x_i) < \infty$, et donc le reste de la série $\sum_{i=N}^{\infty} \pi(x_i) \to 0$ quand $N \to \infty$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \overline{f}\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |f(x_i)|\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi(x)\right| + \sum_{i>N_\varepsilon} |f(x_i)|\left|\frac{V_{x_i}(n)}{n} - \pi(x)\right| \\
&\leqslant \|f\|\left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi(x)\right| + \sum_{i>N_\varepsilon}\left(\frac{V_{x_i}(n)}{n} + \pi(x)\right)\right) \\
&= \|f\|\left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi(x)\right| + \left(1 - \sum_{i\leqslant N_\varepsilon}\frac{V_{x_i}(n)}{n}\right) + \sum_{i>N_\varepsilon}\pi(x_i)\right) \quad \text{car } \sum_{i\leqslant N_\varepsilon}\frac{V_{x_i}(n)}{n} + \sum_{i>N_\varepsilon}\frac{V_{x_i}(n)}{n} = 1 \\
&= \|f\|\left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi(x)\right| + \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\pi(x_i) - \sum_{i\leqslant N_\varepsilon} V_{x_i}(n)\right) + 2\sum_{i>N_\varepsilon}\pi(x_i)\right) \quad \text{car } 1 = \sum_{i\leqslant N_\varepsilon}\pi(x_i) + \sum_{i>N_\varepsilon}\pi(x_i) \\
&\leqslant \|f\|\left(2\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\left|\frac{V_{x_i}(n)}{n} - \pi(x)\right| + 2\varepsilon/(4\|f\|)\right).
\end{aligned}$$

Comme $V_x(n)/n - \pi(x) \to 0$ pour chaque x, la somme finie $\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\left|\frac{V_{x_i}(n)}{n} - \pi(x)\right|$ converge aussi vers 0.

Soit n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, cette somme est $\leqslant \frac{\varepsilon}{4\|f\|}$. Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \overline{f}\right| \leqslant \|f\|(\varepsilon/4\|f\| + \varepsilon/2\|f\|) < \varepsilon.$$

□

Bilan

- Une chaîne de Markov irréductible admet au plus une distribution invariante (théorème ergodique).
- Elle en admet une ssi elle est récurrente positive ($\Leftrightarrow \mathbb{E}(T_x^{(1)}) < \infty$)
- Elle peut n'en admettre aucune même si la chaîne de Markov est récurrente (marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)
- Elle admet toujours au moins une mesure invariante si elle est récurrente. (pas montré dans ce cours : cette mesure est unique à une constante près)
- Elle peut admettre plusieurs mesures invariantes (non-liées par une constante) si elle est transiente (marche aléatoire dissymétrique sur $\mathbb{Z}$)
- Si la chaîne de Markov n'est pas irréductible, tout peut arriver, l'analyse se fait classe par classe, cf. exo 2.

TD 4 - Mesures invariantes

Exercice 1. On considère une puce qui saute sur les trois sommets d'un triangle. Quand elle est sur le sommet 1, elle saute automatiquement sur le sommet 2. Quand elle est en 2 ou 3, elle choisit un des 2 sommets avec probabilité 1/2.

1. Donner la matrice de transition .
2. Trouver la (les) distribution(s) invariante(s).

Exercice 2. chaînes non-irréductibles Soit X une chaîne de Markov à espace d'états E fini, avec des classes récurrentes $R_1, R_2, R_3, \dots$ et des classes transientes $T_1, T_2, T_3, \dots$.

1. Montrer que toute mesure invariante μ vérifie $\mu(T_i) = 0$ pour tout i.
2. Comme les classes récurrentes sont fermées (on ne peut pas passer d'une classe récurrente à une autre classe), on peut considérer la chaîne de Markov sur chaque classe séparément. On note μ_i une mesure invariante pour la classe R_i.

   Pour tout i, soit $\lambda_i \geq 0$ un nombre positif. Montrer que
   $$\mu(x) = \begin{cases} \lambda_i \mu_i(x) \text{ si } i \in R_i, \\ 0 \text{ si } x \in T_j \text{ pour un certain } j, \end{cases}$$
   est une mesure invariante.
3. Montrer que toute mesure invariante peut s'écrire de cette manière.
4. En déduire qu'il peut y avoir plusieurs distributions invariantes.

Exercice 3. Donner toutes les mesures et les probabilités invariantes de la chaîne de Markov qui a pour matrice de transition
$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & 0 \end{pmatrix}$$
en fonction de a.

Exercice 4.
1. Donner une mesure invariante non nulle pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ et montrer qu'il n'existe pas de distribution invariante.
2. Montrer que la marche aléatoire dissymétrique sur $\mathbb{Z}$ admet plus d'une mesure invariante (même à une constante près). Existe-t-il une distribution invariante ?

Exercice 5. L'urne d'Ehrenfest N particules sont dans une boite, séparées par un petit trou. A chaque instant une particule passe de la moitié gauche à la moitié droite, ou le contraire. On note X_n le nombre de particules à gauche au temps n. ($N - X_n$ est donc le nombre de particules à droite). La probabilité qu'une particule soit éjectée dépend de la "pression" présente :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = X_n/N \quad \text{(pression à gauche)},$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = (N - X_n)/N \quad \text{(pression à droite)}.$$

1. Montrer que c'est un chaîne de Markov irréductible et récurrente.
2. Chercher une éventuelle distribution invariante dans l'urne d'Ehrenfest.

Exercice 6. Soit μ une mesure invariante pour une matrice de transition Q. On définit la chaîne duale

$$\hat{Q}(x,y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} Q(y,x)$$

Montrer que c'est une chaîne de Markov irréductible et récurrente.

Exercice 7 (Moteur de recherche)**.** On appelle N le nombre de pages web. On considère un internaute qui surfe sur le web en cliquant au hasard sur chaque page web. On note $x \to y$ si une page x pointe vers une page y. On appelle crédit accordé par une page x à une page y la valeur

$$c_{x\to y} = \frac{\mathbf{1}_{x\to y}}{\#\text{liens dans la page } x}$$

1. Quelle condition internet doit vérifier pour que la chaîne de Markov soit irréductible ?
2. On suppose que c'est le cas. Pourquoi y'a-t-il une unique distribution invariante π ? Quelles relations doit vérifier μ ?
3. On propose d'utiliser $\pi(x)$ comme mesure de l'importance d'une page dans les résultats d'un moteur de recherche. Qu'en pensez-vous ? Sans rien prouver, comment feriez-vous pour estimer μ ?

Exercice 8. On considère une particule qui saute de sommets en sommets sur un cube en trois dimensions. Elle ne peut sauter que sur un sommet adjacent, c'est-à-dire relié par une arête. Elle n'a pas de préférence de direction.

1. Pourquoi y'a-t-il une unique distribution invariante ? Quelle est-elle ?
2. Quel est le temps moyen de retour en un sommet donné ?
3. Soit x et y deux sommets du cubes. En moyenne, combien de temps la puce passe-t-elle en x entre deux passages en y ?
4. * Soit x et y deux sommets opposés du cube (c'est-à-dire pas sur la même face). Quel est le temps moyen pour aller de x à y ? (Indice : utiliser l'exercice 4.)

Exercice 1 (Remplacement de machines)**.** On modélise le cycle de renouvellement d'une machine par une chaîne de Markov. Au temps 0 on affecte une machine à une certaine fonction. La machine a une probabilité $p_i \in (0,1)$ de passer de la i-ème à la $i+1$-ème année, et si elle flanche, elle est remplacée par une machine neuve identique.

1. Ecrire le graphe de la chaîne de Markov. Montrer qu'elle est irréductible.

2. (a) Montrer qu'il existe une mesure invariante μ telle que $\mu(0) = 1$ ssi

$$v_N := \prod_{k=0}^{N} p_k \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

   (b) En utilisant le rappel sur les produits infinis, vérifier que cette condition est vérifiée ssi $\sum_{k\geq 1}(1-p_k) = \infty$.

   (c) En déduire que si $\sum_{k\geq 0}(1-p_k) < \infty$, $\mathbb{E}(\text{temps de remplacement}) = \infty$.

3. On suppose qu'il n'y a pas de vieillissement : la probabilité de passer de l'année i à l'année $i+1$ est la même pour tout i. On note $p \in (0,1)$ cette probabilité.

   (a) Quel est le temps moyen de remplacement ? Qu'en déduit-on pour une machine qui vieillit normalement ?

Rappel sur les produits infinis.

