Une question de transport en probabilités libres

Thomas Leblé, sous la direction de Philippe Biane

Introduction

La théorie du transport de mesures répond à différentes questions : celle liée à l'existence et l'unicité d'un transport optimal selon les coûts (donné soit par une mesure abstraite sur l'espace produit soit par une certaine application de transport), l'analyse de la régularité du transport optimal selon la régularité des mesures et la géométrie de leur support (et l'étude de l'équation de Monge-Ampère associée à de tels problèmes) ou encore les conséquences fonctionnelles de la possibilité de transporter une mesure sur une autre. Il est légitime de déterminer quels aspects de cette théorie admettent des équivalents au sein de la "théorie de la mesure non-commutative" interprétée au sens des algèbres d'opérateurs. La plupart des questions demandent, au minimum, d'être reformulées car on ne peut plus considérer de points sur les "espaces mesurés non-commutatifs" sous-jacents, tandis que la bonne notion de densité d'une mesure non-commutative reste encore énigmatique.

L'objectif de ce mémoire est de présenter le résultat récent [GS12] d'Alice Guionnet et Dimitri Shlyakhtenko, qui établissent l'existence d'un transport monotone libre (*free monotone transport*) entre la loi de variables semi-circulaires (associée au potentiel quadratique $V_1(X) = \frac{1}{2}X.X$) et une loi (la loi de Gibbs libre) τ_{V_2} associée à un potentiel V_2 proche de V_1. Ce transport est donné par un vecteur de séries entières en plusieurs variables non commutatives, qui s'écrit comme le gradient (cyclique) d'une telle série, et dont la matrice jacobienne est positive (c'est en ce sens qu'il est dit "monotone"). Pour de petites valeurs de la perturbation $V_2 - V_1$, ce transport est également inversible (toujours dans un espace de séries entières à plusieurs variables non commutatives de multi-rayon de convergence assez grand), ce qui fournit un isomorphisme entre la C^*-algèbre engendrée par n variables semi-circulaires libres et la C^*-algèbre engendrée par n variables de loi τ_{V_2}.

1 Généralités sur les probabilités libres

Cette partie est consacrée à de brefs rappels du vocabulaire et des notions de probabilités libres qui seront utiles pour énoncer et motiver les résultats de transport.

1.1 Espaces de probabilités et variables aléatoires

Définition 1 (Espace de probabilité non commutatif)**.** *Un espace de probabilité non commutatif (e.p.n.c) est la donnée d'une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire $\mathcal{A}$ et d'une forme linéaire (la loi) $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$. Dans la suite, on supposera toujours (sauf mention explicite) que $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre, et que φ est un état tracial fidèle sur $\mathcal{A}$.*

Cette définition recouvre les espaces probabilisés en théorie de la mesure, si (X, β, μ) est la donnée d'un espace mesuré X, muni d'une tribu β et d'une mesure de probabilité μ, alors la C^*-algèbre unitaire $\mathcal{A} := L^\infty(X, \beta, \mu)$ des fonctions β-mesurables bornées (avec l'involution donnée par conjugaison et la norme $||.||_\infty$) munie de la forme linéaire $\mathbf{E}_\mu$: $F \mapsto \int F d\mu$ vérifie la définition précédente. Dans cet exemple, les variables aléatoires bornées sont exactement les éléments de l'espace de probabilité non-commutatif $(\mathcal{A}, \mathbf{E}_\mu)$. Par analogie, on donne la définition suivante :

Définition 2 (Variables aléatoires non commutatives)**.** *Si $(\mathcal{A}, \varphi)$ est un espace de probabilité non commutatif, les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelées variables aléatoires non commutatives (v.a.n.c).*

La théorie des probabilités libres se développe autour d'un analogue non-commutatif de la notion d'indépendance : la liberté. Construisons un e.p.n.c naturellement associé à $\mathbb{F}_n$, le groupe libre à n générateurs : $\mathbb{F}_n$ agit sur l'espace des suites complexes $l^2(\mathbb{F}_n)$ (muni du produit hermitien usuel) par translation à gauche, c'est la représentation régulière gauche de $\mathbb{F}_n$. Cette représentation donne une injection de $\mathbb{F}_n$ dans l'espace $B(l^2(\mathbb{F}_n))$ des opérateurs bornés sur $l^2(\mathbb{F}_n)$, puis la complétion de la sous-algèbre involutive engendrée par l'image de $\mathbb{F}_n$ dans $B(l^2(\mathbb{F}_n))$ pour la norme d'opérateur définit la C^*-algèbre réduite du groupe libre à n générateurs notée $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$. On définit un état tracial sur $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$ en posant, pour tout élément g de $\mathbb{F}_n$, $\varphi(g) = \langle g \cdot 1, 1\rangle$ (où 1 est l'élément neutre de $l^2(\mathbb{F}_n)$ pour le produit de convolution, à savoir la suite nulle partout sauf en l'élément neutre de $\mathbb{F}_n$, noté $1_{\mathbb{F}_n}$, où elle vaut 1), et en étendant cette définition par linéarité et continuité à toute la C^*-algèbre [1].

