# Liberté asymptotique des matrices aléatoires gaussiennes

Thomas Leblé, d'après M.Capitaine & M.Casalis *
Exposé pour l'examen de "Matrices aléatoires" (M2 Orsay, C. Donati)

28 avril 2011

**Résumé**

On présente la preuve, due à M.Casalis et M.Capitaine, de la liberté asymptotique d'une famille de matrices aléatoires gaussiennes. Pour obtenir cette asymptotique (en moyenne, et presque sûre sous des hypothèses renforcées), on établit une formule (non explicite) sur les moments généralisés d'une telle famille associée à une famille de variables aléatoires indépendantes.

## 0.1 Rapide rappel de probabilités libres et formulation du problème

**Espace de probabilité** Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, munie d'une forme linéaire $\varphi$ vérifiant $\varphi(1) = 1$ : c'est un espace de probabilités non-commutatives (epnc). Un exemple est donné par les espaces de matrices $M_N(\mathbb{C})$, munis de la forme linéaire "trace" $\mathrm{Tr}_N(M) = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M)$. Pour obtenir des matrices *aléatoires* on va d'abord se fixer un espace de probabilités (classique) $(X, \Omega, P)$ et définir

$$\mathcal{A}_N = \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p(X, M_N)$$

l'espace (non-commutatif) des variables aléatoires à valeurs matricielles qui sont $p$-intégrables pour tout $p \in [1, +\infty[$, et l'on prend pour "mesure de probabilité" (non-commutative)

$$\varphi_N(A) = \mathbf{E}(\mathrm{Tr}_N(A)), \quad \forall A \in \mathcal{A}_N$$

**Distribution** À la place des moments classiques, comme les variables aléatoires ne commutent plus, on considère les expressions du type $P(a_1, \ldots, a_n)$ où $P$ est un polynôme dans $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, anneau des polynômes non commutatifs à $n$ variables, et $a_1, \ldots, a_n$ sont des variables aléatoires dans $\mathcal{A}$.

**Définition 1.** *Si $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à un enpc $(\mathcal{A}, \varphi)$, on appelle distribution de $a_1, \ldots, a_n$ la forme linéaire $\mu_{a_1,\ldots,a_n}$ sur $\mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ donnée par*

$$\mu_{a_1,\ldots,a_n}(P) = \varphi(P(a_1, \ldots, a_n))$$

**Liberté et convergence**

**Définition 2.** *Une famille de sous-algèbres unitaires $(A_i)$ d'un epnc $(\mathcal{A}, \varphi)$ est dite libre si pour tout entier $p$ et tout $p$-uplet $(a_1, \ldots, a_p)$ de variables aléatoires centrées (i.e. telles que $\varphi(a_i) = 0$)) telles que deux variables successives appartiennent à deux sous-algèbres $A_i$ différentes, on a $\varphi(a_1 \ldots a_p) = 0$.*

Cela remplace la notion classique d'indépendance, et - comme en probabilités classiques - il est possible de construire des espaces de probabilités où l'on trouve "plusieurs copies libres" d'un même espace initial.

**Définition 3** (Convergence)**.** *Soit $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ une suite d'epnc, et $(a_i^N)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de familles de variables aléatoires (avec $(a_i^N)_{i\in\mathbb{N}}$ inclus dans $\mathcal{A}_N$ pour tout $N$). On dit que la suite converge vers la famille $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ lorsque les distributions correspondantes convergent simplement, i.e. lorsque l'on a :*

$$\mu^N_{(a_i^N)} \xrightarrow[N+\infty]{CS} \mu_{(a_i)}$$

Remarque : on a légèrement abusé des notations en s'autorisant des familles infinies de variables, mais un polynôme est toujours une suite presque nulle de coefficients, si bien que l'on ne considère à chaque fois qu'un nombre fini de variables différentes.

