GT. Processus ponctuels répulsifs

1

Raphaël
Lachièze-Rey
MAP5 - Univ. Paris V

Champs gaussiens holomorphes

Basé sur "Zeros of Gaussian analytic functions and Determinantal Point Processes" — Ben Hough, Krishnapur, Peres, Virag

Introduction

Champ gaussien sur $\mathbb{R}^2$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2$, $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ vecteur gaussien.

Entièrement déterminé par $K_f(x,y) = \mathbb{E}[f(x)f(y)]$, $x, y \in \mathbb{R}^2$

Variable gaussienne complexe standard : $Z \in \mathbb{C}$ de densité $\dfrac{e^{-|z|^2}}{\pi}$

→ plus naturel que $A + iB$ où $A, B \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$
→ Intégrale de Gauss
→ plus facile à simuler polaire × angulaire

Vecteur gaussien complexe standard : $AV + B$ où
- A, B matrices complexes
- $V = (Z_1, \dots, Z_n)$ avec $Z_i \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

⚠ Tout vecteur aux coordonnées gaussiennes n'est pas VGCS : ex : $\frac{1}{2}A + i\frac{\sqrt{3}}{2}B \not\sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

Champ gaussien holomorphe (GAF) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que
- $\forall (z_1, \dots, z_n)$, $(f(z_1), \dots, f(z_n))$ VGC(S)
- f holomorphe p.s.

p. 16

Entièrement déterminé par $K_f(z, w) = \mathbb{E}[f(z)\overline{f(w)}]$

→ Défini de la même manière sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{C}$: — Disque

Exemple typique : Soit φ_n des fonctions holomorphes

tq $\sum_n |\varphi_n(z)|^2 < \infty$, $z \in \mathbb{C}$.

- CVGU sur chaque compact
- a_n iid $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

$\to$ Alors $\sum_n a_n \varphi_n(z)$ GAF

GAF sur $\mathbb{C}$: $\boxed{f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n \to K_f(z,w) = \exp(z\bar{w})}$

Remarque f ~~…~~ holomorphe $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}f}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{I}f}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{R}f}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{I}f}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ tq $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{R}f = \partial_y g \\ \mathcal{I}f = \partial_x g \\ \Delta g = 0 \end{array}}$

Zéros de f

f tq $K_f(z,w) = e^{z\bar{w}}$

$\mathcal{Z}_f := \{z : f(z) = 0\}$

Rque f n'est pas stationnaire

Théorème $\boxed{\mathcal{Z}_f \text{ est stationnaire isotrope} : \mathcal{Z}_f \overset{(d)}{=} \lambda \mathcal{Z}_f + \beta \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1}$

p. 21

Preuve : $\exists \psi_{\beta,\lambda} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tq $g(z) := f(\lambda z + \beta) = \exp(\psi_{\beta,\lambda}(z))\, f(z)$

$\to \mathcal{Z}_g = \mathcal{Z}_f$

$\downarrow$

$$K_g(z,w) = \exp((\lambda z + \beta)(\overline{\lambda w + \beta})) = \exp(z\bar{w}) \exp\left(\lambda z \bar{\beta} + \beta \overline{\lambda w} + |\beta|^2\right)$$

$$= K_f(z,w) \exp\left(z\bar{\beta} + \tfrac{1}{2}|\beta|^2\right) \overline{\exp\left(w\bar{\beta} + \tfrac{1}{2}|\beta|^2\right)}$$

$\to$ ok avec $\psi(z) = z\bar{\beta} + \frac{1}{2}|\beta|^2$

Intensité $\boxed{\text{Edelman-Kostlan}}$ f : GAF (sur $\mathbb{C}$)

p.26

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\sum_{z\in\mathcal{Z}_f}\varphi(z)\right]=\int\varphi(z)\rho_1^{\mathcal{Z}_f}(z)dz\ ,\ \rho_1^{\mathcal{Z}_f}(z)=\frac{\Delta(\log \overbrace{K_f(z,z)}^{\in\mathbb{R}})}{4\pi}}$$

ex : $K_f(z,z)=e^{|z|^2}\Rightarrow \log K_f(z,z)=|z|^2\Rightarrow\rho_1(z)=\frac{1}{\pi}$