Théorème 10. *Pour toute suite de nombres $p_n \in (0,1]$,*

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \to l \in [0,1]$$

avec

$$l = 0 \Leftrightarrow \sum_{k\geq 0}(1-p_k) = \infty.$$

Démonstration:
On pose

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} p_k,$$

on s'intéresse à la convergence de la suite Π_n. On a $\Pi_n > 0$ et

$$\log(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(p_k)$$

et Π_n converge ssi $\log(\Pi_n)$ converge. Il faut donc au moins que $\log(p_k) \to 0$ et donc que $p_k \to 1$.

Remarquons que si p_k ne tend pas vers 1 il existe $\eta < 1$ tel que $p_k \leq \eta$ pour une infinité de k et donc pour tout $q \geq 0$ on a $\Pi_n \leq \eta^q$ pour n suffisamment grand, d'ou $\Pi_n \to 0$.

Si par contre $p_k \to 1$ on pose $q_k = 1 - p_k \to 0$ et on a

$$\log(p_k) = \log(1-q_k) \sim -q_k$$

et donc les stg $\log(p_k)$ et $-q_k$ ont même nature.

Donc $\Pi_n \to 0$ ssi $\log(\Pi_n) \to -\infty$ ssi $\sum q_k = \infty$.

□

5 Convergence à l'équilibre

Rappel Soit $\mu_n, n \geqslant 0$, une suite de mesures sur E. On dit que la suite $\mu_n, n \geqslant 1$ converge vers une mesure μ, noté $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ si

$$\forall x \in E, \mu_n(x) \to \mu(x).$$

Proposition 18. *On suppose E fini. On sait que pour $x \in E$, pour tout $n \geq 0$, $\mu_{x,n} = (Q^n(x,y))_{y\in E} = (\mathbb{P}_x(X_n = y))_{y\in E}$ est une mesure de probabilité.*

Si il existe $x \in E$ et une mesure de probabilité π telle que $\mu_{x,n} \to \pi$ alors π est une distribution invariante.

Démonstration: Soit $y \in E$. Alors on conditionne par la valeur de X_n

$$\begin{aligned}
\pi(y) = \lim_n \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y) &= \lim_n \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = z, X_{n+1} = y) \\
&= \lim_n \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = z)\mathbb{P}_x(X_{n+1} = y | X_n = z) \\
&= \sum_{z\in E} \lim_n \mathbb{P}_x(X_n = z)Q(z,y) \\
&= \sum_z \pi(z)Q(z,y) = (\pi Q)(y).
\end{aligned}$$

□ C'est en fait vrai pour toute mesure initiale (pas uniquement δ_x).

Exemple 10. On considère la matrice de transition de l'exo 7

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

On a vu à l'exo 7 du TD1 que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(X_n = 1) = 1/2 + \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_1(X_n = 2) = 1/2 - \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_2(X_n = 2) = 1/2 + \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_2(X_n = 1) = 1/2 - \lambda^n/2 \to 1/2,
\end{aligned}$$

ou $\lambda = (2a-1) \in (-1,1)$. donc $\mu = (1/2)\delta_1 + (1/2)\delta_2$ est une mesure invariante. (On pouvait aussi faire le calcul directement...)

Peut-on dire que si π est une distribution invariante, alors la loi de X_n converge vers π ? La réponse est vraie sous certaines hypothèses, mais il faut tout de même exclure certaines situation désagréables...

5.1 Périodicité

Exemple 11. Soit la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le distribution $(1/2)(\delta_1 + \delta_2)$ est invariante, mais comme X_n oscille indéfiniment entre 1 (n pair) et 2 (n impair), sa loi ne peut pas converger...

On dit qu'une chaîne irréductible est périodique de période p si l'on peut décomposer l'espace d'états en une union disjointe

$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_p$$

telle que $\mathbb{P}(X_1 \in E_{\overline{k+1}} | X_0 \in E_k) = 1$ (avec $\overline{p+1} = 1, \overline{k} = k$ autrement), et p est le plus grand entier tel que l'on puisse le faire (en effet, c'est toujours vrai pour $p = 1$). Autrement dit, la chaîne saute toujours de E_k vers $E_{\overline{k+1}}$:

$$E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_p \to E_1 \to E_2 \ldots$$

Exemple 12. En appelant I les entiers impairs et P les entiers pairs, la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est 2-périodique avec la décomposition $\mathbb{Z} = I \cup P$. Il en est de même avec l'urne d'Ehrenfest. Comme $Q^2(x,x) > 0$ pour n'importe quel état x, la période est 2.

On voit en particulier que pour n'importe quel $x \in E, n \in \mathbb{N}$, si

$$Q^n(x,x) = \mathbb{P}(X_n = x \mid X_0 = x) > 0,$$

alors cela signifie qu'il y a un chemin $x \xrightarrow{n} x$ possible. Ce chemin parcourt un certain nombre de fois les classes $E_1 \to ... \to E_p \to E_1$, ce qui implique que n est un multiple de p. (la réciproque n'est pas forcément vraie).

Exercice 2. Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition Q.Soit $X'_n := X_{pn}, n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X' est une chaîne de Markov de matrice de transition $Q' := Q^p$.
2. On suppose que X est p-périodique, et que la décomposition correspondante est $E = E_1 \cup \cdots \cup E_p$. Montrer que les classes d'équivalence de X' sont les $E_i, i = 1, \ldots, p$, et qu'elles sont toutes récurrentes.

Une chaine qui n'a pas de période est dite **apériodique**.

Théorème 11. *Soit X une chaîne de Markov irréductible. Alors les quatre propositions sont équivalentes*

(i) X a pour période p.
(ii) $\text{pgcd}(\{n : Q^n(x,x) > 0\}) = p$ *pour un* $x \in E$
(iii) $\exists x \in E, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $Q^{np}(x,x) > 0$ pour $n \geqslant n_0$.
(iv) (ii) et (iii) valent pour tout $x \in E$

Démonstration: [Démonstration partielle] Dans le cas $p = 1$. (le cas général est identique)
(iii)⇔ (iv) Soit $y \in E, m, q$ tq $x \xrightarrow{q} y, y \xrightarrow{m} x$. Alors pour $n \geqslant n_0 + m + q$,

$$Q^n(y,y) \geqslant Q^m(y,x)Q^{n-m-q}(x,x)Q^q(x,y) > 0.$$

(iii) implique (ii) : Il suffit de voir que $\text{pgcd}(n_0, n_0 + 1) = 1$
(ii) implique (i) : Par contraposée, si (i) n'est pas vérifiée, montrons par l'absurde que (ii) n'est pas vérifiée : supposons qu'il existe $p > 1$ tel que la période est p, $Q^n(x,x) > 0$ impliqe que n est un multiple de p, donc p divise le pgcd, et (ii) n'est pas vérifiée pour $p = 1$.
(i) implique (ii) : On suppose donc que $p = 1$. Preuve par l'absurde : supposons que le pgcd est $p \geqslant 2$. Cela signifie qu'on ne peut revenir en x qu'en un temps n qui est un multiple de p. On appelle E_i la classe des états accessibles en i coups depuis x, pour $1 \leqslant i \leqslant p$:

$$E_i = \{y \in E : Q^i(x,y) > 0\}.$$

Comme la chaine n'est pas périodique, cette suite ne peut pas constituer une suite d'ensembles tels que la chaîne fasse $E_1 \to E_2 \to \dots E_p \to E_1 \dots$, donc $\exists i < j, j \neq i+1$, $y \in E_i, z \in E_j$ tels que $Q(y,z) > 0$. On a de plus pour un certain $q \in \mathbb{Z}, z \xrightarrow{q} x$ et donc

$$x \xrightarrow{j} z \xrightarrow{q} x$$
$$x \xrightarrow{i} y \xrightarrow{1} z \xrightarrow{q} x$$

et donc $Q^{j+q}(x,x) > 0, Q^{i+1+q}(x,x) > 0$. Donc le pgcd divise $q+j$ et $i+1+q$, donc il divise leur différence $j-i-1$, qui est > 0 et strictement plus petit que p. Contradiction.

