

Exercices corrigés

Chaînes de Markov discrètes

1. Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a un changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

a) Former, à partir de cela, une chaîne de Markov et en déterminer sa matrice de transition.

b) Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?

c) Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

a) On a l'ensemble des états suivants $E = \{BT, PL, N\}$ et le temps pour un jour ne dépend que du temps du jour précédent, indépendamment de la période de l'année également. On a donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Pour le temps du surlendemain, il faut déterminer P^2 . Mais seule la première ligne de P^2 nous intéresse car on veut déterminer les probabilités à partir d'un jour de beau temps. On a :

$$p_{BT,BT}^{(2)} = p_{BT,BT} \times p_{BT,BT} + p_{BT,PL} \times p_{PL,BT} + p_{BT,N} \times p_{N,BT} = 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$p_{BT,PL}^{(2)} = p_{BT,BT} \times p_{BT,PL} + p_{BT,PL} \times p_{PL,PL} + p_{BT,N} \times p_{N,PL} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$p_{BT,N}^{(2)} = p_{BT,BT} \times p_{BT,N} + p_{BT,PL} \times p_{PL,N} + p_{BT,N} \times p_{N,N} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Ainsi, si un jour il fait beau, le temps le plus probable pour le surlendemain est la pluie ou la neige.

c) On suppose maintenant que $E' = \{BT, MT\}$, ce qui est possible puisque la pluie et la neige se comportent de la même façon pour ce qui est des transitions. On a encore $p'_{BT,BT} = 0$ mais maintenant, $p'_{BT,MT} = p_{BT,PL} + p_{BT,N} = 1$. Pour la deuxième ligne, on a $p'_{MT,BT} = \frac{1}{4}$ car $p_{PL,BT} = p_{N,BT} = \frac{1}{4}$ et $p'_{MT,MT} = \frac{3}{4}$ car $p_{PL,PL} + p_{PL,N} = p_{N,PL} + p_{N,N} = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

2. Trois chars livrent un combat. Le char A atteint sa cible avec la probabilité $2/3$, le char B avec la probabilité $1/2$ et le char C avec la probabilité $1/3$. Ils tirent tous ensembles et dès qu'un char est touché, il est détruit. On considère à chaque instant, l'ensemble des chars non détruits. Montrer qu'on obtient une chaîne de Markov dont on explicitera l'ensemble des états et la matrice de transition dans chacun des cas suivants :

- Chaque char tire sur son adversaire le plus dangereux ;
- A tire sur B ; B tire sur C et C tire sur A.

L'ensemble des états est $E = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C, \emptyset\}$. Pour $X \in \{A, B, C\}$, on note encore X l'événement "le char X atteint sa cible" (et donc \bar{X} l'événement "le char X rate sa cible"). On a ainsi $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$ et $P(C) = 1/3$. Une fois qu'un char est descendu, il ne peut plus revenir et ainsi, on peut commencer par mettre un certain nombre de 0 dans la matrice de transition. Si on est dans l'état A, B, C ou \emptyset , on est sûr d'y rester (plus d'adversaires!).

a) S'il ne reste que 2 chars, par exemple A et B , on a $p_{AB,AB} = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (les 2 ratent!), $p_{AB,B} = P(\bar{A})P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (A rate, B réussit), $p_{AB,A} = P(A)P(\bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (A réussit, B rate) et $p_{AB,\emptyset} = P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ (les 2 réussissent). On procède de même pour AC et pour BC .

Si on a les 3 chars, A tire sur B , B et C tirent sur A (et personne ne tire sur C , donc il reste au moins C). On a alors $p_{ABC,ABC} = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p_{ABC,AC} = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p_{ABC,BC} = P(\bar{A})P(B \cup C) = P(\bar{A})(1 - P(\bar{B})P(\bar{C})) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{18}$ et $p_{ABC,C} = P(A)P(B \cup C) = P(A)(1 - P(\bar{B})P(\bar{C})) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{18}$. On obtient ainsi la matrice et le graphe suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & 2/9 & 2/9 & 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 2/6 & 1/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 & 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 2/6 & 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) S'il ne reste que A et B , A tire sur B et B continue à tirer sur C donc A n'est pas menacé et $p'_{AB,A} = P(A) = 2/3$ alors que $p'_{AB,AB} = P(\bar{A}) = 1/3$. De même avec A et C (A tire sur B , C sur A donc C n'est pas menacé), $p'_{AC,C} = P(C) = 1/3$ et $p'_{AC,AC} = P(\bar{C}) = 2/3$. Avec B et C (B tire sur C et C sur A , donc B n'est pas menacé), $p'_{BC,B} = P(B) = 1/2$ et $p'_{BC,BC} = P(\bar{B}) = 1/2$.

Si on a les 3 chars, $p'_{ABC,ABC} = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p'_{ABC,AB} = P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{2}{18}$, $p'_{ABC,AC} = P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p'_{ABC,BC} = P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, $p'_{ABC,A} = P(A)P(B)P(\bar{C}) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{4}{18}$, $p'_{ABC,B} = P(\bar{A})P(B)P(C) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, $p'_{ABC,C} = P(A)P(\bar{B})P(C) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{2}{18}$ et $p'_{ABC,\emptyset} = P(A)P(B)P(C) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{2}{18}$. On obtient ainsi la matrice et le graphe suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 2/18 & 2/18 & 4/18 & 1/18 & 4/18 & 1/18 & 2/18 & 2/18 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité $1/2$ pour chaque voisin. Déterminer le graphe et la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue. Quelle est la période de ses états?

L'ensemble des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On a $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$, $p_{1,2} = p_{1,5} = 1/2$ et $p_{5,1} = p_{5,4} = 1/2$, ce qui donne la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et le graphe :}$$

La chaîne est irréductible (tous les états communiquent) et finie donc récurrente positive. Comme tous les états sont dans la même classe, leur période est la même. On a $d(1) = \text{pgcd}\{n \geq 1 ; p_{1,1}^{(n)} > 0\}$. Or $p_{1,1}^{(2)} \geq p_{1,2}p_{2,1} = \frac{1}{4} > 0$ et $p_{1,1}^{(5)} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,4}p_{4,5}p_{5,1} = \frac{1}{2^5} > 0$. Or le seul diviseur commun à 2 et à 5 est 1. On a donc $d = d(1) = 1$: cette chaîne est donc aperiodique.