*M. Capitaine, M. Casalis, *Asymptotic freeness by generalized moments for Gaussian and Wishart matrices. Application to beta random matrices*, Indiana Univ. Math. J. 53 No. 2 (2004), 397–432

**Position du problème**

**Définition 4** (Liberté)**.** *Une suite de familles $(a_i^N)_{i\in I}$ comme précédemment est dite asymptotiquement libre lorsqu'elle converge vers une famille $(a_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires libres (au sens où les sous-algèbres unitaires engendrées par chaque variable sont libres dans leur ensemble).*

On s'intéresse ici à la liberté asymptotique d'une famille indépendante de matrices aléatoires de taille de plus en plus grande. On privilégiera le modèle "unitaire gaussien" (cf. cours). Pour établir la liberté asymptotique, il faudra montrer la convergence simple des distributions précisées ci-dessus, la méthode de l'article consiste à étudier l'asymptotique des "moments généralisés" et de conclure par un argument de double récurrence.

## 0.2 Moments généralisés pour le modèle gaussien

**Notations** Soit $S_n$ le groupe symétrique à $n$ éléments, soit $\pi$ une permutation dans $S_n$, décomposons $\pi$ en cycles $C(\pi)$ à support disjoints, et notons $\gamma(\pi)$ leur nombre. On définit, pour tout ensemble de $n$ matrices $B_1,\dots,B_n$ de taille $N\times N$, le moment généralisé :

$$r_\pi^N(B_1,\dots,B_n) := \prod_{C\in C(\pi)} \mathrm{Tr}_N\left(\prod_{j\in C}(B_j)\right) = \frac{1}{N^{\gamma(\pi)}}\prod_{C\in C(\pi)} \mathrm{Tr}\left(\prod_{j\in C}(B_j)\right) \tag{1}$$

Remarquons que, malgré l'atmosphère non-commutative, cette définition n'est pas ambiguë, puisque $\mathbb{C}$ est commutatif (donc l'ordre dans lequel on considère les cycles n'importe pas) et puisque la trace est invariante par permutation circulaire (donc il suffit d'énumérer chaque cycle dans l'ordre sans se soucier du point de départ). On adapte cette définition au cadre général d'un epnc $(\mathcal{A},\varphi)$ en posant

$$\varphi_\pi(b_1,\dots,b_n) = \prod_{C\in C(\pi)} \varphi(\prod_{j\in C} b_j) \tag{2}$$

**Convergence des moments généralisés** Dorénavant, on va considérer des familles de suites de matrices aléatoires, ce qui devrait se noter $(A_i^N)_{i\in I,N\in\mathbb{N}}$ avec $A_i^N$ dans $\mathcal{A}_N$ pour tout $i\in I$ sera noté par commodité $A_i$, et lorsque l'on considère les moments d'exposant $N$ $r^N$ il sera sous-entendu qu'on considère le $N$-ième terme de la suite.

**Définition 5** (Condition (C))**.** *Une famille $(A_i)$ vérifie la condition (C) de convergence des moments généralisés lorsque l'on a pour toute taille $N$, tout entier $n$, toute permutation $\pi\in S_n$ et tous polynômes non-commutatifs $P_1,\dots,P_n$*

$$\lim_{N+\infty} \mathbf{E}(r_\pi^N(P_1(A),\dots,P_n(A))) = \varphi_\pi(P_1(a),\dots,P_n(a)) \tag{3}$$

*où $a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires dans un epnc $(\mathcal{A},\varphi)$.*

**Asymptotique des moments** On peut maintenant énoncer et démontrer une estimation des moments généralisés, qui permettra d'établir la liberté asymptotique recherchée.

**Lemme 1.** *Soit $H$ une matrice hermitienne dans $GUE(N,\frac{1}{N})$, et $\mathcal{B}$ une tribu indépendante de $H$. Fixons un entier $q\geq 2$ et $B_1,\dots,B_q$ des matrices $N\times N$ aléatoires $\mathcal{B}$-mesurables. Parallèlement, soit $s$ une variable semi-circulaire (avec moment d'ordre un $=1$ et moment d'ordre deux $=0$) dans un espace de probabilité $(\mathcal{A},\varphi)$ et $\Theta$ une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{A}$ libre avec la sous-algèbre engendrée par $s$. Pour le même entier $q$, fixons $b_1,\dots b_q$ des variables aléatoires dans $\Theta$.*