On suppose maintenant que le nombre de générateurs n est supérieur à 2. Si f_1, f_2 sont deux générateurs distincts du groupe libre à n générateurs, que l'on identifie avec leur image dans $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$, on a : $\varphi(f_1 f_2) = 0 = \varphi(f_1)\varphi(f_2)$, et plus généralement, si P et Q sont deux polynômes, ou même deux fonctions continues sur $\mathbb{S}^1$, alors l'expression suivante fait sens par calcul fonctionnel et $\varphi(P(f_1)Q(f_2)) = \varphi(P(f_1))\varphi(Q(f_2))$. Cependant les v.a.n.c. f_1 et f_2 ne sont pas indépendantes au sens où $\varphi(P_1(f_1)Q_1(f_2)P_2(f_1)Q_2(f_2))$ n'est pas, en général, égal à $\varphi(P_1P_2(f_1))\varphi(Q_1Q_2(f_2))$ pour des fonctions P_1, P_2, Q_1, Q_2 continues sur $\mathbb{S}^1$ - il suffit de considérer $P_1(x) = Q_1(x) = x$ et $P_2(x) = Q_2(x) = x^{-1}$, pour lesquelles le premier terme vaut 0 et le second terme vaut 1. En revanche, on a la propriété suivante, qui est une traduction de la liberté des générateurs : pour tout m-uplet $x_1, \ldots, x_m$ d'éléments de $\mathbb{F}_n$ (identifiés avec leur image dans la C^*-algèbre réduite) tels que chaque x_i $(i = 1 \ldots m)$ appartient au sous-groupe engendré par un générateur, si tous les x_i sont dans le noyau de φ et si deux éléments consécutifs (x_i et x_{i+1}, pour $i = 1 \ldots m-1$) appartiennent aux sous-groupes engendrés par deux générateurs distincts, alors le produit des x_i est dans le noyau de φ.

En accord avec cette propriété, on donne la définition suivante de la notion de liberté, qui jouera un rôle analogue à la notion d'indépendance.

Définition 3 (Liberté de sous-algèbres, de v.a.n.c. d'un e.p.n.c)**.** *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un e.p.n.c. et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ des sous-algèbres unitaires de $\mathcal{A}$. Cette famille de sous-algèbres est dite libre (pour la loi φ) si $\varphi(a_1 \ldots a_r) = 0$ dès que :*

1. *Il existe $k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, m\}^r$ tels que $a_i \in \mathcal{A}_{k_i}$ pour tout $i = 1 \ \ldots r$ et $k_i \neq k_{i+1}$ pour tout $i = 1 \ldots m-1$.*
2. *$\varphi(k_i) = 0$ pour tout $i = 1 \ldots m$*

1. En termes imprécis, si l'on se restreint à la sous-algèbre (non-commutative) $\mathbb{C}\mathbb{F}_n$ de $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$ (isomorphe à la $\mathbb{C}$-algèbre de groupe de $\mathbb{F}_n$) l'application φ détecte le coefficient devant $1_{\mathbb{F}_n}$ dans l'écriture d'un élément comme combinaison linéaire d'éléments du groupe.

Soit $x_1, \dots, x_m$ des v.a.n.c. On dit que $x_1, \dots, x_m$ est une famille libre d'éléments de $\mathcal{A}$ si les sous-algèbres unitaires engendrées par les x_i $(i = 1 \dots m)$ sont libres au sens précédent.

À partir de là, la théorie des probabilités libres peut se développer, révélant de nombreuses similarités avec la théorie des probabilités "classiques", on renvoie par exemple à [NS06] pour une présentation très claire.

