

# Rearrangements de champs gaussiens

Raphaël Lachièze-Rey

Unité de Recherche en Mathématiques, Université de Luxembourg

En collaboration avec Youri Davydov, Université Lille 1

18 mars 2011

# Introduction

- $X$  : Champ gaussien centré sur  $C$  compact de  $\mathbb{R}^d$ .
- $X_n$  : Régularisations  $X_n(z) \rightarrow X(z)$  pour tout  $z$ . (Approximation simpliciale, convolution.)

## Convergence des fonctionnelles

$$V_n(f, X) = \int_C f(b_n \nabla X_n(z)) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mu_n(dy)$$

avec

- $\mu_n = \lambda^d (b_n \nabla X_n)^{-1}$ ,
- $b_n \geq 0$  approprié,
- $f$  continue,  $f(y) = O(\|y\|^2)$  quand  $\|y\| \rightarrow \infty$ .

- 1 2 exemples introductifs
- 2 Résultats de convergence en dimension  $d$
- 3 Réarrangement multi-dimensionnel

1 2 exemples introductifs

2 Résultats de convergence en dimension  $d$

3 Réarrangement multi-dimensionnel

# Variance quadratique d'un mouvement brownien

$X$  : Mouvement brownien sur  $[0, 1]$ .

**Variance quadratique :**

$$v_n(X) = \sum_{k=1}^{n-1} |X((k+1)/n) - X(k/n)|^2.$$

Alors

$$v_n(X) \rightarrow 1 \quad p.s.$$

## Autre formulation

$X_n$  : Interpolation affine de  $X$  sur  $\{1/n, 2/n, \dots\}$ , dérivable presque partout.

$$v_n(X) = V_n(y^2, X) = \sum_{k=1}^{n-1} |n^{-1/2} X'_n(k/n)|^2 = \int_0^1 (n^{-1/2} X'_n)^2(z) dz$$

# Mesure d'occupation

## Mesure d'occupation du gradient :

$$\mu_n = \lambda_1(n^{-1/2}X'_n)^{-1}$$

$$\mu_n([a, b]) = \#\{k : n^{-1/2}X'_n(k/n) \in [a, b]\} = \#\{k : G_k \in [a, b]\},$$

$G_k \text{ iid} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

$\mu_n$  : Mesure empirique

$$\mu_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad p.s.,$$

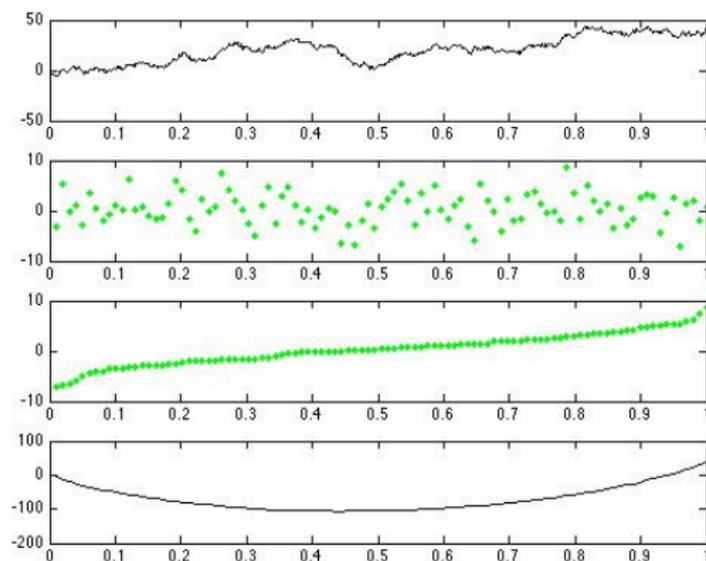
Pour tout  $f$  continue bornée,

$$V_n(f, X) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mu_n(dy) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(y) \mu(dy).$$

## Rearrangement convexe

On réarrange les accroissements  $\rightarrow$  fonction monotone,

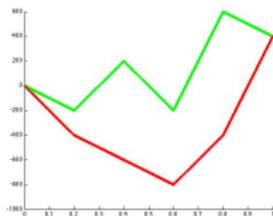
On intègre cette fonction  $\rightarrow$  fonction convexe :  $b_n \in \mathcal{X}_n$