*Soit $\pi$ une permutation de $S_q$, il existe une partie $I_\pi$ de $S_q$, des entiers pairs $\{m_\pi(\rho),\rho\in I_\pi\}$ et des réels $\{\alpha_\pi(\rho),\rho\ \in I_\pi\}$ tels que l'on ait les identités suivantes :*

$$\mathbf{E}(r_\pi^N(B_1H,\dots,B_qH)) = \sum_{\rho\in I_\pi}\frac{\alpha_\pi(\rho)}{N^{m_\pi(\rho)}}\mathbf{E}(r_\rho^N(B_1,\dots,B_q))$$

*et*

$$\varphi_\pi(b_1s,\dots,b_qs) = \sum_{\rho\in I_\pi,m_\pi(\rho)=0}\alpha_\pi(\rho)\varphi_\rho(b_1,\dots,b_q)$$

*Preuve.* Quitte à écrire explicitement les permutations et les décomposer en cycles, il suffit de montrer que pour toute donnée de $\{B_{i,0}, \ldots, B_{i,n_i}\}_{i=1,\ldots,p}$ matrices $N\times N$ aléatoires $\mathcal{B}$-mesurables et $\{b_{i,0}, \ldots, b_{i,n_i}\}_{i=1,\ldots,p}$ des variables dans $\Theta$, on a les identités :

$$\mathbf{E}\Big(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}_N(B_{i,0}HB_{i,1}, \ldots, HB_{i,n_i})\Big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{N^{\gamma(j)}}\mathbf{E}\Big(\prod_{l=1}^{p_j} \mathrm{Tr}_N(B'_{j,l,1}\ldots B'_{j,l,n'_{j,l}})\Big)$$

et

$$\prod_{i=1}^{p} \varphi(b_{i,0}sb_{i,1}\ldots sb_{i,n_i}) = \sum_{j=1,\ldots,n,\gamma_j\neq 0} \alpha_j \prod_{l=1}^{p} \varphi(b'_{j,l,1}\ldots b'_{j,l,n'_j})$$

avec des constantes (entières, sauf les $\alpha_j$ qui sont réelles) “combinatoires” indépendantes de $N$. On peut supposer que $k := \sum_{i=1}^{p} n_i \geq 2$, sinon par indépendance (resp. par liberté) les termes correspondant dans la première équation (resp. la deuxième) sont nuls. On montre ces deux identités par récurrence sur $k$, qui est exactement le nombre d'occurrences de $H$. L'initialisation ne pose pas de problème, puisqu'on connaît explicitement les cas possibles. Par exemple, on trouve que

$$\mathbf{E}(\mathrm{Tr}_N(B_{1,0}HB_{1,1})\mathrm{Tr}_N(B_{2,0}HB_{2,1})) = \frac{1}{N^2}\mathbf{E}(\mathrm{Tr}_N(B_{2,0}B_{1,1}B_{1,0}B_{2,1}))$$

tandis que le terme correspondant à cette permutation pour $\varphi$ est nul d'après l'hypothèse de liberté. Pour la récurrence proprement dite, on s'appuie sur une propriété particulière des matrices gaussiennes : si on construit $\tilde{H}$ une copie de $H$ indépendante de $H$ (et de la tribu $\mathcal{B}$), alors

$$K = \frac{H+\tilde{H}}{\sqrt{2}} \text{ et } \tilde{K} = \frac{H-\tilde{H}}{\sqrt{2}}$$

définissent deux matrices du GUE$(N, \frac{1}{N})$, indépendantes (et bien sûr indépendantes de $\mathcal{B}$). On a ainsi $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(K+\tilde{K})$. Les variables non-commutatives semi-circulaires possèdent la même propriété : on peut écrire $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(c+\tilde{c})$ où $c$ et $\tilde{c}$ sont deux variables semi-circulaires de même distribution que $s$, libres et libres avec $\Theta$ (rappelons que la construction de variables libres de distribution donnée est permise comme en probabilités classiques). Supposons le résultat vrai au rang $k$. Considérons les termes de la forme :