3 preuves dans BKPV : ① Green function → analyse $\mathbb{C}$
② linéarisat°
③ Géométrie intégrale

② f holomorphe $\Leftarrow$ $f(z)\underset{z\to 0}{\sim}f(0)+zf'(0)=:g(z)$

$$\rho_1(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbb{P}(g \text{ s'annule dans } B_{\mathbb{C}}(z,\varepsilon))}{\pi\varepsilon^2}$$

$$\sim\frac{\mathbb{P}(|f(z)|\leq\varepsilon|f'(z)|)}{\pi\varepsilon^2}$$

$$\sim\int_{\mathbb{C}}\int_{B_{\mathbb{C}}(0,\varepsilon|b|)}\psi(a,b)\frac{da\,db}{\pi\varepsilon^2}$$ où ψ densité de $(f(z),f'(z))$

$$\sim\int_{\mathbb{C}}\frac{\pi\varepsilon^2|b|^2}{\pi\varepsilon^2}\psi(0,b)\,da\,db=\frac{1}{\pi K(z,z)}\mathbb{E}[|f'(z)|^2\,|\,f(z)=0]$$

conditionnement gaussien : $f'(z)|_{f(z)=0}\sim\mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0,\ \mathbb{E}|f'(z)|^2-\frac{\mathbb{E}[f'(z)\overline{f(z)}]\mathbb{E}[f(z)\overline{f'(z)}]}{\mathbb{E}[|f(z)|^2]}\right)$

$$f'(z)|_{f(z)=0}\sim\mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0,\ \Delta K(z,z)-\frac{\partial_z K(z,z)\,\overline{\partial_z}K(z,z)}{K(z,z)}\right)$$

de l'autre côté :

$$\Delta(\log K(z,z))=\partial_z\left(\frac{\overline{\partial_z}K(z,z)}{K(z,z)}\right)=\frac{(\partial_z\overline{\partial_z}K(z,z))K(z,z)-\dots}{K^2}$$

Unicité de $\mathcal{Z}_f$

- $\forall L>0,\ \exists f_L$ GAF tq $\mathcal{Z}_{f_L}\overset{(d)}{=}L\mathcal{Z}_f$ est stationnaire (dilatation)
- Ce sont les seuls ensembles de zéros de GAF stationnaires.

$\forall g$ GAF, $\mathcal{Z}_g$ stationnaire $\Leftrightarrow\exists L : g\overset{(d)}{=}f_L$

Preuve: Proposition Si $\exists f, g$ GAF tq $\rho_1^{\mathcal{Z}_f}(z) = \rho_1^{\mathcal{Z}_g}(z)$ $(= \frac{1}{\pi})$. 4

p.30 alors $\exists \psi$ holomorphe telle que $g = f \exp(\psi)$

Preuve EK-formula : $\Delta(\log K_f(z,z)) = \Delta(\log K_g(z,z))$

$\rightarrow K_f(z,z) = \exp(h(z)) K_g(z,z)$ où $\Delta h = 0$

Résultat 1 $\Delta h = 0 \Rightarrow \exists g$ tq $h + ig$ est holomorphe

Résultat 2 Si $\Gamma(z,\omega)$ est holomorphe en z et en $\overline{\omega}$, et $\Gamma(z,z) = 0$, alors $\Gamma(z,\omega) = 0$

$\rightarrow$ on applique ça à $K_f(z,\omega) - e^{\frac{h+ig}{2}} e^{\overline{\frac{h+ig}{2}}} K_g(z,\omega)$