(ii) implique (iii) : Soit i,j premiers entre eux tels que $Q^i(x,x) > 0, Q^j(x,x) > 0$. Donc il existe des chemins possibles $x \xrightarrow{i} x$ $x \xrightarrow{j} x$. On veut montrer que pour n suffisament grand, $Q^n(x,x) > 0$. Pour ce faire, on va construire un "grand" chemin constitué de sous-chemins de taille i ou j. Par exemple pour des entiers $a,b \in \mathbb{N}$, pour $n = ai + bj$, on a le chemin possible de taille n

$$\underbrace{x \xrightarrow{i} x \ \xrightarrow{i} x \dots \xrightarrow{i} x}_{a \text{ fois}} \underbrace{\xrightarrow{j} \ x \ \xrightarrow{j} x \ \dots \xrightarrow{j} x}_{b \text{ fois}}.$$

Si on arrive à montrer pour n assez grand, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\exists a,b \in \mathbb{N} : n = ai + bj$$

, alors c'est gagné : $Q^n(x,x) > 0$ pour $n \geqslant n_0$. .

Exercice 3. Soit $i,j \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\exists a,b \in \mathbb{N} : n = ai + bj$.

□

En pratique, pour montrer qu'une chaîne de Markov est apériodique, on cherche $x \in E$ et deux nombres "petits" m,k et premiers entre eux tels que $Q^m(x,x) > 0, Q^k(x,x) > 0$. Exemples :

— Si $Q(x,x) > 0$ pour un certain x, alors la chaîne est apériodique.

— Si $Q^2(x,x) > 0$ et $Q^3(x,x) > 0$, alors comme $pgcd(2,3) = 1$, elle est apériodique.

Exercice 4. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ Soit $X = (X_n)$ la marche aléatoire symétrique sur $E = \{1,\dots,q\}$ tel qu'on puisse passer de q à 1 et réciproquement. Est-ce périodique ?

Le prochain théorème nous dit qu'une bonne chaîne de Markov (IRP apériodique) converge vers sa distribution invariante.

Théorème 12 (Convergence à l'équilibre, cas général)**.** *Soit X une chaîne de Markov IRPA. Soit π l'unique distribution invariante. Soit μ_0 la distribution initiale. Alors $X_n \to \pi$ en distribution (quelle que soit μ_0).*

Démonstration:

On va utiliser un couplage : Soit $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de distribution initiale π, indépendante de X. Alors on définit

$$\mathcal{X}_n = (X_n, Y_n).$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{X}$ est une chaîne de Markov .

Elle est irréductible : Preuve : pour aller d'un état (x,x') à un état (y,y') on choisit $q > q'$ tels que $\mathbb{P}(x \xrightarrow{q} y) > 0$ et $\mathbb{P}(x' \xrightarrow{q'} y') > 0$. On sait de plus que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(x \xrightarrow{n} x) > 0$ et $\mathbb{P}(x' \xrightarrow{n} x') > 0$ (car la chaîne est apériodique). On a alors pour la chaîne $\mathcal{X}$, pour $n \geqslant n_0' := \max(n_0, n_0 + q' - q)$:

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} x & \xrightarrow{n} x & \xrightarrow{q} y \\ x' & \xrightarrow{n+q-q'} x' & \xrightarrow{q'} y' \end{pmatrix} > 0$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}((x,x') \overset{n+q}{\to} (y,y')) > 0,$$

donc $\mathcal{X}$ est irréductible et apériodique.

De plus la distribution $\Pi(x,y) = \pi(x)\pi(y)$ est invariante pour $\mathcal{X}$ car

$$\mathbb{P}_\Pi(\mathcal{X}_1 = (x,y)) = \mathbb{P}_\pi(X_1 = x)\mathbb{P}_\pi(Y_1 = y) = \pi(x)\pi(y)$$

. Le chaîne $\mathcal{X}$ est donc récurrente positive.

On choisit arbitrairement un état $x \in E$ et on pose

$$\mathcal{T} = \min\{n : \mathcal{X}_n = (x,x)\} = \min\{n : X_n = Y_n = x\}.$$

$\mathcal{T}$ est un temps d'arrêt car c'est le temps de 1er passage en (x,x). Comme $\mathcal{X}$ est irréductible récurrente, $\mathcal{T} < \infty$ p.s..

On pose

$$Z_n = \begin{cases} X_n \text{ si } n \leq \mathcal{T} \\ Y_n \text{ si } n > \mathcal{T}. \end{cases}$$

On utilise une astuce pour montrer que $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X et Y et de loi initiale $(Z_0 = X_0 = x)$:

Comme $\mathcal{T}$ est un temps d'arrêt, d'après la Propriété de Markov forte,

$$(\mathcal{X}_{\mathcal{T}+n})_{n\geqslant 0}$$

est une chaîne de Markov de même matrice de transition que $\mathcal{X}$, de loi initiale (x,x), et indépendante de $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$.

Soit $\mathcal{X}' = (Y,X)$ obtenue en échangeant les coordonnées de $\mathcal{X}$. Pour les mêmes raisons, $(\mathcal{X}'_{\mathcal{T}+n}, n \geqslant 0)$ a la même loi que $(\mathcal{X}'_n, n \geqslant 0)$, et est indépendante de $(\mathcal{X}'_n, n \leqslant \mathcal{T})$, et donc de $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$. Remarquons que $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$ et $(\mathcal{X}'_n, n \leqslant \mathcal{T})$ sont indépendantes.

On définit $\mathcal{X}''$ en collant $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$, et $(\mathcal{X}'_n, \mathcal{T}+n, n \geqslant 0)$:

$$\mathcal{X}''_n = \begin{cases} (X_n, Y_n) \text{ si } n \leqslant \mathcal{T} \\ (Y_n, X_n) \text{ si } n > \mathcal{T} \end{cases}$$

D'après les considérations précédentes, $\mathcal{X}''$ a la même loi que $\mathcal{X}$. En regardant la 1re coordonnée de cette égalité en loi, on en déduit que Z a la même loi que X.

Donc pour tout n, Z_n a la même loi que X_n (c'est-à-dire $\mathbb{P}_x(Z_n = y) = Q^n(x,y)$). Comme π est invariante et est la loi de Y_0, c'est aussi la loi de Y_n et on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(X_n = y) - \pi(y)| &= |\mathbb{P}(Z_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)| \\
&= |\mathbb{P}(Z_n = y, n \leq \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) - \mathbb{P}(Y_n = y, n > \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Y_n = y, n \leq \mathcal{T})| \\
&= |\mathbb{P}(Z_n = y, n \leq \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) - \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Y_n = y, n \leq \mathcal{T})| \\
&= |\mathbb{P}(X_n = y, n \leq \mathcal{T}) \\
&\leq \mathbb{P}(n \leq \mathcal{T}) \to 0
\end{aligned}$$

car $\mathcal{T} < \infty$ p.s.. □

Conclusion : Une "bonne" chaîne de Markov est une chaîne de Markov IRPA ; car elle admet automatiquement une distribution invariante, et y converge.

Il suffit d'en savoir plus sur la distribution de $\mathcal{T}$ pour avoir une idée de la vitesse de décroissance. Nous allons en fait utiliser une autre méthode pour estimer la vitesse.

Comme dans toute convergence, il est intéressant de connaître la vitesse, et pour cela il faut introduire une mesure entre deux distribution.

On pose pour μ, μ' des distributions

$$d_{TV}(\mu, \mu') = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(x) - \mu'(x)|.$$

Cette distance s'appelle la distance en "variation totale". Pour $X_n, n \in \mathbb{N}, X$ des variables aléatoires, on dit que X_n converge vers X en variation totale si la loi de X_n converge vers la loi de X en variation totale.

Remarque 9.

$$d_{TV}(\mu, \mu') \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in E} \mu(x) + \sum_{x \in E} \mu'(x) \right) \leqslant \frac{1}{2}(1 + 1) \leqslant 1.$$

On vérifie bien que la topologie héritée de cette distance est plus fine que la topologie que l'on a définie pour la convergence entre mesures :

Soit $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de distributions telles que $d_{TV}(\mu_n, \mu) \to 0$. Alors $\mu_n(x) \to \mu(x)$ pour $x \in E$.

Si une chaîne de Markov (X_n) converge en en variation totale vers une loi π, alors elle converge en loi vers π.

Exercice 5. Montrer que

$$d_{TV}(\mu, \mu') = \sup_{A \subset E} |\mu(A) - \mu'(A)|.$$

Condition 1 (Condition de Doeblin)**.** *Il existe $l \in \mathbb{N}^*, \beta > 0$, et une mesure de probabilité μ non-nulle telle que pour tout $x, y \in E$,*

$$Q^l(x, y) > \beta \mu(y).$$

En faisant la somme sur y, on voit que $\beta < 1$.

Remarquons que la condition de Doeblin implique que X est irréductible.