$$\mathbf{E}\big(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}_N(B_{i,0}Hb_{i,1}, \ldots, HB_{i,n_i})\big)$$

et

$$\prod_{i=1}^{p} \varphi(b_{i,0}sb_{i,1}\ldots sb_{i,n_i})$$

et remplaçons $H$ (resp. $s$) par $\frac{1}{\sqrt{2}}(K+\tilde{K})$ (resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}(c+\tilde{c})$, et développons, en utilisant simplement la linéarité de la trace et de l'espérance (resp. de $\varphi$). Quand on développe $\mathrm{Tr}_N(B_{i,0}\frac{1}{\sqrt{2}}(K+\tilde{K})b_{i,1}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}(K+\tilde{K})B_{i,n_i})$, on obtient, à un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}^{n_i}}$ près (il y a $n_i$ termes $H$ remplacés), un terme où n'apparaît que $K$, un terme où n'apparaît que $\tilde{K}$, et d'autres termes où $K$ et $\tilde{K}$ comptent respectivement $m$ et $\tilde{m}$ occurrences, avec $m\tilde{m} \neq 0$ et $m + \tilde{m} = n_i$. En faisant le produit (pour $i \in \{1, \ldots, p\}$) de tels termes, on obtient deux termes “uniformes” (ne contenant que $K$ ou que $\tilde{K}$) et une somme de termes où $K$ et $\tilde{K}$ apparaissent avec respectivement $m$ et $\tilde{m}$ occurrences (où $m\tilde{m} \neq 0$ et $m + \tilde{m} = \sum n_i$). En particulier, à chacun de ces derniers termes on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : on considère la tribu $\mathcal{B}'$ égale à la tribu $\mathcal{B}$ augmentée de la tribu engendrée par $K$ : la variable $\tilde{K}$ appartient au GUE$(N, \frac{1}{N})$, est indépendante de $\mathcal{B}'$ par construction, et elle apparaît au plus $k$ fois : l'hypothèse de récurrence s'applique donc. Reste le terme initial (celui qu'on a développé) et les deux termes “uniformes” qui, à un facteur près (dû aux $\frac{1}{\sqrt{2}}$), coïncident avec le terme initial (puisqu'on simplement remplacé $H$ par $K$ ou $\tilde{K}$ et que ces trois variables aléatoires ont même loi). La même démarche combinatoire s'applique pour l'identité concernant $\varphi$. □

## 0.3 Liberté asymptotique et convergence presque partout des moments généralisés

**Convergence en moyenne** On applique le lemme précédent pour déduire la liberté asymptotique recherchée et, sous une hypothèse supplémentaire, on montre que la convergence est presque sûre.

**Proposition 1.** *Soit $H$*[1] *une suite de matrices aléatoires du GUE$(N, \frac{1}{N})$, soit $A = (A_i, i \in \mathbb{N})$ une famille de matrices $N \times N$ aléatoires et indépendantes de $H$. On suppose que la famille $A_j$ satisfait la condition $(C)$ définie plus haut. Alors $H$ est asymptotiquement libre avec les $A_j$ et la famille $(H, A)$ vérifie encore la condition $(C)$. Plus précisément, pour tout entier $n$ et toute famille $P_1, \ldots, P_n$ de polynômes non commutatifs, on a :*

$$\lim_{N+\infty} \mathbf{E}(r_\pi^N(P_1(A)H, \ldots, P_n(A)H)) = \varphi_\pi(P_1(a)s, \ldots, P_n(a)s) \tag{4}$$

*où $s$ est une variable non-commutative semi-circulaire comme considérée dans le lemme, libre avec la famille $a = (a_i)$.*

*Preuve.* La dernière conclusion résulte du lemme. Pour le voir, fixons des polynômes $P_1, \ldots, P_n$, comme $H$ est indépendant de la famille des $A_j$, $H$ est également indépendant de la famille $P_1(A), \ldots, P_n(A)$. À $\pi \in S_n$ fixé, le lemme nous apprend alors que la différence entre les deux termes de (4) est donnée (avec les notations du lemme) par

$$\sum_{\rho \in I_\pi, m_\pi(\rho)=0} \alpha_\pi(\rho)(\mathbf{E}(r_\rho^N(P_1(A), \ldots, P_n(A))) - \varphi_\pi(P_1(a), \ldots, P_n(a)))$$
$$+ \sum_{\rho \in I_\pi, m_\pi(\rho)\neq 0} \frac{\alpha_\pi(\rho)}{N^{m_\pi(\rho)}} \mathbf{E}(r_\rho^N(P_1(A), \ldots, P_n(A)))$$