4. On dispose de 2 machines identiques fonctionnant indépendamment et pouvant tomber en panne au cours d'une journée avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$. On note X_n le nombre de machines en panne au début de la n -ième journée.

a) On suppose que, si une machine est tombée en panne un jour, elle est réparée la nuit suivante et qu'on ne peut réparer qu'une machine dans la nuit. Montrer que l'on peut définir ainsi une chaîne de Markov dont on déterminera le graphe, la matrice de transition et éventuellement les distributions stationnaires.

b) Même question en supposant qu'une machine en panne n'est réparée que le lendemain, le réparateur ne pouvant toujours réparer qu'une machine dans la journée.

c) Le réparateur, de plus en plus paresseux, met maintenant 2 jours pour réparer une seule machine. Montrer que (X_n) n'est plus une chaîne de Markov, mais que l'on peut construire un espace de 5 états permettant de décrire le processus par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe des transitions. Calculer la probabilité que les 2 machines fonctionnent après n jours ($n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$) si elles fonctionnent initialement.

a) L'ensemble des états est $E = \{0, 1\}$ car si le soir il y a une ou aucune machine en panne, le lendemain matin, il y en aura 0 ; et si le soir, il y en a 2, le lendemain matin, il y en aura une seule. Le nombre de machines en panne le matin ne dépend que de celui de la veille au matin et de ce qu'il

s'est passé dans la journée, ceci indépendamment de la période de l'année. On a donc bien une chaîne de Markov dont il faut déterminer la matrice de transition.

On a $p_{0,1} = q^2$ (les 2 machines tombent en panne dans la journée et ces pannes sont indépendantes entre elles) et $p_{0,0} = (1-q)^2 + 2q(1-q) = 1 - q^2$ ($(1-q)^2$ correspond à aucune panne dans la journée et $2q(1-q)$ à une seule panne qui peut provenir d'une machine ou de l'autre.). On a également $p_{1,0} = 1 - q$ (la machine en panne est réparée et l'autre fonctionne toujours), et $p_{1,1} = q$ (la machine en panne est réparée et l'autre est tombée en panne). Ainsi, on a la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 - q^2 & q^2 \\ 1 - q & q \end{pmatrix} \text{ et le graphe :}$$

Pour la distribution stationnaire, on résout $(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 1 - q^2 & q^2 \\ 1 - q & q \end{pmatrix}$, soit $\pi_1 = q^2 \pi_0 + q \pi_1$, d'où $\pi_1 = \frac{q^2}{1 - q} \pi_0$ et avec $\pi_0 + \pi_1 = 1$, on obtient $\pi_0 \left(1 + \frac{q^2}{1 - q} \right) = 1$, soit $\pi_0 = \frac{1 - q}{1 - q + q^2}$ et $\pi_1 = \frac{q^2}{1 - q + q^2}$. Avec $q = \frac{1}{4}$, on a alors $\pi_0 = \frac{12}{13}$ et $\pi_1 = \frac{1}{13}$.

b) On a maintenant $E' = \{0, 1, 2\}$ car aucune machine n'est réparée la nuit ; $p'_{0,0} = (1 - q)^2$ (aucune panne dans la journée), $p'_{0,1} = 2q(1 - q)$ (une des 2 machines est tombée en panne) et $p'_{0,2} = q^2$ (les 2 machines sont tombées en panne) ; $p'_{1,0} = 1 - q$ (la machine qui fonctionne ne tombe pas en panne), $p'_{1,1} = q$ (la machine qui fonctionne tombe en panne, l'autre est réparée), $p'_{1,2} = 0$ (la machine en panne est sûre de remarcher le lendemain) ; de même, $p'_{2,1} = 1$ (une seule des 2 machines en panne est réparée). Ainsi, on a la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} (1 - q)^2 & 2q(1 - q) & q^2 \\ 1 - q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et le graphe :}$$

Pour la distribution stationnaire, on résout $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} (1 - q)^2 & 2q(1 - q) & q^2 \\ 1 - q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\pi_0 = (1 - q)^2 \pi_0 + (1 - q) \pi_1$, d'où $\pi_1 = \frac{2q - q^2}{1 - q} \pi_0$ et $\pi_2 = q^2 \pi_0$, d'où avec $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on obtient $\pi_0 \left(1 + q^2 + \frac{2q - q^2}{1 - q} \right) = 1$, soit $\pi_0 = \frac{1 - q}{1 + q - q^3}$, $\pi_1 = \frac{2q - q^2}{1 + q - q^3}$ et $\pi_2 = \frac{q^2 - q^3}{1 + q - q^3}$. Avec $q = \frac{1}{4}$, on a alors $\pi_0 = \frac{48}{79}$, $\pi_1 = \frac{28}{79}$ et $\pi_2 = \frac{3}{79}$.

c) Si on garde l'ensemble des états E' , on n'a pas une chaîne de Markov car, lorsque l'on a 2 machines en panne par exemple, on ne peut pas savoir si le lendemain, on en aura 1 ou 2 en panne : tout dépend si c'est le premier jour de réparation ou le second. On est donc amené à introduire 2 états supplémentaires : $1'$ (1 machine en panne dont c'est le deuxième jour de réparation) et $2'$ (2 machines en panne et deuxième jour de réparation pour la première). On a alors $p''_{0,0} = (1 - q)^2$, $p''_{0,1} = 2q(1 - q)$, $p''_{0,2} = q^2$; $p''_{1,1'} = 1 - q$, $p''_{1,2'} = q$, $p''_{1',0} = 1 - q$, $p''_{1',1} = q$, $p''_{2,2'} = 1$, $p''_{2',1} = 1$, les autres probabilités étant nulles. On a le graphe :

Ainsi, $\pi = \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$. (C'est la distribution qui correspond à une répartition initiale des boules au hasard dans les 2 urnes).