Théorème 13 (Convergence exponentielle à l'équilibre)**.** *Soit X une chaîne de Markov qui vérifie la condition de Doeblin. Alors X admet une distribution invariante π et il existe $C \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1)$ tel que pour toute distribution μ*

$$d_{TV}(\mu Q^n, \pi) \leqslant C\alpha^n.$$

L'idée générale de ce résultat est que pour la distance en variation totale, une chaîne de Markov IRPA est contractante, c'est à dire qu'il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que pour deux distributions μ, μ',

$$d_{TV}(\mu Q, \mu' Q) \leqslant \alpha d_{TV}(\mu, \mu') \tag{4}$$

où Q est la matrice de transition . On rappelle que $\mu_0 Q$ est la loi de X_1 lorsque la loi de X_0 est μ_0. Ainsi, si π est la distribution invariante unique, on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} d_{TV}(\text{loi de } X_n, \pi) = d_{TV}(\mu_0 Q^n, \pi) = d_{TV}(\mu_0 Q^n, \pi Q^n) \\ \leqslant \alpha d_{TV}(\mu_0 Q^{n-1}, \pi Q^{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n d_{TV}(\mu_0, \pi) = \alpha^n \frac{1}{2} \sum_x (|\mu_0(x)| + |\pi(x)|) \leqslant \alpha^n, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la loi de X_n converge vers π, et de plus elle le fait à vitesse exponentielle

$$d_{TV}(\mu Q^n, \pi) \leqslant \alpha^n.$$

Proposition 19. *Soit X une chaîne de Markov irréductible apériodique sur un espace E fini. Alors X vérifie la condition de Doeblin.*

Démonstration:
Soit $x \in E$. On sait qu'il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $Q^{n_x}(x,x) > 0$ pour tout $n \geqslant n_x$ (chaîne apériodique). Pour tout $x, y \in E$, il existe $l_{x,y}$ tel que $Q^{l_{x,y}}(x,y) > 0$. Donc $Q^{n_x + l_{x,y}}(x,y) > 0$ pour tout $n \geqslant n_x$. On pose

$$l = \max_{x,y \in E} n_x + l_{x,y}.$$

On a bien $l = n + l_{x,y}$ pour un $n \geqslant n_x$, et donc $Q^l(x,y) \geqslant Q^n(x,x)Q^{l_{x,y}}(x,y) > 0$. Soit désormais

$$M(y) := \min_{x \in E} Q^l(x,y) > 0.$$

et $\beta = M(E), \mu = M/\beta$. Alors

$$Q^l(x,y) \geqslant \beta\mu(y).$$

□

Démonstration: [Convergence quand la condition de Doeblin est vérifiée]
Commençons par le cas $l = 1$. On a

$$d_{TV}(\mu Q, \mu' Q) = \frac{1}{2} \sum_y \left| \sum_x [\mu(x) - \mu'(x)] Q(x,y) \right|$$

Astuce : pour $x \in E$,

$$\sum_{x \in E} (\mu(x) - \mu'(x)) = \sum_{x \in E} \mu(x) - \sum_{x \in E} \mu'(x) = (1-1) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mu Q, \mu' Q) =& \frac{1}{2} \sum_y \left| \sum_x (\mu(x) - \mu'(x))(Q(x,y) - \beta m(y)) \right| \\ \leqslant& \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \mu'(x)| \sum_y \underbrace{(Q(x,y) - \beta m(y))}_{\geqslant 0 \text{ par Doeblin}} \\ =& \frac{1}{2} \sum_x |\mu(x) - \mu'(x)|(1-\beta). \end{aligned}$$

Avec $\alpha = 1 - \beta$, l'application est bien α-contractante. On se trouve dans l'espace $\mathcal{M}_1(E)$ des mesures de probabilités sur E :

$$\mathcal{M}_1(E) := \{\mu : E \to \mathbb{R}_+ : \sum_{x \in E} \mu(x) = 1\}.$$

Lemme 2. *$\mathcal{M}_1(E)$ est un sous-ensemble fermé d'un espace complet.*

Avant de prouver le lemme, concluons par le fait qu'on peut appliquer le théorème du point fixe : L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(E) &\to \mathcal{M}_1(E) \\ \mu &\mapsto \mu Q \end{aligned}$$

est contractante sur $\mathcal{M}_1(E)$, elle y admet donc un unique point fixe qui est l'unique distribution invariante de X.

Dans le cas l quelconque, on a la division euclidienne : pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, r \in \{0, ..., l-1\}$ tels que $n = kl + r$. Donc pour des distributions μ, μ'

$$d_{TV}(\mu Q^n, \mu' Q^n) = d_{TV}((\mu Q^r)(Q^l)^k, (\mu' Q^r)(Q^l)^k) \leqslant (1-\beta)^k d_{TV}(\mu Q^r, \mu' Q^r) \leqslant (1-\beta)^k.$$

Comme $k \geqslant n/l - 1$, $(1-\beta)^k \leqslant (1-\beta)^{n/l-1} \leqslant \frac{1}{1-\beta}[(1-\beta)^{1/l}]^n$ Donc on a le résultat avec $C = \frac{1}{1-\beta}, \alpha = (1-\beta)^{1/l}$. On peut encore utiliser le théorème du point fixe.

□

Démonstration: [preuve du lemme] On considère l'espace normé $(\ell^1(E), \| \cdot \|_1)$

$$\ell^1(E) = \{\alpha = (\alpha(x))_{x \in E} : \sum_{x \in E} |\alpha(x)| < \infty\}$$
$$\|\alpha\|_1 = \sum_{x \in E} |\alpha(x)|.$$

Si E est fini, $\ell^1(E)$ est isométrique à $\mathbb{R}^{|E|}$, qui est complet. Si E est infini dénombrable, E est en bijection avec $\mathbb{N}$, donc $\ell^1(E)$ est isométrique avec $\ell^1(\mathbb{N})$, et donc $\ell^1(E)$ est complet car on sait (ou on admet) que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet.

Montrons que $\mathcal{M}_1(E)$ est un fermé de $\ell^1(E)$. Soit $\mu_n \in \mathcal{M}_1(E), n \in \mathbb{N}$ une suite qui converge vers une limite $\mu \cap E$. Alors

$$\sum_{x \in E} |\mu_n(x) - \mu(x)| \to 0$$

donc pour $x \in E$,

$$\mu(x) = \lim_n \mu_n(x) \geqslant 0,$$

μ définit bien une mesure. Comme pour chaque $n, \sum_{x \in E} \mu_n(x) = 1$,

$$|1 - \sum_{x \in E} \mu(x)| = |\sum_{x \in E} \mu_n(x) - \sum_{x \in E} \mu(x)| \leqslant \sum_{x \in E} |\mu_n(x) - \mu(x)|$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc le membre de gauche est arbitrairement petit si n est choisi suffisamment grand. On en déduit que $\sum_{x \in E} \mu(x) = 1$, et μ est donc une probabilité.

Le théorème du point fixe de Banach Picard s'applique donc sur le sous-ensemble fermé $\mathcal{L}_1(E)$ de l'espace de Banach $\ell^1(E)$. □

Exercice 6. Soit X une chaîne de Markov IRP. On suppose que $X_0 \sim \pi$ suit la loi invariante. On pose

$$\tau = \min\{n \geq 1 : X_n = X_0\}.$$

1.Montrer que $\mathbb{E}(\tau) = |E|$ est le nombre d'états possibles (en particulier $\mathbb{E}(\tau) = \infty$ si il y a une infinité d'états). Est-ce en contradiction avec le fait que pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty$?

2. En déduire que si E est infini, “de nombreux états ont un grand temps de retour”, c'est-à-dire que pour chaque $M > 0$, il y a une infinité de $x \in E$ tels que $\mathbb{E}_x(T_x) \geq M$. (En lien avec $\pi(x) = \mathbb{E}_x(T_x)^{-1}$, ce sont les états les “moins probables” qui ont les plus grands temps de retour). Connaissez-vous un exemple de chaîne de Markov qui rentre dans ce cadre ?

5.2 Simulation

Etant donné une probabilité π, le but de cette section est de proposer des méthodes algorithmiques pour simuler π, c'est-à-dire construire une variable aléatoire de loi π, ou proche de π.

Exemple 13 (Mélange d'un paquet de cartes)**.** On numérote les cartes d'un jeu de 52 cartes de 1 à 52. Un mélange du jeu de carte est donc la donnée des nombres de 1 à 52 dans le désordre, comme par exemple

$$(12, 1, 23, 9, 11, ...).$$

On assimile un jeu "mélangé", ou plus précisément une configuration du jeu, à la bijection $\sigma : \{1, \ldots, 52\} \to \{1, \ldots, 52\}$ qui donne l'ordre des cartes

$$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(52)).$$

L'exemple ci-dessus correspond donc à la bijection σ définie par $\sigma(1) = 12, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 23$, etc...