La première ligne tend vers 0, par convergence de la famille $A$[2]. Quant à la deuxième ligne, rappelons que les $m_\pi$ intervenant sont des entiers $\geq 2$, il reste à voir que le terme concernant l'espérance est borné : c'est ce que garantit la condition $(C)$, puisque la convergence des moments généralisés pour la famille $A_j$ assure en particulier que, à $\rho$ fixé, $\mathbf{E}(r_\rho(P_1(A), \ldots, P_n(A)))$ est borné quand $N$ tend vers $+\infty$.

Pour déduire de cela la liberté asymptotique, remarquons que l'égalité (4) donne plus qu'une information sur les seuls termes du type $P(A)H$ (où $H$ n'apparaît qu'à la première puissance). En effet, cette égalité met en jeu n'importe quelle permutation, si bien que pour tout polynôme non commutatif $Q$ en les $A_j$ et en $H$, on a la convergence

$$\lim_{N+\infty} \mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}_N(Q(A, H))\right) = \varphi(Q(a, s))$$

En effet, soit $Q$ un polynôme (non-commutatif) en les $A_j$ et en $H$. On peut toujours décomposer $Q$ comme le produit $Q(A, H) = \prod_{i=1}^m Q_i(A)H \times Q_{m+1}(A)$ pour un certain nombre $m+1$ de polynômes $Q_i$ qui ne dépendent que de $A$. Le lemme assure la convergence de $\mathbf{E}(r_{c_{m+1}}^N(Q_1(A)H, \ldots, Q_m(A)H, Q_{m+1}(A)))$, où $c_m$ est le $m+1$-cycle de $S_{m+1}$[3]. On a alors :

$$\mathbf{E}(Q(A, H)) = \mathbf{E}(\mathrm{Tr}_N(\prod_{i=1}^m Q_i(A)H \times Q_{m+1}(A))) = \mathbf{E}(r_{c_{m+1}}^N(Q_1(A)H, \ldots, Q_m(A)H, Q_{m+1}(A)))$$

et on sait que cette dernière expression converge, pour $N \longrightarrow +\infty$, vers :

$$\varphi_{c_{m+1}}(Q_1(a)s, \ \ldots, Q_m(a)s, Q_{m+1}(a)) = \varphi(Q_1(a)s \ldots Q_m(a)sQ_{m+1}(a)) = \varphi(Q(a, s))$$

Ce qui est bien le résultat de convergence recherché. À ce stade, on dispose donc de la liberté asymptotique, pour montrer que l'on dispose encore de la condition $(C)$ il faut prouver la convergence des moments généralisés pour la famille $(H, A)$. La dernière conclusion de la proposition, que l'on a établie au début de la preuve comme une conséquence du lemme et de la condition $(C)$ pour $A$, montre cette convergence pour les moments généralisés ne faisant intervenir que des polynômes du type $P(A)H$, c'est-à-dire dans lesquels $H$ n'apparaît, là encore, qu'à la première puissance. Dans le cas général, une décomposition des polynômes, semblable à celle qui a été pratiquée ci-dessus pour établir la liberté asymptotique, permet de se ramener à ce cas particulier. $\square$

Maintenant que l'on dispose de cette proposition, quitte à raisonner par récurrence sur le nombre de matrices gaussiennes aléatoires indépendantes, on a facilement :

1. sous-entendu : $H_N$, cf. la remarque qui débute le paragraphe "convergence des moments généralisés"
2. La convergence des moments généralisés entraîne évidemment la convergence des distributions
3. Notons que si le terme considéré se termine par $Q_{m+1}(A)$, sans dépendance en H, et n'entre donc pas dans le champ d'application du lemme, cette expression est bien concernée par la forme "développée" qui a été utilisée dans la preuve du lemme

