Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Année 2019-20
Master 1 MMA

Master 1 MMA - Analyse Fonctionnelle

Corrigé succint du TD du 13 décembre 2019

Exercice 1. Soit $x \in \mathcal{H}$. Par l'inégalité de Bessel, $\sum_n |(x|e_n)|^2$ converge, donc $(x|e_n) \to 0$.

Exercice 2. La suite converge faiblement car

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad \left|\left(T^k(u)|x\right)\right| = \left|\sum_{l=k}^{+\infty} u_{n-k}x_k\right| \leq \|u\|_2 \left(\sum_{l=k}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

Mais $\|T^k(u)\|_2 = \|u\|_2,\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad$ La suite ne converge pas fortement.

Exercice 3.

1. On utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C.

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad x \in C$$

2. (a) $\forall t \in [0,1],\ tP_C(x) + (1-t)x_n \in C$ car C est convexe $\quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|x - P_C(x)\|^2 &\leq \|x - tP_C(x) + (1-t)x_n\|^2 \\ &= \|(x - P_C(x)) + (1-t)(P_C(x) - x_n)\|^2 \\ &= \|x - P_C(x)\|^2 + (1-t)2\,\mathrm{Re}\,(x - P_C(x)|P_C(x) - x_n) + (1-t)^2\|P_C(x) - x_n\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \forall t \in [0,1[, \quad 2\,\mathrm{Re}\,(x - P_C(x)|P_C(x) - x_n) + (1-t)\ \|P_C(x) - x_n\|^2 \geq 0.$$

On fait tendre t vers 0 pour obtenir $\mathrm{Re}\,(x - P_C(x)|P_C(x) - x_n) \geq 0$.

(b) $$\begin{aligned} x_n \rightharpoonup x \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,(x - P_C(x)|P_C(x) - x_n) \to -\|x - P_C(x)\|^2 \\ &\Rightarrow \quad \|x - P_C(x)\|^2 \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad x = P_C(x) \\ &\Rightarrow \quad x \in C \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. $Ax = x \quad \Rightarrow \quad (Ax|x) = (x|x) = \|x\|^2$

Réciproquement $(Ax|x) \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|\!|A|\!\|\|x\|^2 = \|x\|^2$

Donc $(Ax|x) = \|x\|^2 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (Ax|x) = \|Ax\|\|x\| & \Rightarrow \quad Ax = \lambda x \text{ où } \lambda > 0 \\ \|Ax\| = \|x\| & \Rightarrow \quad \lambda = 1 \end{array} \right.$

2.

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A) & \Leftrightarrow & Ax = x \\ & \Leftrightarrow & (Ax|x) = \|x\|^2 \\ & \Leftrightarrow & (x|A^*x) = \|x\|2 \\ & \Leftrightarrow & \overline{(A^*x|x)} = \|x\|^2 \\ & \Leftrightarrow & (A^*x|x) = \|x\|^2 \quad \text{car } \|x\|^2 \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & A^*x = 0 \\ & \Leftrightarrow & x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A^*) \end{array}$$

3. $(\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A))^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A)^* = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A^*) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A)$
$\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H} \quad \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad \mathcal{H} & = & (\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)})^\perp \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)} \\ & = & (\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A))^\perp \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)} \\ & = & \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)} \end{array}$$

4. Soit $x \in \mathcal{H}$. D'après la question 3, $x = u + v$ où $u \in \mathrm{Ker}(Id - A)$ et $v \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)}$.
$A^n u = \dfrac{1}{n+1}(u + Au + \cdots + A^n u) = \dfrac{n+1}{n+1} u = u = P_{\mathrm{Ker}(Id-A)}(x)$
Si $v \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)$, alors $\exists w \in \mathcal{H}$ tel que $v = w - Aw$.

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \quad A^n v = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(A^k w - A^{k+1}w) = \dfrac{1}{n+1}(w - A^{n+1}w) \\ \Rightarrow \quad \|A^n v\| \leq \dfrac{2\|w\|}{n+1} \to O, \quad \text{quand } n \to +\infty. \end{array}$$

Si $v \notin \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)$, alors pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $w \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-A)$ tel que $\|v - w\| < \epsilon$.