Définition 4 (Distribution d'une v.a.n.c, d'une famille de v.a.n.c)**.** *Soit $(\mathcal{A}, \varphi)$ un e.p.n.c. La distribution d'un élément x de $\mathcal{A}$ est la donnée de $\varphi(P(x, x^*))$ pour chaque polynôme P à deux variables non commutatives (si x est normal, c'est équivalent à cette donnée pour P polynôme à deux variables commutatives, et si x est auto-adjoint on peut choisir les polynômes à une seule variable). Soit $x_1, \dots, x_m$ des éléments de $\mathcal{A}$, leur distribution jointe est la donnée de $\varphi(P(x_1, x_1^*, \dots, x_m, x_m^*))$ pour tout polynôme P à $2m$ variables non commutatives. On parle aussi de loi (resp. de loi jointe) des variables.*

Remarquons que dans le cas d'une seule variable auto-adjointe x dans un e.p.n.c $(\mathcal{A}, \varphi)$, la distribution de x est équivalente à la donnée des moments d'une mesure de probabilité sur le spectre (compact) de x. On conclut par la définition d'une loi particulière, qui joue à maint égards en probabilités libres le rôle de la loi gaussienne en probabilités classiques.

Définition 5 (Loi semi-circulaire)**.** *On appelle distribution semi-circulaire, ou loi semi-circulaire, la mesure de probabilité sur $[-2, 2]$ de densité $d\mu_{sc} = \sqrt{4 - x^2}\frac{dx}{2\pi}$. Une famille de n variables semi-circulaires libres est la donnée d'un espace de probabilité non commutatif $(\mathcal{A}, \varphi)$ et d'éléments $x_1, \dots, x_n$ de $\mathcal{A}$, libres pour φ et de même distribution $\varphi(x^k) = \int x^k d\mu_{sc}$. On renvoie à [VDN92] pour la construction de variables aléatoires libres de distribution donnée.*

1.2 Liberté asymptotique des matrices aléatoires

La liberté apparaît comme un phénomène limite pour des familles indépendantes de matrices aléatoires dont la taille tend vers 0. On citera un résultat parmi beaucoup d'autres (voir par exemple [Gui09]) :

Théorème 1 (Liberté asymptotique pour le GUE)**.** *Soit $(M_1^{(N)}, \dots, M_p^{(N)})_{N \geq 1}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes pour tout $N \geq 1$: Les variables aléatoires $M_1^{(N)}, \dots, M_p^{(N)}$ sont indépendantes, à valeur dans l'espace des matrices hermitiennes de taille N, et sont équidistribuées. La loi de $M_1^{(N)}$ est donnée explicitement par la loi jointe de ses coefficients, qui sont indépendants et distribués de la façon suivante :*

1. *Les coefficients diagonaux suivent la loi normale $N(0, \frac{1}{\sqrt{N}})$*
2. *Les coefficients non-diagonaux sont distribués comme $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_N + iY_N)$, où X_N et Y_N sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(0, \frac{1}{\sqrt{N}})$.*

alors pour tout polynôme P à m variables non commutatives, on a :
$\frac{1}{N}Tr(P(M_1^{(N)}, \dots, M_p^{(N)})) \underset{N+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x_1, \dots, x_m)$ *où $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille de variables semi-circulaires libres pour la loi φ.*

1.3 Transport optimal classique et libre

Il s'agit ici de dresser un parallèle rapide entre des concepts et des résultats valables en théorie "classique" de la mesure, et leurs analogues non-commutatifs lorsqu'ils existent.

Transport optimal classique On présente la situation dans un cas très particulier : soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, μ_1, μ_2 deux mesures de probabilité sur X. Un plan de transport (sous-entendu "pour le triplet (X, μ_1, μ_2)") est une mesure de probabilité sur $K \times K$ dont les marginales (sur les deux coordonnées) coïncident avec μ_1 et μ_2. Une application $T : K \longrightarrow K$ est une application de transport (de μ_1 vers μ_2) si le poussé en avant $T\#\mu_1$ de la mesure μ_1 par T est égal à μ_2. La seule chose claire est qu'il existe toujours un plan de transport, donné par la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $K \times K$. Il est aussi facile de construire un exemple pour lequel il n'existe pas d'application de transport : si K est d'intérieur non vide, la mesure μ_1 une masse de Dirac en un point de K et la mesure μ_2 la mesure de Lebesgue normalisée sur K.