6. Dans \mathbb{Z}^k , on a k directions, et dans chaque direction, on a 2 sens. Un point de \mathbb{Z}^k a donc $2k$ voisins. Un promeneur oisif saute à chaque instant d'un point de \mathbb{Z}^k à l'un de ses voisins avec la même probabilité. Étudier la récurrence des chaînes de Markov ainsi obtenues. (On distinguera les cas $k = 1$, $k = 2$ et $k \geq 3$).

a) $E = \mathbb{Z}$. Pour être de nouveau au point de départ après n étapes, il faut avoir fait autant de pas vers la droite que vers la gauche : ainsi, n doit être pair ($n = 2m$). Il y a autant de trajets possibles que de $2m$ u-plets avec m "d" et m "g", soit C_{2m}^m , et ils sont tous de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$. Ainsi,

$$p_{x,x}^{(2m)} = C_{2m}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \quad (\text{et } p_{x,x}^{(2m+1)} = 0).$$

Pour la nature de la série, on utilise un équivalent grâce à Stirling :

$$p_{xx}^{(2m)} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \sim \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2\pi \times 2m} \left(\frac{e^m}{m^m \sqrt{2\pi m}}\right)^2 \times \frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Ainsi, $p_{xx}^{(2m)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$ terme général d'une série divergente donc la chaîne est récurrente.

b) $E = \mathbb{Z}^2$. Pour être de nouveau au point de départ après n étapes, il faut avoir fait dans chacune des 2 directions autant de pas dans un sens que dans l'autre : ainsi, n doit être pair ($n = 2m$). Si il y a $2k$ pas verticaux (et donc $2m - 2k$ pas horizontaux), alors il doit y avoir k pas vers le haut, k pas vers le bas, $m - k$ pas vers la gauche et $m - k$ pas vers la droite. Ainsi, dans ces cas-là, il y a $C_{2m}^{2k} \times C_{2k}^k \times C_{2m-2k}^{m-k}$ trajets possibles (on a C_{2m}^{2k} façons de choisir les pas verticaux, puis, parmi ceux-ci, on en choisit C_{2k}^k vers le haut et, parmi les $2m - 2k$ horizontaux on choisit les C_{2m-2k}^{m-k} vers la droite par exemple), et ils sont tous de probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^{2m}$. Mais, comme k peut prendre toutes les valeurs de 0 à m , il vient

$$\begin{aligned} p_{xx}^{(2m)} &= \sum_{k=0}^m \frac{(2m)!}{(2k)!(2m-2k)!} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2m-2k)!}{((m-k)!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2m} \\ &= C_{2m}^m \left(\frac{1}{4}\right)^{2m} \left(\sum_{k=0}^m (C_m^k)^2\right) = \left[C_{2m}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right]^2 \sim \frac{1}{\pi m} \end{aligned}$$

car $\sum_{k=0}^m (C_m^k)^2 = \sum_{k=0}^m C_m^k C_m^{m-k} = C_{2m}^m$ (on peut par exemple développer $(1+x)^{2m} = (1+x)^m (1+x)^m$ des 2 façons et identifier le coefficient de x^m dans chacune des expressions).

Ainsi, $p_{xx}^{(2m)} \sim \frac{1}{\pi m}$ terme général d'une série divergente donc la chaîne est récurrente.

c) $E = \mathbb{Z}^3$. Pour être de nouveau au point de départ après n étapes, il faut avoir fait dans chacune des 3 directions autant de pas dans un sens que dans l'autre : ainsi, n doit être pair ($n = 2m$). Si il y a $2k_1$ pas dans la direction 1, $2k_2$ pas dans la direction 2 (et donc $2m - 2k_1 - 2k_2$ pas dans la direction 3), alors il doit y avoir k_1 pas dans chaque sens de la direction 1, k_2 dans ceux de la direction 2 et $m - k_1 - k_2$ dans ceux de la direction 3. Ainsi, dans ces cas-là, il y a $C_{2m}^{2k_1} \times C_{2m-2k_1}^{2k_2} \times C_{2k_1}^{k_1} \times C_{2k_2}^{k_2} \times C_{2(m-k_1-k_2)}^{m-k_1-k_2}$ trajets

possibles et ils sont tous de probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^{2m}$ (3 directions et 2 sens dans chacune, donc 6 possibilités à chaque pas). Il vient alors

$$\begin{aligned} p_{xx}^{(2m)} &= \sum_{k_1, k_2} \frac{(2m)!}{(2k_1)!(2m-2k_1)!} \frac{(2m-2k_1)!}{(2k_2)!(2m-2k_1-2k_2)!} \frac{(2k_1)!(2k_2)!(2m-2k_1-2k_2)!}{(k_1!)^2 (k_2!)^2 ((m-k_1-k_2)!)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \\ &= \sum_{k_1, k_2} \frac{(2m)!}{(k_1!)^2 (k_2!)^2 ((m-k_1-k_2)!)^2} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \end{aligned}$$

On pourrait montrer que l'on peut majorer cette expression par un terme équivalent à $\frac{K_3}{m^{3/2}}$. Ainsi $p_{xx}^{(2m)}$ est le terme général d'une série convergente donc la chaîne est transitoire.

7. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Représenter le graphe de cette chaîne. Déterminer les classes de communication, leur nature, leur périodicité et éventuellement les sous-classes cycliques.
- Calculer les probabilités d'absorption des états transitoires par les classes récurrentes.
- Déterminer les distributions stationnaires de la chaîne et le temps moyen de retour pour les états récurrents. Existe-t-il une distribution limite ?

a) On représente le graphe de la chaîne.

On a une chaîne finie donc essentiel équivaut à récurrent positif et non essentiel équivaut à transitoire. On a 2 classes récurrentes $R_1 = \{1, 6, 8\}$ apériodique, $R_2 = \{4, 7, 10\}$ de période 2, de sous-classes cycliques $\{4, 10\}$ et $\{7\}$ et 3 classes transitoires $T_1 = \{9\}$ apériodique, $T_2 = \{2\}$ de période 0 et $T_3 = \{3, 5\}$ apériodique.

b) On note a_k (resp. a'_k) la probabilité d'absorption de l'état k par la classe R_1 (resp. R_2) pour $k \in T = \{2, 3, 5, 9\}$. Si a désigne le vecteur colonne des a_k , on sait que $a = a(1) + P_T a$ avec $a_9(1) = a_2(1) = a_3(1) = 0$, $a_5(1) = p_{58} = \frac{1}{2}$, soit

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_5 \\ \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{4}a_5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a_3 \\ \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_9 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a_2 = a_5 = a_9 = 2a_3$ et $\left(2 - \frac{1}{4}\right)a_3 = \frac{1}{2}$, soit $a_3 = \frac{2}{7}$ et $a_2 = a_5 = a_9 = \frac{4}{7}$.