# Réarrangement convexe général

**Vert** : Fonction  $f$

**Rouge** : Réarrangement convexe  $\mathcal{C}f$ .



Revient à changer l'ordre des accroissements :

## Definition

Pour  $f \in \mathcal{C}^1$ , Le réarrangement convexe de  $f$  est l'unique fonction convexe  $\mathcal{C}f$  qui vérifie

$$\lambda_1 f'^{-1} = \lambda_1 (\mathcal{C}f)'^{-1}$$

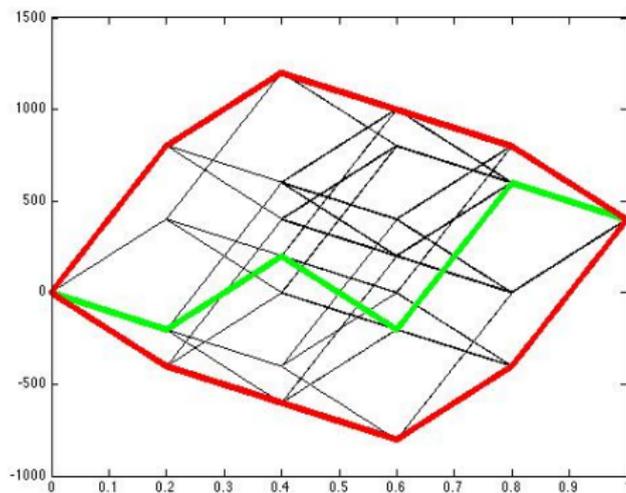
et  $f(0) = \mathcal{C}f(0)$ .

# Application en économétrie

Ressource distribuée à une population de taille  $N$ .

- Membre numéro  $k$  reçoit  $r_k$ .
- Revenu cumulé :  $f(n) = \sum_{k \leq n} r_k$ .

$f$  est étendue à une fonction linéaire par morceaux  $[0, N]$ .



# Réarrangements asymptotiques

$X$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$   $\longrightarrow$  Pas de  $\mathfrak{E}X$ .

On définit

$$\mathfrak{E}X(z) = b_n \lim_n \mathfrak{E}X_n(z)$$

si la limite existe.

# Réarrangement asymptotique du MBS

**Rappel** : Pour le MBS,  $\mu_n = \lambda_1(b_n X'_n)^{-1} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  p.s.

## Théorème

Soit  $f_n, n \geq 1$  et  $f$  des fonctions convexes. Alors

$$\lambda_1(f'_n)^{-1} \xrightarrow{L^1} \lambda_1(f')^{-1}$$

si et seulement si

$$\|\mathfrak{C}f_n - \mathfrak{C}f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Donc :

## Théorème (Davydov, Vershik 98)

$X$  : MBS sur  $[0, 1]$

$$\|b_n \mathfrak{C}X_n - L\|_\infty \rightarrow 0,$$

où  $L$  est la courbe de Lorenz.

- Réarrangements convexes de processus discrets (Davydov, Zitikis, Csörgö, Goldie,...)
- Processus sur  $[0, 1]$  (Davydov, Vershik, ...)
- Processus univariés à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  (Thilly)
- Processus sur  $\mathbb{R}_+$  (Csörgö, Horvath, Rao, Zitikis,...)

—→ Estimation du paramètre de Hurst pour le fBm, Convergence vers l'indice de fluctuation (économétrie)

Jacod '08 montre la convergence pour des quantités du type

$$W_n(f, X) = \sum_k f((X_{(k+1)\Delta_n} - X(k\Delta_n))/\sqrt{\Delta_n})$$

pour  $\Delta_n \rightarrow 0$ .

- convergence en  $\mathbb{P}$ ,
- $X$  semi-martingale.

Typiquement pour  $f(x) = |x|^p$  ( $p$ -variations).



$$X_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * X$$

(convolution),  $X$  MBS.

Berzin & Leon '97 ont montré  $\mu_\varepsilon = \lambda_1(X_\varepsilon)' \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  p.s.

Utile pour étudier le nombre de passages à un niveau  $x$  donné.

