Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Année 2019-20
Master 1 MMA

Master 1 MMA - Analyse Fonctionnelle

Dualité des espaces de Hilbert, adjoint - feuille 4

Exercice 1. Montrer que, dans un espace de Hilbert, toute suite orthonormée converge faiblement vers 0.

Exercice 2. On considère $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $(u|v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\overline{v_n}$. Soit T l'opérateur définit par,

$$T(u)_0 = 0 \quad \text{et} \quad T(u)_n = u_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ \forall u \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

L'élément $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ étant fixé, étudier les convergences faible et forte de la suite $(T^k(u))_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C une partie convexe de $\mathcal{H}$.

1. Justifier que, si la limite faible de toute suite faiblement convergente de C, appartient à C, alors C est fermé.
2. Réciproquement, on suppose que C est fermé.
   (a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C et $x \in E$. Montrer que
   $$\mathcal{R}e(x - P_C(x)|P_C(x) - x_n) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (b) En déduire que la limite faible de toute suite faiblement convergente de C, appartient à C.

Exercice 4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $|||A||| \leq 1$.

1. Soit $x \in \mathcal{H}$. Montrer que $Ax = x$ si et seulement si $(Ax|x) = \|x\|^2$.
2. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A^*)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - A)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A)$ et en déduire que
   $$\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - A)}.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
   $$A_n = \frac{\mathrm{Id} + A + \cdots + A^n}{n+1},$$
   où $A^0 = \mathrm{Id}$ et $A^n = A \circ A^{n-1}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, $A_n x$ tend vers la projection de x sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - A)$.

Exercice 5. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. On dit qu'une application $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt ou que $A \in HS(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

1. (a) Montrer que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $HS(\mathcal{H})$ et que $\|\!|A|\!\| \leq \|A\|_2$, $\forall A \in HS(\mathcal{H})$.
   (b) Montrer que $(HS(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.

2. (a) Montrer que, pour tout base hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$, on a

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^* f_n\|^2,$$

   où A^* désigne l'adjoint de A.
   (b) En déduire que $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ et que $\|A\|_2$ ne dépend pas du choix de la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit l'application $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ en posant

   $$Ax = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n (x|e_n) e_n, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

   (a) Montrer que $A \in HS(\mathcal{H})$ si et seulement si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.
   (b) Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, alors A est limite, dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d'une suite d'applications de rang fini.
   (c) Montrer que A est une application compacte si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.
   (d) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathcal{H} \,/\, \sum_{n=0}^{+\infty}(1+n)|(x|e_n)|^2 \leq 1\}$ est compact.

Exercice 6. Soit $k \in \mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$. On définit l'application $A_k : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ en posant

$$A_k(f)(x) = \int_0^1 k(x,y)\, f(y)\, dy, \quad \forall x \in [0,1], \forall f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

1. A l'aide du théorème d'Ascoli, montrer que A_k est une application compacte de $\mathcal{L}(\mathcal{C}([0,1]))$.

2. Montrer que A_k s'étend naturellement en une application de $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.

3. A l'aide du théorème de Stone-Weierstrass, montrer qu'il existe des fonctions $a_{n,m}$ et $b_{n,m} \in \mathcal{C}([0,1])$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \{0, \cdots, n\}$, telles que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

   $$k_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(x)\, b_{n,m}(y), \quad \forall x, y \in [0,1],$$

   converge vers k uniformement sur $[0,1]^2$.

4. Montrer que la suite $(A_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A_k dans $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application A_{k_n} est de rang fini et en déduire que A_k est une application compacte de $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.