De même, $\begin{pmatrix} a'_2 \\ a'_3 \\ a'_5 \\ a'_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_2 \\ a'_3 \\ a'_5 \\ a'_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_5 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a'_3 + \frac{1}{4}a'_5 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a'_3 \\ \frac{3}{4}a'_2 + \frac{1}{4}a'_9 \end{pmatrix}$ donne $a'_2 = a'_5 =$

a'_9 , $a'_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a'_5$ et $a'_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}a'_5$, soit $a'_2 = a'_5 = a'_9 = \frac{3}{7}$ et $a'_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} = \frac{5}{7}$ (et on a bien $a_k + a'_k = 1$).

c) On a déjà $\pi_2 = \pi_3 = \pi_5 = \pi_9 = 0$ (états transitoires) et $\pi = \lambda_1 \pi^{(1)} + \lambda_2 \pi^{(2)}$ où $\pi^{(i)}$ est l'unique distribution stationnaire de la chaîne restreinte à R_i , $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. On a

$$(\pi_1^{(1)}, \pi_6^{(1)}, \pi_8^{(1)}) = (\pi_1^{(1)}, \pi_6^{(1)}, \pi_8^{(1)}) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\pi_6^{(1)} + \pi_8^{(1)}}{2}, \frac{\pi_1^{(1)} + \pi_8^{(1)}}{2}, \frac{\pi_1^{(1)} + \pi_6^{(1)}}{2} \right) \text{ avec}$$

$\pi_1^{(1)} + \pi_6^{(1)} + \pi_8^{(1)} = 1$. On a donc $\pi_1^{(1)} = \pi_6^{(1)} = \pi_8^{(1)} = \frac{1}{3}$ et $\mu_1 = \mu_6 = \mu_8 = 3$. De même,

$$(\pi_4^{(2)}, \pi_7^{(2)}, \pi_{10}^{(2)}) = (\pi_4^{(2)}, \pi_7^{(2)}, \pi_{10}^{(2)}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\pi_7^{(2)}, \pi_4^{(2)} + \pi_{10}^{(2)}, \frac{1}{2}\pi_7^{(2)} \right) \text{ avec } \pi_4^{(2)} + \pi_7^{(2)} +$$

$\pi_{10}^{(2)} = 1$. On a donc $\pi_4^{(2)} = \pi_{10}^{(2)} = \frac{1}{2}\pi_7^{(2)}$ d'où $\pi_7^{(2)} = \frac{1}{2}$, $\pi_4^{(2)} = \pi_{10}^{(2)} = \frac{1}{4}$; $\mu_4 = \mu_{10} = 4$, $\mu_7 = 2$.

Finalement $\pi = \left(\frac{\lambda_1}{3}, 0, 0, \frac{\lambda_2}{4}, 0, \frac{\lambda_1}{3}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1}{3}, 0, \frac{\lambda_2}{4} \right)$, $\lambda_i \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Processus de Poisson

8. Calculer la loi du n -ième temps d'arrivée d'un processus de Poisson de deux façons :

- a) En utilisant $[S_n \leq t] = [N_t \geq n]$;
- b) En utilisant $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

a) $F_{S_n}(t) = P([S_n \leq t]) = P([N_t \geq n]) = 1 - P([N_t \leq n-1])$ pour $n \geq 1$ ($S_0 = 0$), soit $F_{S_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ pour $n \geq 1$ et $t > 0$. On a alors,

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) = F'_{S_n}(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k k t^{k-1}}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

et finalement $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)$: on reconnaît la densité de la loi gamma $Ga(n, \lambda)$.

b) Par récurrence,

- $S_1 = T_1$ donc S_1 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda) = Ga(1, \lambda)$.
- Si S_n suit la loi $Ga(n, \lambda)$, comme $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$ et que $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ est indépendante de T_{n+1} , on a :

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(t) &= \int f_{S_n}(u) f_{T_{n+1}}(t-u) du \\ &= \int \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda u} u^{n-1} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u) \lambda e^{-\lambda(t-u)} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t-u) du \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int u^{n-1} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t-u) du \end{aligned}$$

avec $\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t-u) = 1$ si $u > 0$ et $t-u > 0$, c'est-à-dire $0 < u < t$, soit $t > 0$ et $u \in]0, t[$. On a donc

$$f_{S_{n+1}}(t) = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t) \int_0^t u^{n-1} du = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t) \frac{t^n}{n}$$

soit $f_{S_{n+1}}(t) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda t} t^n \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)$ et S_{n+1} suit donc bien la loi gamma $Ga(n+1, \lambda)$.

9. Un radar est placé sur une route où il passe en moyenne 5 véhicules en excès de vitesse par heure. On admet que ces véhicules forment un Processus de Poisson. Quelle est la probabilité qu'au bout d'une demi-heure, une voiture exactement se soit arrêtée sachant que :

a) dans le premier quart d'heure, aucune voiture n'a été prise et dans la première heure, deux voitures ont été prises ;

b) la première heure, deux voitures ont été prises et dans les deux premières heures, trois voitures ont été prises ;

c) dans les dix premières minutes, aucune voiture n'a été prise et dans le premier quart d'heure, une voiture a été prise.

$$\begin{aligned}
P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) &= \frac{P([N_u = k] \cap [N_s = i] \cap [N_t = j])}{P([N_s = i] \cap [N_t = j])} \text{ avec} \\
P([N_s = i] \cap [N_t = j]) &= P([N_s = i] \cap [N_t - N_s = j - i]) \\
&= P([N_s = i])P([N_t - N_s = j - i]) \\
&= P([N_s = i])P([N_{t-s} = j - i]) \\
&= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^i}{i!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^j s^i (t-s)^{j-i}}{i!(j-i)!}
\end{aligned}$$

a) Cas $s \leq u \leq t$. Pour $i \leq k \leq j$, on a :

$$\begin{aligned}
P([N_u = k] \cap [N_s = i] \cap [N_t = j]) &= P([N_s = i] \cap [N_u - N_s = k - i] \cap [N_t - N_u = j - k]) \\
&= P([N_s = i])P([N_u - N_s = k - i])P([N_t - N_u = j - k]) \\
&= P([N_s = i])P([N_{u-s} = k - i])P([N_{t-u} = j - k])
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) &= \frac{P([N_{u-s} = k - i])P([N_{t-u} = j - k])}{P([N_{t-s} = j - i])} \\
&= \frac{e^{-\lambda(u-s)} \frac{(\lambda(u-s))^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda(t-u)} \frac{(\lambda(t-u))^{j-k}}{(j-k)!}}{e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}}.
\end{aligned}$$

soit
$$P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) = C_{j-i}^{k-i} \frac{(u-s)^{k-i} (t-u)^{j-k}}{(t-s)^{j-i}}.$$