Les sites de jeu en ligne doivent fournir des jeux de cartes "parfaitement mélangés", c'est-à-dire tels que, à partir d'une configuration donné, on ne puisse absolument rien prédire sur le nouveau jeu mélangé. Mélanger un jeu revient à choisir une permutation σ tel qu'on ne puisse rien prédire sur le jeu $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(52)$.

La permutation doit donc être aléatoire, c'est-à-dire que c'est une variable aléatoire dans l'ensemble Σ_{52} de toutes les permutations sur un ensemble à 52 éléments. Pour qu'on ne puisse rien prédire sur σ, il faut idéalement que la distribution de σ soit uniforme, c'est-à-dire qu'étant donné une permutation $\sigma_0 \in \Sigma_{52}$,

$$\mathbb{P}(\sigma = \sigma_0) = \frac{1}{\#\Sigma_{52}}.$$

Problèmatique : $\#\Sigma_{52} = 52! \sim 8 \cdot 10^{67}$, il est impossible de tirer un point uniformément avec les ordinateurs actuels.

En appellant π la distribution uniforme sur Σ_{52}, c'est-à-dire $\pi(\sigma_0) = 1/52!$ pour tout $\sigma_0 \in \Sigma_{52}$, on cherche donc une manière de simuler π. C'est très dur à faire exactement, donc on se contentera parfois d'une simulation approximative (i.e. une convergence).

Idée On va chercher une chaîne de Markov $\sigma = (\sigma_n)_{n\geqslant 0}$ dans l'espace d'états $E = \Sigma_{52}$ dont la distribution stationnaire est la distribution uniforme π. On va tenter de s'arranger pour que de plus X soit IRPA. Ainsi, d'après la section précédente, la loi de X_n converge vers π quelle que soit la configuration initiale X_0 du paquet de cartes :

$$d_{TV}(X_n, \pi) \leqslant \alpha^n C$$

pour une certaine constante C. En quelques itérations, la loi de X_n est donc une approximation acceptable de π.

5.3 Algorithme de Metropolis

Etant donné une mesure de probabilité π sur un espace E, le but de l'algorithme de Metropolis est de construire une chaîne de Markov $X = (X_n)$ telle que la loi de X_n converge vers π,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \pi.$$

On dit que la chaîne de Markov $X = (X_n)$ simule approximativement la loi π.

On suppose sans perte de généralité que $\pi(x) > 0$ sur E (autrement il suffit d'ôter de E les points où π s'annule). Une manière pour approximer π de cette manière est de trouver une matrice stochastique $Q(x, y)$ telle que la chaîne de Markov correspondante soit IRPA et π est invariante pour Q. L'algorithme de Metropolis consiste en les étapes suivantes :

— Construire matrice de transition $P(x, y)$ quelconque telle que la chaîne de Markov correspondante qui vit dans le bon espace d'états E soit irréductible. Il faut de plus que P soit symétrique : $P(x, y) = P(y, x)$. Pour le bon fonctionnement de l'algorithme de simulation, il faut que la chaîne de Markov correspondante soit facile à simuler, c'est-à-dire que la loi $P(x, \cdot)$ doit être facile à calculer.
— Tirer X_0 suivant une loi quelconque μ (typiquement $\mu = \delta_x$ pour une certaine configuration $x \in E$ choisie arbitrairement selon le contexte).
— Pour $x \in E$, on appelle μ_x la distribution de probabilité correspondant à la ligne x de la matrice de transition :

$$\mu_x(y) = P(x, y).$$

Pour chaque n, tirer Y_{n+1} suivant la loi μ_{X_n}.
— Tirer U_n une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendamment de (X_n) et (Y_n).
— Si $\pi(Y_{n+1})/\pi(X_n) \geqslant U_n$, poser $X_{n+1} = Y_{n+1}$
— Sinon, garder $X_{n+1} = X_n$.

En d'autre termes, on fait évoluer $X = (X_n)$ comme une chaîne de Markov normale de matrice de transition P, à la différence qu'à chaque itération on ne garde la nouvelle valeur X_{n+1} que si le nouveau ratio $\pi(X_{n+1})/\pi(X_n)$ est suffisamment élevé, autrement on laisse l'ancienne valeur $X_{n+1} = X_n$.

Exercice 7. Pourquoi (X_n) est une chaîne de Markov (homogène) ? Quelle est sa matrice de transition ? Montrer qu'elle est irréductible et réversible. Qu'en déduisez-vous sur la limite de X_n ? Par quel type plus général de condition peut-on remplacer

$$U_n \leq \frac{\pi(Y_{n+1})}{\pi(X_n)}?$$

Barker a proposé la condition

$$U_n \leq \frac{\pi(Y_{n+1})}{\pi(X_n) + \pi(Y_{n+1})}$$

Exercice 8. Utiliser l'algorithme de Metropolis pour simuler approximativement une variable de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Quelle est la matrice de transition correspondante si l'on utilise la règle de Barker ? Cette chaîne peut-elle vérifier la condition de Doeblin ?

TD 5 - Convergence et simulation

Exercice 1. Montrer que le modèle de l'urne d'Ehrenfest ne vérifie pas la condition de Doeblin (ou plus généralement le montrer pour toute chaîne de Markov périodique).

Exercice 2. Soit Q une matrice stochastique de taille N, et λ une valeur propre complexe de Q de module 1. Montrer que λ est une racine de l'unité. (Indication : Commencer par le cas ou la chaîne de Markov correspondante est irréductible et apériodique).

Exercice 3. On appelle graphe un ensemble de points E, et un ensemble d'arêtes A qui à chaque paire de points x, y associe $a(x, y)$ qui vaut 0 ou 1. Si $a(x, y) = 1$, on dit que x et y sont connectés, ou voisins, et on note $x \sim y$. On appelle degré de x et on note $d(x)$ le nombre de voisins de x.

On considère la chaîne de Markov X_n qui se déplace aléatoirement en sautant d'un point à un autre, sachant que :

1. D'un point x, on ne peut aller que sur un voisin de x,
2. Tous les voisins de x ont la même probabilité d'être choisis.

1. **Introduction.** Donner une expression de $Q(x, y)$, la matrice de transition.

2. **Irréductibilité.**

On dit que deux points x et y sont reliés dans le graphe si il existe une suite de points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ tels que $x_i \sim x_{i+1}$. On dit que le graphe est connexe si tous les points sont reliés.

Donner un exemple de graphe qui n'est pas connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne soit irréductible.

On suppose dans la suite que le graphe est connexe.

3. **récurrence**.

a) On suppose que E est fini. Montrer que la chaîne est irréductible récurrente positive.

b) Donner des exemples de graphes ou la chaîne est récurrente mais pas récurrente positive, et ou la chaîne de Markov n'est même pas récurrente. (On pourra utiliser les résultats sur la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$).

Calculer $d(x)$ pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$.

4. **mesures invariantes** On définit la mesure suivante sur le graphe :

$$\mu(x) = d(x).$$

a) Montrer que μ est une mesure réversible.

b) On suppose que E est fini. Donner une distribution invariante de la chaîne de Markov. En existe-t-il d'autres ?

c) On suppose le graphe fini et connexe. Donner l'espérance du temps de retour en un point x.

d) On suppose dans cette question que le graphe est fini, mais plus qu'il est connexe. Peut-il exister plusieurs mesures invariantes ? Donner la forme générale de toutes les mesures invariantes.

5. **Mesure d'occupation**

a) Donner un exemple de graphe non-apériodique.

b) On suppose le graphe apériodique. Soit x un point du graphe. Montrer que, quelle que soit la distribution initiale,

$$\mathbb{P}(X_n = x) \to \frac{d(x)}{2\#A}.$$

6. **Théorème ergodique.** Déterminer le temps moyen passé par la chaîne en un point x.

7. **Application aux échecs**.

a) On considère une tour que l'on déplace aléatoirement sur un échiquier (8x8 cases). Chacune des cases qui lui sont accessibles ont même probabilité à chaque coup. On rappelle qu'une tour ne peut faire qu'un mouvement horizontal ou vertical à chaque coup. Quel est le temps moyen de retour au point de départ ? (en fonction du point de départ ?). Quelle est la période ?

b) même question pour un cavalier (mouvements autorisés : 2 cases dans une direction puis 1 case dans l'autre direction).

c) même question pour un fou (mouvement uniquement diagonaux).