Résultats similaires pour le pont brownien

- Azais & Wschebor 96 ont montré la convergence faible p.s.  $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$  pour de nombreux processus (mBf, processus stationnaires, martingales continues) lorsque

$$X_\varepsilon(t) = \frac{X(t + \varepsilon) - X(t)}{a_\varepsilon}.$$

## En dimension $d$

Estimation des  $p$ -variations d'un champ gaussien (Reveillac '09)

$$\sum_{i,j} \|\Delta X_{ij}\|^p,$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta X_{i,j} = & X((i+1)/n, (j+1)/n) + X(i/n, j/n) \\ & - X((i+1)/n, j/n) - X(i/n, (j+1)/n) \end{aligned}$$

- 1 2 exemples introductifs
- 2 Résultats de convergence en dimension  $d$
- 3 Réarrangement multi-dimensionnel

## Plan :

- 1 On définit une régularisation  $X_n \rightarrow X$ .
- 2 On calcule le gradient  $Y_n = \nabla X_n$ ,
- 3 On calcule  $b_n$  pour que

$$\mathbf{E}\mu_n(B) = \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}_{b_n \nabla X_n(z) \in B} dz \rightarrow \mu(B)$$

pour une certaine mesure  $\mu$  (régulière) pour tout Borélien  $B$ .

- 4 On montre que pour tout Borélien  $B$

$$\mu_n(B) - \mathbf{E}\mu_n(B) \rightarrow 0 \quad p.s.$$

Dans les cas considérés, pour chaque  $z$ ,  $b_n Y_n(z)$  converge faiblement vers  $\mu_z$ , et  $\mu$  est le mélange gaussien

$$\mu(B) = \int_C \mu_z(B) dz.$$

## Ou bien :

- 1 On définit une régularisation  $X_n \rightarrow X$ .
- 2 On calcule le gradient  $Y_n = \nabla X_n$ ,
- 3 On calcule  $b_n$  pour que

$$\mathbf{E} \widehat{\mu}_n(h) = \int_{[0,1]^d} \exp(i \langle Y_n(z), h \rangle) dz \rightarrow \widehat{\mu}(h)$$

pour une certaine mesure  $\mu$  et  $h$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

- 4 On montre que pour tout  $h \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{\mu}_n(h) - \mathbf{E} \widehat{\mu}_n(h) \rightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

d'où  $\mu_n \Rightarrow \mu$  p.s..

Dans les cas considérés, pour chaque  $z$ ,  $b_n Y_n(z)$  converge faiblement vers  $\mu_z$ , et  $\mu$  est le mélange gaussien

$$\widehat{\mu}(h) = \int_C \widehat{\mu}_z(h) dz.$$

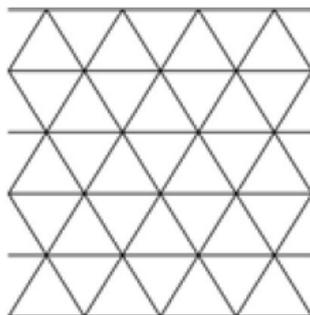
# Approximation sur $[0, 1]^d$

## Généralisation de l'interpolation linéaire

- $\mathcal{T}$  : Simplexes de  $\mathbb{R}^d$
- $\Gamma$  : groupe discret de  $\mathbb{R}^d$

tels que

$\mathbb{S} = \{\gamma + T : \gamma \in \Gamma; T \in \mathcal{T}\}$  est une partition de  $\mathbb{R}^d$ .



On définit ensuite

$$\mathbb{S}_n = n^{-1}\mathbb{S} = \{n^{-1}S : S \in \mathbb{S}\}$$

$X_n^{\mathbb{S}}$  est l'approximation polygonale de  $X$  sur  $\mathbb{S}_n$

$$\mu_n^{\mathbb{S}} = \lambda_d(b_n \nabla X_n^{\mathbb{S}})^{-1}$$

# Convergence de l'espérance

On pose l'**accroissement local du second ordre**

$$\sigma_{z,\zeta}^{(2)}(u, v) = \sigma(z + u, \zeta + v) - \sigma(z + u, \zeta) - \sigma(z, \zeta + v) + \sigma(z, \zeta).$$

$\mathbf{E}\mu_n(B)$  converge pour tout  $B$  si pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(nb_n)^2 \sigma_{z,z}^{(2)}(u/n, v/n) \rightarrow \delta_z(u, v)$$

uniformément en  $z$ .