$\rightarrow$ résultat prouvé pour $\psi = h + ig$

idée de preuve

$\Gamma(z,\omega) = \sum a_{n,m} z^n \overline{\omega}^m$ au voisinage de $(0,0)$

or $\sum a_{n,m} z^n \overline{z}^m = 0 \Rightarrow \forall n,m,\ a_{n,m} = 0$ (dérivations successives)

Répulsion

marginale d'ordre n : $\rho_n^{\mathcal{Z}_f}(z_1, \dots, z_n) \sim \mathbb{P}(\mathcal{Z}_f$ has points around each $z_i)$

répulsion mathématique : $\rho_n^{\mathcal{Z}_f}(z_1, \dots, z_n) < \rho_1(z_1) \dots \rho_n(z_n)$

- vérifiée par la plupart des PP déterminantaux
- PP de Poisson : égalité

GAF : $\rho_n^{\mathcal{Z}_f}(z_1, \dots, z_n) = \psi_{(f(z_1), \dots, f(z_n))}(0, \dots, 0)\, \mathbb{E}\left[|f'(z_1) \dots f'(z_n)|^2 \,\middle|\, \underset{1 \le i \le n}{f(z_i) = 0} \right]$

$\rightarrow$ dur à calculer (exception GAF sur disque hyperbolique)

Cas des polynômes

p.3 $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. $\mathcal{Z}_P = (z_1, \dots, z_n)$

l'application $(z_1, \dots, z_n) \rightarrow (a_0, \dots, a_{n-1})$

a pour jacobien $\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2$

$\rightarrow \boxed{\text{répulsion locale}}$

5. Sphère complexe : $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{S}$ } muni d'un groupe de transformations
Disque hyperbolique : $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$

p. 18

- $\exists (f_L)$ famille de GAF tq $\mathcal{Z}_{f_L}$ invariant

Sphère $K_{f_L}(z,w) = (1 + z\bar{w})^L$ $L \in \mathbb{N}$

Disque $K_{f_L}(z,w) = \left(\dfrac{1}{1 - z\bar{w}}\right)^L$, $L > 0$

- $\forall g$ GAF, $\mathcal{Z}_g$ invariant $\Rightarrow \exists L, g = f_L$

$\mathbb{C}, \mathbb{S}, \mathbb{D}(L \neq 1)$: $\rho_2(z,w) > \rho_1(z)\rho_1(w)$ pour z, w suffisamment distant
$\to$ pas déterminantal

$\mathbb{D}$ with $L = 1$: $K_f(z,w) = \dfrac{1}{1 - z\bar{w}}$

p. 83 $\rho_n(z_1, \dots, z_n) = \pi^{-n} \det \left[\dfrac{1}{(1 - z_i \bar{z}_j)^2} \right]_{i,j}$
$\to$ Déterminantal

Retour à $\mathbb{C}$

corrélations d'ordre 2

p. 42 $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{C})$: $\mathrm{Var}\Big(\underbrace{\sum_{z \in \mathcal{Z}_L} \varphi(z)}_{\mathcal{Z}_L(\varphi)} \Big) = C \|\Delta \varphi\|_{L^2(\mathbb{C})} + o(L^{-1})$

Preuve : Ek déterministe : $\sum_{z \in \mathcal{Z}} \delta_z = \dfrac{1}{4\pi} \Delta (\log |f(z)|^2)$

$\tilde{f}(z) = \dfrac{f(z)}{\sqrt{\mathbb{E}|f(z)|^2}}$

IPP : $\mathrm{Var}(\mathcal{Z}_L(\varphi)) = \displaystyle\int_{\mathbb{C}^2} \Delta\varphi(z) \Delta\varphi(w) \, \mathbb{E}[\log|\tilde{f}(z)| \times \log|\tilde{f}(w)|] \frac{dz\,dw}{4\pi^2}$

$\leq C \left(\displaystyle\int |\nabla \varphi(z)|^2 dz \right)^2$