Exercice 4 (Simulation d'un processus de répulsion)**.** Soit N impair.

On lance n particules chargées positivement dans $[0,1]^2$, que l'on approxime par

$$A_N = \{(k/N, j/N); 0 \leq k, j \leq N\} = \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)^2 \cap [0,1]^2.$$

Une étude des propriétés électromagnétiques du système permet de montrer que la probabilité $\pi(x)$ d'une configuration $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E = A_N^n$ est proportionnelle à

$$\mu(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|.$$

En d'autres termes,

$$\pi(x) = \frac{1}{Z}\mu(x)$$

où $Z = \mu(E)$ est une constante très difficile à déterminer.

Pour simplifier, on suppose que la grille est un **tore**, c'est-à-dire que l'on peut passer d'un côté au côté opposé.

Remarquons que chaque point $x_0 \in A_N$ a ainsi 4 voisins. On dit que $x, y \in E$ sont des **configurations voisines** si il existe $i_0 \in \{1, .., n\}$, noté $i_0(x,y)$, tel que x_{i_0} et y_{i_0} sont voisins dans la grille (torique), et $x_i = y_i$ pour $i \neq i_0$.

1. On définit la matrice de transition suivante : pour $x, y \in E$;

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4n} \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont des configurations voisines,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Montrer que P est une matrice de transition . Soit $X = (X_k)_{k \geqslant 0}$ une chaîne de Markov ayant P comme matrice de transition . Décrire comment programmer le passage d'une configuration X_k à la configuration X_{k+1}. Montrer que X est irréductible et symétrique.

2. Montrer qu'elle est apériodique (il faut utiliser le fait que N est impair). Montrer qu'elle n'est pas apériodique. On modifie la chaîne de Markov en introduisant $\varepsilon \in]0,1[$, et en décrétant qu'à chaque transition, X_k a une probabilité ε de rester sur place. On appelle P' la nouvelle matrice de transition . Que vaut P' ? Pourquoi est-elle apériodique ?

3. Soit x, y deux configurations voisines. Calculer $r(x,y) := \mu(x)/\mu(y)$.

4. Proposer une procédure informatique pour simuler informatiquement approximativement ce processus, en se basant sur l'algorithme de Metropolis.

Exercice 5. Algorithme de mélange L'exercice a pour but d'évaluer l'efficacité d'algorithmes pour mélanger un paquet de 52 cartes. On considère les cartes d'un jeu, numérotées de 1 à 52. On assimile à une configuration du paquet un élément du groupe des permutations Σ_{52}. Un élément σ de Σ_{52} est une bijection de $\{1, 2, \ldots, 52\}$ vers lui-même. La configuration correspondante du paquet se retrouve en mettant les cartes dans l'ordre $\sigma(1)$ (au-dessus du paquet) ,$\sigma(2), \ldots, \sigma(52)$. On admet le résultat suivant sur les éléments de Σ_{52} :Toute bijection peut s'écrire comme le produit de transpositions.

L'espace d'états est l'ensemble des configurations possibles du paquet de cartes, c'est-à-dire $E = \Sigma_{52}$. On appelle μ_0 la distribution uniforme sur Σ_{52}.

1. Préliminaire
   (a) Soit σ une configuration. Que vaut $\mu_0(\sigma)$?
   (b) Soit i, j deux éléments distincts de $\{1, \ldots, 52\}$. On note $\tau_{i,j}$ la transposition qui échange les éléments i et j de $\{1, \ldots, 52\}$, i.e.
   $$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j \text{ si } k = i \\ i \text{ si } k = j \\ k \text{ sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que $\sigma \circ \tau$ est la permutation qui correspond à la configuration on du paquet de cartes après qu'on ait échangé les cartes i et j.
2. **Mélange par transpositions**. A chaque étape, on choisit deux cartes au hasard uniformément dans le paquet et on les échange.
   (a) Formaliser la chaîne de Markov correspondante, et donner la matrice de transition. Est-elle symmétrique ?
   (b) A-t-on une chaîne de Markov irréductible ? Récurrente ? Positive ?
   (c) A-t-on une chaîne de Markov apériodique ? (on pourra utiliser la notion de signature d'une permutation)
   (d) Soit σ_0 une configuration aléatoire tirée selon la distribution μ_0, et σ_1 la configuration obtenue après avoir appliqué le mélange par transposition une fois. Soit $\sigma \in \Sigma_{52}$. Que vaut $\mathbb{P}(\sigma_1 = \sigma)$? Qu'en déduit-on pour μ_0 ?
   (e) Soit σ une configuration aléatoire tirée selon la distribution μ_0. On considère la variable aléatoire
   $$Y = \#\{ \text{ nombre de coeurs dans la première moitié du paquet.} \}$$
   Donner une procédure pour estimer $\mathbb{E}Y$.
3. **Mélange par coupe**. Pour effectuer le mélange, on tire une variable K binomiale de paramètres $n = 52, p = 1/2$. On prend les K cartes du dessus, et on les place telles quelles en dessous des cartes restantes.
   (a) Décrire la permutation $\tau_K \in \Sigma_{52}$ telle que, si σ' s'obtient à partir de σ via la coupe décrite ci-dessus, $\sigma = \sigma' \circ \tau_K$. (on suppose que la carte du dessus est numérotée 1).
   (b) Décrire le noyau de transition de la chaîne de Markov correspondante. Est-il symmétrique ?
   (c) La chaîne de Markov est-elle apériodique ?
   (d) μ_0 est-elle une mesure invariante ?
   (e) La chaîne est-elle irréductible ? Donner la décomposition en classes de l'ensemble d'états.
4. A chaque étape, on tire à pile ou face. Si on fait pile, on fait un mélange par transposition. Si on fait face, on fait un mélange par coupe. Montrez que la loi de cette nouvelle chaîne de Markov converge vers μ_0.

5. **Mélange parfait** (TP). On appelle mélange parfait la procédure qui consiste à séparer le paquet en 2 paquets de 26 cartes, et insérer exactement 1 carte de chaque paquet entre 2 cartes de l'autre (à l'exception des cartes du haut et du bas). On dit que le mélange est extérieur si la carte 1 reste en position 1, et intérieur si elle passe en position 2.

Exercice 6. Simulation d'un modèle de polymère

Soit $p \geqslant 3$. On appelle p-polymère un ensemble de p points distincts de $\mathbb{Z}^2$ $x_1, \ldots, x_p$, tels que pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$, les segments $[x_i, x_{i+1}]$ et $[x_j, x_{\overline{j+1}}]$ ne se croisent pas en d'autres points qu'aux extrémités, en notant $1 = \overline{p+1}$. On suppose aussi que 0 est à l'intérieur du polygone délimité par $x_1, \ldots, x_p$. On appelle E l'ensemble de tous les polymères possibles, en notant que E est strictement inclus dans $(\mathbb{Z}^2)^p$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$, on note $\mathrm{Per}(x)$ le périmètre du polymère, et $S(x)$ la surface à l'intérieur du polymère.

On note m la mesure $m(x) = S(x)/\mathrm{Per}(x)^{10}$. On souhaite simuler un polymère aléatoire dont la loi π soit proportionnelle à m.

Soit $x, y \in E$ deux configurations de polymère. On dit que x et y sont des configurations voisines si il existe $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tels que pour $i \neq i_0, x_i = y_i$, et x_{i_0} et y_{i_0} sont distincts mais voisins dans la grille définie par $\mathbb{Z}^2$. On note $V(x)$ l'ensemble des configurations voisines de x.

1. Trouver, pour $p = 3$, 2 configurations voisines x, y telles que $\#V(x) \neq \#V(y)$.
2. Soit P définie par $P(x,x) = 0, x \in E$ et pour $x \neq y$,

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\#V(x)} \text{ si } x \text{ est une configuration voisine de } y \\ 0 sinon \end{cases}$$

   Cette matrice peut-elle convenir pour l'algorithme de Metropolis ?
3. On définit une nouvelle matrice de transition P' par

$$P'(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4p} \text{ si } x \text{ est voisin de } y \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \quad x \neq y,$$
$$P'(x,x) = 1 - \sum_{y \in V(x)} P'(x,y), x \in E.$$

   Montrer que P' convient pour l'algorithme de Metropolis.
4. Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P'. Donner une manière rapide de simuler le passage de X_n à X_{n+1}.
5. Montrer que si on n'imposait pas que 0 soit dans l'intérieur de chaque polymère de E, la masse totale de m serait infinie.
6. On suppose $p = 3$. Montrer que la masse totale de m est finie.
7. En admettant cette condition vérifiée, comment simuler une chaîne de Markov dont la loi converge vers π ?