Pour $u = 1/2$, $k = 1$, $\lambda = 1h^{-1}$, $s = 1/4$, $t = 1$, $i = 0$ et $j = 2$, on a $u - s = \frac{1}{4}$, $t - u = \frac{1}{2}$, $t - s = \frac{3}{4}$, $k - i = 1$, $j - k = 1$, $j - i = 2$ et $p_a = 2 \times \frac{\frac{1}{4} \frac{1}{2}}{(\frac{3}{4})^2}$, soit $p_1 = \frac{4}{9} \approx 0,44$.

b) Cas $u \leq s \leq t$. Pour $k \leq i \leq j$, on a :

$$\begin{aligned}
P([N_u = k] \cap [N_s = i] \cap [N_t = j]) &= P([N_u = k] \cap [N_s - N_u = i - k] \cap [N_t - N_s = j - i]) \\
&= P([N_u = k])P([N_s - N_u = i - k])P([N_t - N_s = j - i]) \\
&= P([N_u = k])P([N_{s-u} = i - k])P([N_{t-s} = j - i])
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) &= \frac{P([N_u = k])P([N_{s-u} = i - k])}{P([N_s = i])} \\
&= \frac{e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda(s-u)} \frac{(\lambda(s-u))^{i-k}}{(i-k)!}}{e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^i}{i!}}.
\end{aligned}$$

On a donc
$$P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) = C_i^k \frac{u^k (s-u)^{i-k}}{s^i}.$$

soit
$$P([N_u = k]/[N_s = i] \cap [N_t = j]) = C_i^k \frac{u^k (s-u)^{i-k}}{s^i}.$$

Pour $u = 1/2$, $k = 1$, $\lambda = 1h^{-1}$, $s = 1$, $t = 2$, $i = 2$ et $j = 3$, on a $s - u = \frac{3}{4}$, $i - k = 1$ et $p_b = 2 \times \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, soit $p_b = \frac{1}{2} = 0,5$.

c) Cas $s \leq t \leq u$. Pour $i \leq j \leq k$, on a :

$$\begin{aligned} P([N_u = k] \cap [N_s = i] \cap [N_t = j]) &= P([N_s = i] \cap [N_t - N_s = j - i] \cap [N_u - N_t = k - j]) \\ &= P([N_s = i])P([N_t - N_s = j - i])P([N_u - N_t = k - j]) \\ &= P([N_s = i])P([N_{t-s} = j - i])P([N_{u-t} = k - j]) \end{aligned}$$

On a donc
$$P([N_u = k] | [N_s = i] \cap [N_t = j]) = P([N_{u-t} = k - j]) = e^{-\lambda(u-t)} \frac{(\lambda(u-t))^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Pour $u = 1/2$, $k = 1$, $\lambda = 1h^{-1}$, $s = 1/6$, $t = 1/4$, $i = 0$ et $j = 1$, on a $u - t = 1/4$, $k - j = 0$ et $p_c = e^{-1/4} \approx 0,56$.

10. Les arrivées d'autobus à une station forment un processus de Poisson d'intensité λ . Chaque autobus s'arrête un temps fixe τ à la station. Un passager qui arrive à un instant t_0 monte dans le bus si celui-ci est là, attend pendant un temps τ' , puis, si l'autobus n'est pas arrivé pendant le temps τ' , quitte la station et s'en va à pied.

Déterminer la probabilité que le passager prenne l'autobus.

Le passager repart à pied si lorsqu'il arrive à l'instant t_0 , il n'y a plus de bus, donc le dernier est arrivé avant $t_0 - \tau$ (sinon, il serait encore là), et si à l'instant $t_0 + \tau'$, le suivant n'est toujours pas arrivé. Il ne doit y avoir aucune arrivée de bus entre $t_0 - \tau$ et $t_0 + \tau'$, soit, pendant une durée $t_0 + \tau' - (t_0 - \tau) = \tau + \tau'$. Ainsi, la probabilité que le passager reparte à pied est $P([N_{t_0 + \tau'} - N_{t_0 - \tau} = 0]) = P([N_{\tau + \tau'} = 0]) = e^{-\lambda(\tau + \tau')}$ et la probabilité que le passager prenne l'autobus est $1 - e^{-\lambda(\tau + \tau')}$.

11. Sur une route à sens unique, l'écoulement des voitures peut être décrit par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \frac{1}{6}s^{-1}$. Un piéton qui veut traverser la route a besoin d'un intervalle d'au moins $4s$ entre 2 voitures successives. Calculer :

- la probabilité pour qu'il doive attendre ;
- la durée moyenne des intervalles qui lui permettent de traverser la route ;
- le nombre moyen de voitures qu'il voit passer avant de pouvoir traverser la route.

a) Le piéton ayant besoin d'au moins $4s$ pour traverser, il devra attendre si $U \leq 4$.

Or $P([U \leq 4]) = \int_0^4 \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_0^4 = 1 - e^{-4\lambda}$ car on a vu à l'exercice 3 que U suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Comme $\lambda = 1/6$, $P([U \leq 4]) = 1 - e^{-4/6}$.

La probabilité pour qu'il doive attendre est donc $1 - e^{-2/3} \approx 0,487$.

b) On cherche $\mathbb{E}^{[U > 4]}(U)$ c'est-à-dire $\int u f_U^{[U > 4]}(u) du$. On a

$$\begin{aligned} F_U^{[U > 4]}(u) &= P^{[U > 4]}([U \leq u]) = \frac{P([U \leq u] \cap [U > 4])}{P([U > 4])} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 4 \\ \frac{P([4 < U \leq u])}{P([U > 4])} = \frac{F_U(u) - F_U(4)}{P([U > 4])} & \text{si } u > 4 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $f_U^{[U>4]}(u) = \frac{f_U(u)}{P([U > 4])} \mathbb{I}_{[4,+\infty[}(u) = \lambda e^{-\lambda(u-4)} \mathbb{I}_{[4,+\infty[}(u)$ puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[U>4]}(U) &= \int_4^{+\infty} \lambda u e^{-\lambda(u-4)} du \stackrel{v=u-4}{=} \int_0^{+\infty} \lambda(v+4) e^{-\lambda v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} v \lambda e^{-\lambda v} dv + 4 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv = \frac{1}{\lambda} + 4 \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} v \lambda e^{-\lambda v} dv$ est l'espérance d'une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv$ l'intégrale de sa densité.