# Convergence presque sure

Un calcul simple donne

$$\mathbf{E}|\mu_n(B) - \mathbf{E}\mu_n(B)|^2 = \int_C \int_C \text{COV}(\mathbf{1}_{\{Y_n(z) \in B\}}, \mathbf{1}_{\{Y_n(\zeta) \in B\}}) dz d\zeta.$$

Plus généralement on va demander

$$\sigma_{z,\zeta}^{(2)}(u/n, v/n) \ll \sigma_{z,z}^{(2)}(u/n, v/n), \quad z \neq \zeta.$$

Par exemple :

- $\sigma$  est  $\mathcal{C}^2$  hors de la diagonale (membre de gauche en  $n^{-2}$ )
- $\sigma$  n'est pas  $\mathcal{C}^2$  sur la diagonale.

**Exemple** : mBf,  $\alpha \in (0, 2)$

$$\sigma(z, \zeta) = \|z\|^\alpha + \|\zeta\|^\alpha - \|z - \zeta\|^\alpha$$

# convergence presque sure (suite)

## Théorème

$$\mathbf{E}|\widehat{\mu}_n^{\mathbb{S}}(h) - \mathbf{E}\widehat{\mu}_n^{\mathbb{S}}(h)|^4 \leq c_h((nb_n)^2 \sum_{z,\zeta} \sigma_{z,\zeta}^{(2)}(u/n, v/n))^2$$

On en déduit (quand la somme est finie)

$$\mu_n^{\mathbb{S}} \Rightarrow \mu^{\mathbb{S}} \quad p.s.$$

# Champ brownien fractionnaire

$\alpha \in (0, 2)$ .

$X_\alpha$  : Champ gaussien centré de covariance

$$\sigma(z, \zeta) = C_{\alpha,d}(\|z\|^\alpha + \|\zeta\|^\alpha - \|z - \zeta\|^\alpha).$$

$$b_n = n^{\alpha/2-1}$$

$$\mu_n^{\mathbb{S}} \Rightarrow \mu_n^{\alpha, \mathbb{S}}$$

avec

$$\mu_n^{\alpha, \mathbb{S}} = \sum_{T \in \mathbb{S}} \frac{|T|}{\sum_{T' \in \mathbb{S}} |T'|} \mu^{\alpha, T} = \sum_{T \in \mathbb{S}} \kappa_T^{\mathbb{S}} \mu^{\alpha, T}$$

**Effet d'une rotation**  $\rho$  : L'isotropie se traduit par

$$\mu^{\alpha, \rho \mathbb{S}} = \mu^{\alpha, \mathbb{S}} \rho$$

# Drap brownien

$$\mathbf{E}X(z)X(\zeta) = \sigma(z, \zeta) = \prod_i \min(z_i, \zeta_i), \quad z, \zeta \in \mathbb{R}^d.$$

$$b_n = \sqrt{n}$$

Alors

$$\mu_n^{\mathbb{S}} \Rightarrow \mu^{\mathbb{S}} = \sum_T \kappa_T^{\mathbb{S}} \mu^T$$

**Effet d'une rotation  $\rho$**  : En général

$$\mu^{\rho\mathbb{S}} \neq \mu^{\mathbb{S}} \rho$$

## Convergence des moments

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^k \mu_n(dx) \rightarrow \int_{\mathbb{R}_+^d} \|x\|^k \mu(dx), \quad k \geq 1$$

**TCL** : Montrer des TCL pour des quantités du type

$$V_n(f^{u,v}, X) = \int_C b_n^2 \partial_u X_n(z) \partial_v X_n(z) dz.$$

On peut faire tourner la triangulation  $\mathbb{S}$  pour voir ce que devient cette quantité.

**Convolution**  $X_n = n^{-d} \varphi(n \cdot) * X$  : Pour un noyau de convolution  $\varphi$ .

## Perspectives (suite)

- Estimation des paramètres (régularité, isotropie, axes privilégiés)  
Les méthodes existantes (Istat, Lang, Cohen, Guyon, Perrin Pontier) s'appuient sur des accroissement uni-dimensionnels.
- Drap brownien fractionnaire  
Covariance :

$$\sigma(z, \zeta) = (z^{\alpha_1} + \zeta_1^{\alpha_1} - |z_1 - \zeta_1|^{\alpha_1})(z_2^{\alpha_2} + |\zeta_2|^{\alpha_2} - |z - \zeta|^{\alpha_2}), \quad z, \zeta > 0.$$

avec  $\alpha_i \in (0, 2)$ .