Exercice 7 (Simulation de la loi uniforme, Hit-and-Run Algorithm)**.** Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(A) > 0$, où λ est la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle. On rappelle qu'une variable uniforme sur A a la loi

$$\mu_A(dx) = \frac{\lambda(dx)}{\lambda(A)}.$$

Pour certains ensembles A, les méthodes accept-or-reject sont très peu efficaces, typiquement lorsque A est très "mince", ou que la dimension d est très grande. Les chaînes de Markov peuvent fournir une alternative.

Pour simplifier et parce qu'on travaille dans un cadre discret, on suppose ici que A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$. On suppose de plus que A est connexe, où un point est relié à un autre ssi ils sont reliés par une arête de $\mathbb{Z}^2$.

On considère la suite de variables aléatoires au comportement suivant :

— $X_0 \in A$.

— A chaque temps n, on choisit avec probabilité $1/2$ la ligne sur laquelle se situe X_n ou la colonne sur laquelle se situe X_n.

— On tire uniformément $X_{n+1} \in A$ sur cette ligne ou cette colonne.

1. Identifier la matrice de transition Q et les propriétés de la chaîne de Markov .
2. Montrer que la distribution uniforme sur A est invariante.
3. En déduire une manière de simuler approximativement une variable uniforme sur A. Quelle convergence a-t-on ?
4. Comment pourrait-on généraliser cette méthode dans le cadre continu (informel) ?

TD 6 - Exercices

6 TP 1 - Moteur de recherche

Le but de ce TP est de construire un moteur de recherche qui classe les pages du web selon une recherche par mots-clés.

6.1 Construction du "Web"

Dans ce TP, une page web est modélisée par un mot-clé, qui est réduit ici pour simplifier à une lettre entre `A` et `Z`, et par une liste de liens. Le nombre de pages est de `n`, et les liens sont représentées par des `1` dans une matrice `n`×`n`. La présence d'un `1` à la ligne `i` et la colonne `j` indique la présence d'un lien de la page `i` vers la page `j`. A noter que par convention, une page ne pointe jamais vers elle-même.

1. Créer un programme `W=randomWeb(n)` qui renvoie une liste de `n` "mots-clés". Chaque entrée de cette liste représente une page web.
2. Créér une matrice aléatoire `M=linkMatrix(n)` (variable globale) qui contient les informations de liens entre les pages web, en respectant les conditions suivantes :
   — Une page ne peut pointer vers elle-même
   — Chaque page contient au moins un lien

6.2 Calcul de PageRank via les valeurs propres

On rappelle que le crédit qu'une page web x appporte à une autre page web y est défini par

$$C(x,y) = \frac{1_{\{\text{x pointe vers y}\}}}{\#\{\text{liens présents sur la page x}\}}.$$

On suppose qu'il existe une quantité $I(x)$ appelée "importance" pour chaque page web x telle que

$$I(y) = \sum_x C(x,y) I(x).$$

1. Montrer que cela équivaut à : I^t est vecteur propre de C^t associé à la valeur 1. Pourquoi I existe bien ?
2. Calculer C à partir de `M` défini par `M=randomWeb(10)`. En déduire I à l'aide de l'instruction `eig(M')`.

6.3 Estimation du PageRank avec un surfeur aléatoire

1. Soit `M=linkMatrix(n)`. Construire un programme `v=surfer(N,M)` qui renvoie un vecteur `v` de taille `(1,n)` contenant le nombre de visites du surfeur aléatoire sur chaque page après `N` clics sur le web dont les liens sont définis par la matrice `M`.
2. Comparer le vecteur `v` ainsi obtenu au vecteur `I` calculé précédemment. On divisera chacun de ces vecteurs par sa somme pour avoir la bonne normalisation.

6.4 Interprétation

Soit $X = (X_n)$ la chaîne de Markov d'état initial 1 et de matrice de transition $C(x, y)$.

3. Comment tester empiriquement si la chaîne de Markov est irréductilbe ?
4. On suppose qu'elle est irréductible. Pourquoi la chaîne de Markov correspondante a-t-elle une unique distribution invariante π ? Construire une variable `piEstim(M)` qui donne une estimation de π. Pour observer la convergence, on pourra représenter sur le même graphe le vecteur `pi`, le vecteur `I` trouvé précédemment, la variation totale entre les deux :

$$d_{VT}(\texttt{pi}, \texttt{I}) = \sum_{k=1}^{n} |\texttt{pi[k]} - \texttt{I[k]}|$$

et commenter.

6.5 Construction du moteur de recherche

Construire le programme `pageRank(a)` qui fonctionne de la manière suivante :

1. Tirage d'un web aléatoire de taille `n=1000000`.
2. Demande d'un mot clé à l'utilisateur (entre `'A'` et `'Z'`).
3. Estimer l'importance des pages (on fera attention à bien calibrer N).
4. Affichage des 10 pages contenant le mot clé les plus "importantes" dans l'ordre, avec leur score.

6.6 Raffinements

1. Supposons que l'on tente de renforcer la pertinence d'une page web en créant artificiellement 10 pages web qui pointent uniquement vers cette page. Est-ce que ça modifie la pertinence ? Et si les 10 nouvelles pages pointent également entre elles ?
2. Imaginer d'autres manières de tirer `linkMatrix` où certaines pages seraient plus influentes, et voir comment cela affecte la pertinence.

7 TP2 Simulation de polymères

Le but de ce TP est de simuler informatiquement un modèle simplifié de polymère. Ici, on choisit un nombre entier p, qui sera le nombre de particules de chaque polymère. Un polymère est une suite $x_1, \dots, x_p$ de points de $\mathbb{Z}^2$ qui satisfait aux contraintes suivantes :

— Pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant p$, $[x_i, x_{\overline{i+1}}]$ et $[x_j, x_{\overline{j+1}}]$ ne se touchent pas, sauf éventuellement aux extrémités, où

$$\bar{i} = \begin{cases} i \text{ si } i < p \\ 1 \text{ si } i = p+1 \end{cases}$$

— 0 est dans "l'intérieur" du polymère

Le but est d'approcher vie l'algorithme de Metropolis une loi de distribution proportionnelle à la mesure

$$m(x) = \frac{\text{surface(x)}}{\text{Perimetre(x)}^4}.$$

7.1 Package `geometry`

On va utiliser le package `geometry`, qu'il faut télécharger sour la forme d'un fichier `.tar.gz`, puis installer via `pkg install geometry-xxx.tar.gz`, et charger via `load pkg geometry`.

On va utiliser les concepts suivants :

— `polygon` : matrice p×2 (chaque ligne représente un point à 2 coordonnées)

— `drawPolygon(polygon)` : Représente le polygone `polygon` sur un graphique.

— `polygonArea(polygon)` : Calcule la surface de `polygon`. Il faut prendre la valeur absolue car la surface est "signée"

— `edgeLength([a b])` : Calcule la longueur du segment `[a,b]`, où `a,b` sont deux matrices 2×1.

— `randomPolygon(p)` : Tire aléatoirement un polygone à `p` sommets (fourni pour le TP)

Code de `randomPolygon` :

```
function  poly=randomPolygon(p)
\%tire au hasard un polygone aléatoire à p sommets

points=zeros(p,2);

val=-20:20;
probas=ones(1,41)/41;

for k=1:p
 \indent points(k,1)=discrete_rnd(val,probas,1);
\indent  points(k,2)=discrete_rnd(val,probas,1);
 end

 poly=closedPath(points);
%
```

7.2 Evolution libre du polymère

1. On va tout d'abord créér un polygone qui évolue librement, sans contraintes. Créer un programme `evolve(poly)` qui, étant donné une matrice `poly`, de taille p×2, renvoie une autre matrice p×2, où l'une des lignes du vecteur initial, correspondant à un point du polygone, s'est déplacé dans une des 4 directions possibles (ne pas tenir compte d'éventuels croisements ou superpositions pour l'instant).

```
function newPoly=evolve(poly)

p=size(poly,1);

val=1:p;
probas=ones(1,p)/p;
index=discrete_rnd(val,probas,1);

directions=["h","b","g","d"];
probas=ones(1,4)/4;
direction=discrete_rnd(directions,probas,1);

if direction=="h"
  increment=[0,1];
elseif direction=="b"
  increment=[0,-1];
elseif direction=="g"
  increment=[-1,0];
elseif direction=="d"
  increment=[1,0];
endif

newPoly=poly;
newPoly(index,:)=poly(index,:)+increment;
```