Ainsi, il faut en moyenne $6 + 4 = 10$ s pour que le piéton puisse traverser.

c) Soit N le nombre moyen de voitures que voit passer le piéton avant de pouvoir traverser la route.

On a

- $[N = 0] = [U > 4]$, où U est le temps entre l'arrivée du piéton et la prochaine voiture ;
- $[N = 1] = [U \leq 4] \cap [U_1 > 4]$ où U_1 est le temps entre la première et la deuxième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.

- Plus généralement, $[N = k] = [U \leq 4] \cap [U_1 \leq 4] \cdots \cap [U_{k-1} \leq 4] \cap [U_k > 4]$ où U_k est le temps entre la k -ième et la $(k+1)$ -ième voiture qui se présentent après l'arrivée du piéton.

Les v.a.r. U, U_1, \dots, U_k étant toutes indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ on a $P([N = 0]) = P([U > 4]) = e^{-4\lambda}$ et

$$\begin{aligned} P([N = k]) &= P([U \leq 4])P([U_1 \leq 4]) \cdots P([U_{k-1} \leq 4])P([U_k > 4]) \\ &= e^{-4\lambda}(1 - e^{-4\lambda})^k = e^{-2/3}(1 - e^{-2/3})^k \end{aligned}$$

(valable aussi pour $k = 0$). On reconnaît la loi géométrique $\mathcal{G}(e^{-2/3})$ sur \mathbb{N} .

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k P([N = k]) = e^{-2/3} \sum_{k=0}^{+\infty} (s(1 - e^{-2/3}))^k$$

soit $G_N(s) = \frac{e^{-2/3}}{1 - s(1 - e^{-2/3})}$ et $G'_N(s) = \frac{e^{-2/3}(1 - e^{-2/3})}{(1 - s(1 - e^{-2/3}))^2}$.

On a alors $\mathbb{E}(N) = G'_N(1) = \frac{1 - e^{-2/3}}{e^{-2/3}} = e^{2/3} - 1 \approx 0,948$.

Le piéton voit donc passer en moyenne 1 voiture avant de traverser.

12. On considère un appareil de comptage, qui dénombre les voitures sur une route, de flux poissonien d'intensité λ . L'appareil peut tomber en panne à l'instant T , où T est une variable aléatoire de loi Gamma $\gamma(1, a)$.

Soit X le nombre de véhicules enregistrés par l'appareil jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Déterminer la loi et l'espérance de X .

$$P([X = n]) = \int P([X = n]/[T = t])f_T(t)dt$$

avec $P([X = n]/[T = t]) = P([X_t = n])$ (i.e. $P_X^{[T=t]} = P_{X_t}$) car, à l'instant t où l'appareil tombe en panne, il a enregistré n passages. On sait que $P([X_t = n]) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ et $f_T(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-t} t^{a-1} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)$.

Donc :

$$\begin{aligned} P([X = n]) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-t} t^{a-1} dt = \frac{\lambda^n}{n! \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+1)t} t^{a+n-1} dt \\ &= \frac{\lambda^n}{n! \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-v} \frac{v^{a+n-1}}{(\lambda+1)^{a+n}} dt = \frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^{n+a}} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)n!} \end{aligned}$$

La loi de X étant peu sympathique, pour calculer $\mathbb{E}(X)$, il est préférable de passer par $\mathbb{E}^{(T=t)}(X) = \mathbb{E}(X_t) = \lambda t$. On a alors $\mathbb{E}^T(X) = \lambda T$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^T(X)) = \lambda \mathbb{E}(T) = \lambda a$.

Processus de naissance et de mort

13. La durée de bon fonctionnement d'une machine est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ . En cas de panne, le temps de réparation obéit à une loi exponentielle de paramètre μ .

Quelle est la probabilité que la machine fonctionne à l'instant t si elle fonctionnait à l'instant 0 ?

On a un processus de Markov à 2 états : état 0 : la machine fonctionne ; état 1 la machine est en panne.

Si T est la durée de bon fonctionnement, on a

$$p_{0,1}(h) = P([T < t + h] | [T > t]) = \frac{P([t < T < t + h])}{P([T > t])}$$

avec $P([T > t]) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$ et $P([t < T < t + h]) = \int_t^{t+h} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+h)}$ donc

$$p_{0,1}(h) = 1 - e^{-\lambda h} = 1 - (1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h)$$

donc $\lambda_0 = \lambda$.

De même, avec la durée de réparation, $p_{1,0}(h) = \mu h + o(h)$ donc $\mu_1 = \mu$.

On a un processus de naissance et de mort extrêmement simple, puisqu'il n'y a que 2 états (et un seul "boudin"!). Ainsi, il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \\ p_0(0) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu(1 - p_0(t)) \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \\ p_0(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire à} \quad \begin{cases} p_0'(t) = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \\ p_0(0) = 0 \end{cases}.$$

On est conduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont une solution particulière est $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ est dont l'équation sans second membre a pour solution $Ce^{-(\lambda + \mu)t}$.

Ainsi $p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + Ce^{-(\lambda + \mu)t}$ avec $p_0(0) = 0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + C$, donc $C = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et finalement,

la probabilité que la machine fonctionne à l'instant t est $p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$.

14. Un joueur décide de faire des paris jusqu'à qu'il soit ruiné ou bien qu'il ait atteint N euro. S'il dispose de j euro quand il effectue un pari, alors, à ce pari, il gagne 1 euro avec la probabilité p_j ou bien il perd 1 euro avec la probabilité $q_j = 1 - p_j$. On note a_k la probabilité de finir ruiné avec une fortune initiale de k euro et $a_k^{(n)}$ la probabilité de finir ruiné en n paris.

a) Modéliser le problème par une chaîne de Markov et faire le graphe correspondant.

b) Déterminer a_N et a_0 .

c) Montrer que :

- $a_1^{(1)} = q_1$ et $a_1^{(n)} = p_1 a_2^{(n-1)}$ si $n \geq 2$;
- pour $j \geq 2$, $a_j^{(1)} = 0$ et $a_j^{(n)} = p_j a_{j+1}^{(n-1)} + q_j a_{j-1}^{(n-1)}$ si $n \geq 2$.