**Proposition 2** (Convergence en moyenne). *Soit $X_j$ une famille de matrices du GUE($N, \frac{1}{N}$) indépendantes, indépendantes également d'une famille $A_k$ de matrices $N \times N$ aléatoires vérifiant la condition $(C)$. Parallèlement, soit $x_j$ des variables semi-circulaires (normalisées comme précédemment) libres dans un enpc $(\mathcal{A}, \varphi)$, libres également avec une famille $a_k$ de variables dans $\mathcal{A}$. Alors les moments généralisés de la famille $(X_j, A_k)$ convergent vers les moments correspondants de la famille $(x_j, a_k)$, et en particulier $(X_j, A_k)$ vérifie la condition $(C)$.*

En particulier, mettons en valeur le :

**Théorème 1.** *Soit $X_j$ une famille de matrices du GUE($N, \frac{1}{N}$) indépendantes, indépendantes également d'une famille $A_k$ de matrices $N \times N$ aléatoires vérifiant la condition $(C)$. Alors les familles $\{X_j\}$ et $\{A_j\}$ sont asymptotiquement libres.*

**Convergence presque sûre** On énonce et on démontre un résultat de convergence presque sûre des moments généralisés, sous une hypothèse plus forte résumée dans la condition $(C')$ :

**Définition 6** (Condition $(C')$). *On dit qu'une famille $A = \{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ de matrices $N \times N$ aléatoires vérifie la condition $(C')$ de convergence tendue des moments généralisés lorsque :*

1. *La famille $A$ converge vers une famille $a = \{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ de variables dans un enpc $(\mathcal{A}, \varphi)$.*
2. *Pour tout couples d'entiers $(n_1, n_2)$ et de permutations $(\pi_1, \pi_2) \in S_{n_1} \times S_{n_2}$, pour chaque $n_1+n_2$-uplet de polynômes $P_1, \ldots, P_{n_1+n_2}$, on a la condition de tension :*

$$\sum_{N=1}^{+\infty} |U_N(\pi, P_1, \ldots, P_{n_1+n_2})| < +\infty \tag{5}$$

*Où $U_N(\pi, P_1, \ldots, P_{n_1+n_2})$ est défini comme la covariance :*

$$U_N(\pi, P_1, \ldots, P_{n_1+n_2}) := \mathrm{Cov}(r_{\pi_1}(P_1(A), \ldots, P_{n_1}(A)), r_{\pi_2}(P_{n_1+1}(A), \ldots, P_{n_1+n_2}(A)))$$

Remarquons que cette condition $(C')$ entraîne la condition $(C)$. En effet, chaque moment généralisé est, à un nombre fini de termes de covariance près, un produit de termes du type $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}_N(P_1(A), \ldots, P_n(A)))$, qui admettent une limite par définition de la convergence d'une famille de matrices aléatoires (condition 1.). Comme les termes de covariance d'ordre $N$ tendent vers 0 d'après la condition 2., on obtient bien la convergence de chaque moment généralisé.

Sous cette hypothèse, on obtient en fait un résultat de convergence presque sûre :

**Proposition 3.** *Soit $A = \{A_i\}$ une famille de matrices $N \times N$ aléatoires. On suppose que la famille vérifie la condition $(C')$ définie plus haut. Alors chaque produit de polynômes non-commutatifs $\prod_{i=1}^{p} Tr_N(P_{i,1}(A) \ldots P_{i,n_i}(A))$ converge presque sûrement vers $\prod_{i=1}^{p} \varphi(P_{i,1}(a) \ldots P_{i,n_i}(a))$.*

*Preuve.* Posons $m_N = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}_N(P_{i,1}(A) \ldots P_{i,n_i}(A)) - \mathbf{E}(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{Tr}_N(P_{i,1}(A) \ldots P_{i,n_i}(A)))$, il suffit de montrer que $m_N$ converge presque sûrement vers 0 puisque le terme en $\mathbf{E}(\prod)$ que l'on soustrait tend d'après la Proposition 1. (que l'on peut appliquer car $(C') \Longrightarrow (C)$) vers la limite p.s. voulue. D'après Borel-Cantelli, il suffit de montrer que ($m_N$ étant centrée) : $\sum \mathbf{E}(|m_N|^2) < +\infty$, ce qui résulte de la condition 2. de la condition $(C')$. □