2. Créer un programme `polyEvolve(n,polygon)`, où `n` est un entier et `polygon` une liste de points (matrice `p`×2) qui contient une boucle `for k=1:n`, où à chaque itération, `evolve` est appliqué à `polygon`. On observera l'évolution à l'aide de la commande `drawPolygon`.

```
function polyEvolve(n,polygon)

figure(1)

for k=1:n
  figure(1)
  clf;

  drawPolygon(polygone);
  drawnow;

  polygon=evolve(polygon);

end
```

3. Créer une fonction `m=score(poly)` qui renvoie la valeur

$$\mathtt{m} = \frac{\mathtt{polygonArea(poly)}}{\mathtt{perimetre(poly)}^4}$$

La fonction `perimetre` n'existe pas, il faut la créer à l'aide de la fonction `edgeLength`.

```
function m=score(polygon);

surf=abs(polygonArea(polygon));

p=size(polygon,1);

polygonCyclic=[polygon;polygon(1,:)];

perimetre=0;
for k=1:p
  point1=polygonCyclic(k,:);
  point2=polygonCyclic(k+1,:);
  perimetre=perimetre+edgeLength([point1 point2]);
end

m=surf/(perimetre\^~4);
```

4. Modifier la fonction `evolve` pour qu'elle ne garde l'évolution que si le rapport des mesures nouveau/ancien excède la valeur d'une variable uniformément distribuée dans $[0, 1]$.

```
function newPoly=evolve(poly)

p=size(poly,1);

val=1:p;
probas=ones(1,p)/p;
index=discrete_rnd(val,probas,1);

directions=["h","b","g","d"];
probas=ones(1,4)/4;
direction=discrete_rnd(directions,probas,1);

if direction=="h"
  increment=[0,1];
elseif direction=="b"
  increment=[0,-1];
elseif direction=="g"
  increment=[-1,0];
elseif direction=="d"
  increment=[1,0];
endif

newPoly=poly;
newPoly(index,:)=poly(index,:)+increment;

mInit=score(poly);
m=score(newPoly);
u=unifrnd(0,1);
if (m>u*mInit)
'garde';
else
'jette';
  newPoly=poly;
```

```
end
```

5. Observer et interpréter l'évolution avec `p=4,n=1000`. On pourra ensuite changer la valeur de `p`.

7.3 Test de polymères

Dans cette dernière partie, on va s'assurer que les polymères respectent les contraintes prescrites (pas de croisement, etc...).

1. Créér un programme `isPolymer(polygon)`, qui renvoie `1` si `polygon` respecte les contraintes, et `0` sinon. On pourra utiliser les instructions suivantes
   — `polygonSelfIntersections (polygon)` : Donne les coordonnées des auto-intersections de `polygon`
   — `isPointInPolygon(a,polygon)` : Teste si le point `a` est à l'intérieur de `polygon`.

```
function answer=isPolymer(polygon)

answer=1;

intersections=polygonSelfIntersections (polygon);
if size(intersections,1)>0
  answer=0;
 end

 if isPointInPolygon([0 0],polygon)==0
  answer=0;
 endif
```

2. Modifier `polyEvolve` pour qu'une évolution ne soit acceptée que si le résultat respecte les contraintes. Observer les résultats comme à la fin de la partie précédente.

Programme qui étudie l'évolution conjointe de la surface, du périmètre, et du score :

```
function [surf,per,m,newPoly]=evolve(surfInit,perInit,mInit,poly)


p=size(poly,1);

val=1:p;
probas=ones(1,p)/p;
index=discrete_rnd(val,probas,1);



directions=["h","b","g","d"];
probas=ones(1,4)/4;
direction=discrete_rnd(directions,probas,1);

if direction=="h"
  increment=[0,1];
elseif direction=="b"
  increment=[0,-1];
elseif direction=="g"
```

```
  increment=[-1,0];
elseif direction=="d"
  increment=[1,0];
endif

newPoly=poly;
newPoly(index,:)=poly(index,:)+increment;

u=unifrnd(0,1);

[surf,per,m]=score(newPoly);
if (m>u*mInit && isPolymer(newPoly))
'garde';
else
'jette';
  surf=surfInit;
  per=perInit;
  m=mInit;
  newPoly=poly;
end

%%%%%%%%%

function polyEvolve(n,p)

mValues=zeros(1,n);
sValues=zeros(1,n);
pValues=zeros(1,n);

polygone=randomPolygon(p);
[surf,per,m]=score(polygone);

figure(1)

for k=1:n
  figure(1)
  clf;

  subplot(4,1,1);
  plot(mValues(max(1,k-99):k-1))

  subplot(4,1,2);
  plot(sValues(max(1,k-99):k-1))

  subplot(4,1,3);
  plot(pValues(max(1,k-99):k-1))

  subplot(4,1,4)
  drawPolygon(polygone);


  drawnow;
```

```
  [surf,per,m,polygone]=evolve(surf,per,m,polygone);

  mValues(k)=m;
  sValues(k)=surf;
  pValues(k)=per;



end
mValues(n-1)
sValues(n-1)
pValues(n-1)
```

8 TP : Problème du voyageur de commerce

Soit $\mathcal{A}_N = \{1, ..., N\} \times \{1, .., N\}$ avec $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant 1$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des points disjoints de $\mathcal{A}_N$. Le but de ce TP est de trouver rapidement un chemin court qui passe par tous les points x_i et revient à la position initiale. On prendra $N = 30, n = 15$ dans les simulations.

8.1 Préliminaires

1. Ecrire un programme `x=locations(n,N)` qui renvoie un vecteur `x` contenant `n` points disjoints de $\mathcal{A}_N$ tirés uniformément et les représente par des croix sur une figure. On pourra utiliser une matrice de taille $N \times N$ représentant toutes les locations possibles.
2. Ecrire un programme `l=longueur(x)` qui calcule la longueur totale à parcouir pour aller de x_1 à x_2, puis de x_2 à x_3, ..., et revenir de x_n à x_1 (avec la norme 2 de $\mathbb{R}^2$).

   Dans la suite, on souhaite changer l'ordre de visite des x_i pour diminuer la longueur totale du trajet. Pour simplifier, on va chercher via l'algorithme de Metropolis un chemin aléatoire Y qui passe une fois par chaque x_i et tel que pour toute possibilité $y = (y_1, ..., y_n)$,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \pi(y) := \frac{1}{Z} \exp(-\text{longueur}(y))$$

   pour une certaine constante Z que l'on n'a pas besoin de connaître.
3. Ecrire un programme `draw(y)` qui trace avec des lignes l'itinéraire défini par un chemin $y \in (\mathcal{A}_N)^n$ à l'aide de l'instruction `line`.

8.2 Algorithme d'optimisation

4. Ecrire un programme `y=echange(x,i,j)` qui échange les destinations i et j du chemin x.
5. Formaliser la chaîne de Markov et le problème proposé. Etant donné $x \in (\mathcal{A}_N)^n$, quel est l'espace d'état ? Quelle est le noyau de transition $P(x, y)$ qui correspond à la question précédente ?
6. Etant donné deux chemins x, y, que vaut $\pi(x)/\pi(y)$? Ecrire un programme `r=ratio(x,y)` qui renvoie la valeur de $\pi(x)/\pi(y)$.
7. Ecrire un programme `y=Metropolis(x,k)` qui renvoie le chemin y obtenu après k itérations de l'algorithme de Metropolis sur les locations définies par le vecteur x. On dessinera le nouveau chemin à chaque itération.

8.3 Etude de la convergence

8. Modifier le programme précédent pour qu'il renvoie deux arguments, `l` et `y`, où `l` contient les longueurs du chemin à toutes les itérations. Tracer `l`.
9. Estimer visuellement le temps pris pour atteindre le minimum pour plusieurs valeurs de n différentes.
10. Dans cet algorithme, à chaque itération, les transitions vers un chemin plus court sont favorisées, mais on laisse tout de même la possibilité d'un chemin plus long, pour ne pas être piégé dans un "minimum local". Donnez un exemple simple de configuration permettant un minimum local qui n'est pas un mimimum global.

8.4 Estimation

11. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n points uniformément répartis dans $[0, 1]$. Soit L_n la longueur du plus court chemin qui passe par tous les X_i et revient à sa position initiale. Donner une estimation de $\mathbb{E}(L_n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 15$.