d) En déduire que :

- $a_1 = q_1 + p_1 a_2$ et $a_j = p_j a_{j+1} + q_j a_{j-1}$ si $j \geq 2$, puis
- $p_j(a_j - a_{j+1}) = q_j(a_{j-1} - a_j)$ pour $1 \leq j \leq N - 1$;
- $a_j - a_{j+1} = d_j(a_0 - a_1)$ pour $1 \leq j \leq N - 1$, si on pose $d_j = \frac{q_1 \cdots q_j}{p_1 \cdots p_j}$.

e) Vérifier que $a_k = \sum_{j=k}^{N-1} (a_j - a_{j+1})$ pour $1 \leq k \leq N - 1$ et que $1 = \sum_{j=0}^{N-1} (a_j - a_{j+1})$,

et en déduire que $a_k = \frac{\sum_{j=k}^{N-1} d_j}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j}$.

f) En déduire, en faisant $N \rightarrow +\infty$, la probabilité de ruine du joueur.

a) Le processus est bien invariant dans le temps et la connaissance du processus à un instant suffit pour déterminer la probabilité d'occupation d'un état à l'instant suivant. On a bien une chaîne de Markov, de matrice de transition $P = (p_{i,j})$ où $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = q_i$ et $p_{i,j} = 0$ si $|i - j| \neq 1$.

b) $a_N = 0$ et $a_0 = 1$.

c) • $a_1^{(1)} = q_1$ (passage de 1 à 0 en 1 étape) et $a_1^{(n)} = p_1 a_2^{(n-1)}$ si $n \geq 2$ car alors, on est obligé de commencer par un passage de 1 à 2 pour ne pas être absorbé directement ; il faudra ensuite $n - 1$ étapes pour passer de 2 à 0.

- pour $j \geq 2$, $a_j^{(1)} = 0$ car on ne peut pas passer directement de j à 0.

Pour déterminer $a_j^{(n)}$, on décompose en 2 cas suivant le premier déplacement : soit on commence par passer de j à $j+1$ (avec la probabilité p_j), soit on commence par passer de j à $j-1$ (avec la probabilité q_j) ; il restera alors $n-1$ déplacements à effectuer pour se rendre en 0 et $a_j^{(n)} = p_j a_{j+1}^{(n-1)} + q_j a_{j-1}^{(n-1)}$ si $n \geq 2$.

d) • Il faut maintenant utiliser $a_j = \sum_{n=1}^{+\infty} a_j^{(n)}$:

$$a_1 = a_1^{(1)} + \sum_{n \geq 2} a_1^{(n)} = q_1 + p_1 \sum_{n \geq 2} a_2^{(n-1)}, \text{ soit } \boxed{a_1 = q_1 + p_1 a_2}.$$

$$\text{De même, si } j \geq 2, a_j = a_j^{(1)} + \sum_{n \geq 2} a_j^{(n)} = p_j \sum_{n \geq 2} a_{j+1}^{(n-1)} + q_j \sum_{n \geq 2} a_{j-1}^{(n-1)}, \text{ d'où } \boxed{a_j = p_j a_{j+1} + q_j a_{j-1} \text{ si } j \geq 2}.$$

• On a alors, comme $a_j = (p_j + q_j)a_j$, $\boxed{p_j(a_j - a_{j+1}) = q_j(a_{j-1} - a_j)}$ pour $1 \leq j \leq N-1$ (car $a_j = p_j a_{j+1} + q_j a_{j-1}$ est encore vrai pour $j=1$ puisque $a_0 = 1$).

• $a_j - a_{j+1} = \frac{q_j}{p_j}(a_{j-1} - a_j)$ donne $a_1 - a_2 = \frac{q_1}{p_1}(a_1 - a_0)$, puis $a_2 - a_3 = \frac{q_2}{p_2} \frac{q_1}{p_1}(a_1 - a_0)$ et de proche en proche, $\boxed{a_j - a_{j+1} = d_j(a_0 - a_1)}$ pour $1 \leq j \leq N-1$, si on pose $d_j = \frac{q_1 \cdots q_j}{p_1 \cdots p_j}$.

e) $\sum_{j=k}^{N-1} (a_j - a_{j+1})$ est une "somme télescopique" : tout se simplifie sauf le premier et le dernier

$$\text{terme qui vaut } a_N = 0 \text{ et donc } \boxed{\sum_{j=k}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) = a_k \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1}.$$

Le principe reste le même si l'on part de $j=0$. On a alors $\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} (a_j - a_{j+1}) = a_0 - a_N = 1}$.

Ainsi $a_k = \frac{\sum_{j=k}^{N-1} (a_j - a_{j+1})}{\sum_{j=0}^{N-1} (a_j - a_{j+1})}$ et, comme $(a_j - a_{j+1}) = d_j(a_0 - a_1)$ pour $j \geq 1$, on a bien, en simplifiant

$$\text{numérateur et dénominateur par } (a_0 - a_1), \text{ on a bien } \boxed{a_k = \frac{\sum_{j=k}^{N-1} d_j}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j}}.$$

f) Si le joueur n'arrête que lorsqu'il est ruiné, cela revient à considérer que $N \rightarrow +\infty$ et on a alors

$$\boxed{a_k = \frac{\sum_{j=k}^{+\infty} d_j}{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} d_j} \text{ si } \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \text{ converge.}}$$

15. On considère une station de taxis comportant K places pour les taxis et une capacité d'accueil illimitée pour les clients qui se présentent, de façon Poissonnienne, au rythme de λ par heure. Les taxis arrivent également de façon Poissonnienne, au rythme de μ par heure, mais ne s'arrêtent qu'avec la probabilité $\frac{1}{m+1}$ s'il y a déjà m taxis ($0 \leq m < K$).

a) Vérifier qu'on est en présence d'un processus de naissance et de mort et en donner le graphe (états $(n, m)_{n \geq 0, m \in \{0, \dots, K\}}$).

b) *A.N.* : $K = 3, \lambda = 10, \mu = 15$. Donner la proportion de temps pendant laquelle il n'y a pas de taxi et le temps moyen d'attente d'un client.