On aimerait maintenant étendre ce résultat de convergence presque sûre à une famille de matrices aléatoires. Pour cela, il suffit d'établir la proposition suivante (on procède ensuite par récurrence) :

**Proposition 4.** *Soit $A_j$ une famille de matrices $N \times N$ aléatoires et soit $H$ une matrice du GUE($N, \frac{1}{N}$) indépendante des $A_j$. On suppose que la famille $A_j$ vérifie la condition $(C')$. Alors la famille $(H, A_j)$ vérifie encore la condition $(C')$.*

*Preuve.* La condition de convergence 1. est satisfaite par $(H, A_j)$, il suffit pour le voir d'appliquer les résultats de convergence de la première partie. Pour la condition 2., rappelons que d'après le Lemme 1. on a le développement asymptotique :

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(r_{\pi_1}(P_1(A)H, \ldots, P_{n_1}(A)H) r_{\pi_2}(P_{n_1+1}(A)H, \ldots, P_{n_1+n_2}(A)H))\\ &= \sum_{\rho \in I_{\pi_{1,2}}, m_{\pi_{1,2}}(\rho) \neq 0} \alpha_{\pi_{1,2}}(\rho) \varphi_\rho(P_1(a), \ldots, P_{n_1+n_2}(a))) + O(\frac{1}{N^2})\end{aligned}$$

où l'on a défini $\pi_{1,2}$ comme la permutation de $S_{n_1+n_2}$ correspondant à l'union de $\pi_1$ et $\pi_2$. Toujours d'après ce Lemme, on a également :

$$\mathbf{E}(r_{\pi_1}(P_1(A)H,\ldots,P_{n_1}(A)H))\mathbf{E}(r_{\pi_2}(P_{n_1+1}(A)H,\ldots,P_{n_1+n_2}(A)H))$$
$$= \sum_{\rho_1\in I_{\pi_1},\rho_2\in I_{\pi_2},m_{\pi_1}(\rho_1)m_{\pi_2}(\rho_2)\neq 0} \alpha_{\pi_1}(\rho_1)\alpha_{\pi_2}(\rho_2)\varphi_{\rho_1}(P_1(a),\ldots,P_{n_1}(a)))\varphi_{\rho_2}(P_{n_1+1}(a),\ldots,P_{n_1+n_2}(a))+O(\frac{1}{N^2})$$

Pour conclure à la sommabilité de la covariance, il faudrait montrer une identité combinatoire reliant les coefficients $\alpha_{\pi_1},\alpha_{\pi_2}$ et $\alpha_{\pi_{1,2}}$. En effet, en passant à la limite dans la condition 2. de la condition $(C')$, on obtient que :

$$\varphi_{\rho_1}(P_1(a),\ldots,P_{n_1}(a)))\varphi_{\rho_2}(P_{n_1+1}(a),\ldots,P_{n_1+n_2}(a)) = \varphi_{\rho_1\rho_2}(P_1(a),\ \ldots,P_{n_1+n_2}(a)$$

où $\rho_1\rho_2$ est la permutation de $S_{n_1+n_2}$ correspondant à l'union de $\rho_1$ et $\rho_2$. On aimerait alors montrer que toutes les permutations $\rho\in I_{\pi_1,\pi_2}$ proviennent d'une décomposition $\pi_{\rho_1\rho_2}$ et identifier les coefficients $\alpha.$ correspondants. Jusqu'à présent, on s'est contenté de développements non explicites, puisqu'on n'a pas cherché à déterminer effectivement les constantes qui apparaissaient dans le développement du Lemme 1. On peut en fait mener à bien le calcul explicite des moments du type $\mathbf{E}(r_\pi(B_1H,\ \ldots,B_nH))$, et utiliser certaines propriétés du groupe symétrique pour obtenir l'identité recherchée. □