$\Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \quad \|A^n v\| \leq \|A^n(v-w)\| + \|A^n w\| < \|v - w\| + \epsilon < 2\epsilon$.

$\Rightarrow \quad \|A^n x\| \leq \|A^n u\| + \|A^n v\| \to 0$, quand $n \to +\infty$, et $A^n x \to P_{\mathrm{Ker}(Id-A)}(x)$.

Exercice 5.

1. (a) Montrons d'abord que $\|A\| \leq \|A\|_2$.

$$\begin{array}{rcll} \forall x \in \mathcal{H}, \quad \|Ax\| & = & \left\| A\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x|e_n)e_n\right)\right\| & \\ & = & \left\| \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x|e_n)Ae_n \right\| & \text{car } A \text{ est continue et linéaire} \\ & \leq & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|(x|e_n)|\|Ae_n\| & \\ & \leq & \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|(x|e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\|Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} & \\ & = & \|x\|\|A\|_2 & \text{d'où l'inégalité.} \end{array}$$

On en déduit que ($\|A\|_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\!|A|\!\| = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$).

On montre facilement que $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme (le faire), donc une norme.

(b) On vérifie que $(A|B)_2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(Ae_n|Be_n)$ définit un produit scalaire (le faire). Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathrm{HS}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$. D'après (a), $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \|\!|\cdot|\!\|)$ qui est complet. Donc il existe $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\|\!|A_n - A|\!\| \to 0$

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p, q \geq n, \forall m \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{n=0}^{m} \|A_p e_n - A_q e_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

On fait tendre q vers $+\infty \quad \Rightarrow$

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall p \geq n, \forall m \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{n=0}^{m} \|A_p e_n - Ae_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Donc $A \in \mathrm{HS}(\mathcal{H})$ et $\|A_n - A\|_2 \to 0$.

2. (a) Par l'identité de Parseval, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|Ae_n\|^2 &= \sum_{m\in\mathbb{N}} |(Ae_n|f_m)|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} |(e_n|A^*f_m)|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} |(A^*f_m|e_n)|^2 \end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |(A^*f_m|e_n)|^2 \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |(A^*f_m|e_n)|^2 \qquad \text{(par le théorème de Tonelli)} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \|A^*f_m\|^2 \end{aligned}$$

(b) On prend $f_n = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pour montrer que $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$. Donc, pour toute base hilbertienne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\|A\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^*e_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|A^{**}f_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Af_n\|^2$$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $Ae_n = \lambda_n e_n \;\Rightarrow\; \|Ae_n\|^2 = |\lambda_n|^2$. Donc $\|A\|_2 < +\infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < +\infty$.

(b) Soit $A_N : x \mapsto \sum_{n=0}^{N} \lambda_n (x|e_n)e_n$.

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \|Ax - A_N x\|_2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |(x|e_n)|^2 \leq \sup_{n\geq N+1} |\lambda_n|^2 \|x\|^2$$

$\Rightarrow \quad \|\!|A - A_N|\!\| \leq \sup_{n\geq N+1} |\lambda_n|^2 \;\to 0$ quand $N \to +\infty$, où rang $A_N = N + 1$.

(c) $(\Rightarrow) \quad \lambda_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad A_N \to A$ où A_N est compacte (car de rang fini)

$(\Leftarrow) \quad$ Par contraposée : supposons que $\lambda_n \not\to 0$

Il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $C > 0$ tels que $|\lambda_{\phi(n)}| \geq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $(Ae_{\phi(n)} = \lambda_{\phi(n)} e_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger fortement vers 0, alors que $e_{\phi(n)} \rightharpoonup 0$. On en déduit que A n'est pas compacte.

(d) Si $\lambda_n = 1/\sqrt{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors, d'après (c), A est une application compacte. Donc $A(\bar{B}(0,1))$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}$. On vérifie facilement qu'elle est fermée (le faire), donc compacte.