a) On ne peut jamais avoir en même temps des taxis et des clients, donc les états sont

$$(0, K) \cdots (0, 1), (0, 0), (1, 0), \cdots, (n, 0), \cdots,$$

les différentes transitions possibles correspondant à une arrivée d'un client ou d'un taxi, on a le graphe et les équations de balance suivants :

$$\begin{aligned} \lambda p_{0,K} &= \frac{\mu}{K} p_{0,K-1} \\ &\vdots \\ \lambda p_{0,1} &= \frac{\mu}{1} p_{0,0} \\ \lambda p_{0,0} &= \mu p_{1,0} \\ &\vdots \\ \lambda p_{n-1,0} &= \mu p_{n,0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

et donc, en posant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $p_{0,K-1} = K\rho p_{0,K}, \dots, p_{0,0} = \rho p_{0,1} = \dots = K!\rho^K p_{0,K}$, puis $p_{1,0} = \rho p_{0,0}$, $p_{2,0} = \rho^2 p_{0,0}, \dots, p_{n,0} = \rho^n p_{0,0}, \dots$ et $p_{0,1} = \frac{1}{\rho} p_{0,0}, \dots, p_{0,K} = \frac{1}{K!\rho^K} p_{0,0}$ et on obtient $p_{0,0}$ en écrivant que la somme des probabilités de chaque état vaut 1, ce qui donne $p_{0,0} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n + \sum_{m=1}^K \frac{1}{m!\rho^m} \right] = 1$, qui n'est possible que si $\rho < 1$. On a alors :

$$p_{0,0} = \left[\frac{1}{1-\rho} + \sum_{m=1}^K \frac{1}{m!\rho^m} \right]^{-1}, \quad p_{n,0} = \rho^n p_{0,0} \text{ et } p_{0,m} = \frac{1}{m!\rho^m} p_{0,0}.$$

b) A.N. : $K = 3, \lambda = 10, \mu = 15$. Alors $\rho = \frac{2}{3}$ et $p_{0,0} = \left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2 \times \frac{4}{9}} + \frac{1}{6 \times \frac{8}{27}} \right]^{-1}$, soit $p_{0,0} = \left[3 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{9}{16} \right]^{-1} = \left[\frac{48 + 24 + 18 + 9}{16} \right]^{-1}$, i.e. $p_{0,0} = \frac{16}{99}$ et on a alors $p_{0,1} = \frac{8}{33}, p_{0,2} = \frac{2}{11}$ et $p_{0,3} = \frac{1}{11}$. La probabilité qu'il y ait au moins un taxi est $p_{0,1} + p_{0,2} + p_{0,3} = \frac{17}{33}$ donc

il n'y a pas de taxi pendant la fraction de temps $\frac{16}{33}$ soit environ 48,5% du temps.

Une personne qui arrive attend en moyenne $\frac{1}{\mu}$ si elle est seule et $\frac{n+1}{\mu}$ si il y a déjà n personne (l'attente de chaque taxi est en moyenne $\frac{1}{\mu}$).

On a donc $W_a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\mu} p_n = \frac{p_{0,0}}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\rho^n = \frac{p_{0,0}}{\mu(1-\rho)^2}$, soit $W_a = \frac{16}{99} \times \frac{9}{15} = \frac{32}{330} h \approx 5,82 mn$:

le temps moyen d'attente d'un client est donc environ 5mn49s.

16. On considère N étudiants qui, chacun, lorsqu'ils sont à Toulouse, y restent un temps exponentiel de paramètre μ avant d'en sortir et inversement, restent un temps exponentiel de paramètre λ à l'extérieur avant de rentrer. Soit X_t le nombre de ces étudiants qui sont sur Toulouse à l'instant t . Vérifier que (X_t) est un processus de naissance et de mort ; représenter son graphe ; établir que la distribution stationnaire est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$ et trouver le nombre moyen d'étudiants sur Toulouse lorsque $N = 23$, $\frac{1}{\mu} = 5 \text{ jours}$ et $\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ jours}$.

Chaque étudiant passe de Toulouse à l'extérieur avec un taux μ (car T_i a pour loi $\mathcal{E}(\mu)$ et la preuve est la même qu'à l'exercice 1), et passe de l'extérieur à Toulouse avec un taux λ (car T_e a pour loi $\mathcal{E}(\lambda)$).

- À partir de 0, la seule transition possible (non négligeable, du moins!) est de 0 vers 1, qui correspond à une entrée, pouvant venir de l'un des N étudiants : taux $N\lambda$.
- À partir de N , la seule transition possible est de N vers $N-1$, qui correspond à un départ de l'un des N étudiants : taux $N\mu$.
- À partir de $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on peut passer à $k-1$ si l'un des k étudiants quitte Toulouse (taux $k\mu$ et on peut passer à $k+1$ si l'un des $N-k$ étudiants revient à Toulouse (taux $(N-k)\lambda$).

On a bien un processus de naissance et de mort dont le graphe des taux est le suivant :

Pour déterminer le régime stationnaire, on écrit les équations de "balance", "boudin par boudin". On a donc :

$$\begin{cases} N\lambda p_0 & = \mu p_1 \\ (N-1)\lambda p_1 & = 2\mu p_2 \\ \vdots & \\ (N-k+1)\lambda p_{k-1} & = k\mu p_k \\ \vdots & \\ \lambda p_{N-1} & = N\mu p_N \end{cases}$$

ce qui donne, en exprimant toutes les probabilités en fonction de p_0 :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{N\lambda}{\mu} p_0 \\ p_2 = \frac{(N-1)\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{N(N-1)}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \\ \vdots \\ p_k = \frac{(N-k+1)\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \\ \vdots \\ p_N = \frac{\lambda}{N\mu} p_{N-1} = \frac{N(N-1)\dots 1}{N!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N p_0 \end{cases},$$

soit $p_k = C_N^k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$ et $\sum_{k=0}^N p_k = 1$ donne $p_0 \left[\sum_{k=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] = 1$. Or $\sum_{k=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)^N = \frac{(\lambda + \mu)^N}{\mu^N}$

et donc $p_k = C_N^k \frac{\lambda^k \mu^{N-k}}{(\lambda + \mu)^N}$. La distribution stationnaire est donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

En particulier, $\mathbb{E}(X) = N \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = N \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\lambda}}$.

A. N. $N = 23$, $\mathbb{E}(T_i) = 5 = \frac{1}{\mu}$ et $\mathbb{E}(T_e) = 2 = \frac{1}{\lambda}$, donc $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{23}{1 + \frac{2}{5}} = 23 \times \frac{5}{7}$.

Le nombre moyen d'étudiants sur Toulouse est donc ≈ 16 .