- 1 2 exemples introductifs
- 2 Résultats de convergence en dimension  $d$
- 3 Réarrangement multi-dimensionnel

# Définition

Par analogie avec  $d = 1$ ,  $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$  est un réarrangement de  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  si

$$\lambda_d(\nabla f)^{-1} = \lambda_d(\nabla g)^{-1}$$

$f$  est un **réarrangement convexe** si  $f$  est convexe.

## Théorème (Brenier, 91)

*Toute fonction  $f$  telle que*

$$\int_C \|\nabla f(z)\| dz < \infty \tag{1}$$

*admet un réarrangement convexe  $g = \mathfrak{C}f : C \rightarrow \mathbb{R}$ .*

# Réarrangement asymptotique

## Théorème

Soit  $f_n; n \geq 1$  et  $f$  vérifiant (1) Alors

$$\lambda_d(\nabla f_n)^{-1} \Rightarrow \lambda_d(\nabla f)^{-1},$$

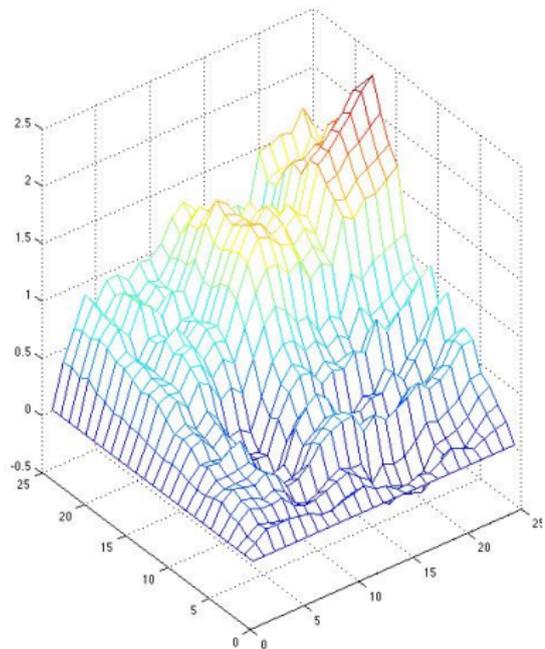
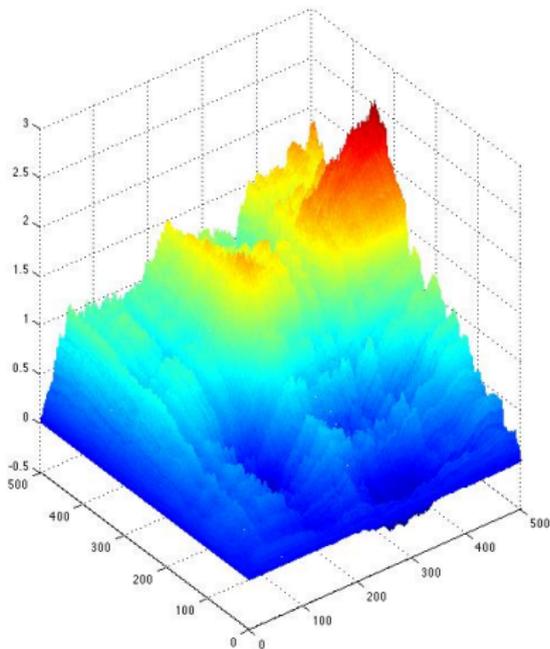
si et seulement si

$$\mathfrak{C}f_n(z) \rightarrow \mathfrak{C}f(z), \quad z \in \text{int}(C).$$

Si  $X_n \rightarrow X$  (régularisation d'un champ brownien) et  $\mu_n \Rightarrow \mu$

$$b_n \mathfrak{C}X_n(z) \rightarrow \mathfrak{C}X(z), \quad z \in \text{int}(C).$$

# Approximation du Drap brownien pour $d = 2$



## Drap brownien en dimension 2

$$n^{-1/2} \mathfrak{e}X_n(z) \rightarrow C(z) \quad z \in (0, 1)^2, \quad p.s.,$$