Introduisons un coût, c'est à dire une fonction raisonnablement régulière mais pas nécessairement positive $c : K \times K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Le problème du transport *optimal* est alors de résoudre le problème de minimisation

$$d_c(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\mu \text{ plan de transport}} \int_{K \times K} c(x, y) d\mu(x, y) \tag{1}$$

En particulier, pour les coûts $c_p(x, y) = |x - y|^p$ $(p \geq 1)$, l'infimum obtenu est appelé la distance de (p-)Wasserstein entre deux mesures de probabilités sur K. Un résultat fondamental affirme - sous des conditions peu contraignantes - l'existence d'un plan de transport optimal, et que de plus il existe des applications de transport dont le coût approche arbitrairement près l'infimum d_c.

Proposition 1. *Si c est un coût semi-continu inférieurement, alors l'infimum d_c est atteint par un plan de transport. De plus, si la distribution μ_1 est sans atome, et le coût c continu, alors on peut approcher arbitrairement bien l'infimum d_c en intégrant le coût c le long du graphe d'une application de transport.*

L'existence d'un plan optimal est facile à obtenir : quand c est semi-continu inférieurement, il en est de même de l'application $P : \mu \mapsto \int c(x, y) d\mu$, pour la topologie faible sur l'espace des plans de transport, mais cet espace est un convexe compact, si bien que P atteint son infimum. Pour la deuxième partie de la proposition, on renvoie à [Amb03] p. 7-8.

Une question naturelle est alors de déterminer dans quel cas l'infimum est en fait atteint pour une certaine application de transport, et quelle régularité on peut demander à cette application. Le résultat fondateur de Brénier [Bre91] entraîne l'existence d'un transport donné par le gradient d'une application convexe dès que les mesures sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Par ailleurs, si c_2 est le coût quadratique alors il existe un unique transport optimal, donné par une fonction convexe. Pour montrer ce dernier résultat, on peut utiliser la remarque suivante : soit μ un plan de transport optimal pour le coût c_2 (qui existe d'après la proposition précédente), alors le support de μ vérifie une certaine propriété dite de c_2-monotonie cyclique : si les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dans le support de μ, alors le prix $c_2(x_1, y_1) + c_2(x_2, y_2)$ doit être inférieur au prix $c_2(x_1, y_2) + c_2(x_2, y_1)$, autrement il vaut mieux ôter la mesure à (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et charger les couples (x_1, y_2) et (x_2, y_1), ce qui peut se faire en préservant les lois marginales. Cette propriété s'étend à un nombre quelconque de couple. Cela suffit pour montrer que, dans le cas du coût quadratique, le support de μ est contenu dans le graphe de la superdifférentielle d'une fonction convexe (pour ϕ convexe, sa superdifférentielle au point x est l'ensemble des vecteurs u tels que $\phi(x) - \phi(z) \geq (x - z) \cdot u$ pour tout z), or ce graphe est presque partout le graphe d'une fonction car une fonction convexe est presque partout différentiable.

Pour une présentation extrêmement claire du transport optimal, voir [Vil03].

Transport optimal libre Voyons maintenant comment transcrire ces questions dans le cadre des probabilités libres. D'abord, on remplace la partie K de $\mathbb{R}^n$, munie d'une mesure m par son algèbre de fonctions mesurables $L^\infty(K, m)$. Cette algèbre est engendrée (en tant qu'algèbre de Von Neumann), par les n fonctions "coordonnées" $X_1, \ldots, X_n$, où $X_i : x \in K \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ est bien mesurable et bornée (K est compact). D'après un théorème classique d'analyse fonctionnelle, les mesures sur K sont en bijection avec les formes linéaires sur $L^\infty(K)$, il est donc possible d'identifier une mesure m à la trace τ_m qu'elle induit sur $L^\infty(K, m)$. Ainsi, l'analogue non-commutatif de la situation classique est la donnée de n variables aléatoires non commutatives $X_1, \ldots, X_n$ qui engendrent une algèbre de Von Neumann M que l'on munit de deux états traciaux τ_1 et τ_2.

L'algèbre des fonctions sur un espace produit coïncide avec le produit tensoriel des algèbres de fonctions sur chaque composante (à condition de compléter le produit tensoriel algébrique, voir annexe). Dans le cadre non-commutatif, on considère donc le produit *libre* plein $M \star M$ (décrit dans l'annexe). Si M_1 et M_2 sont deux algèbres de Von Neumann, notons i_1 et i_2 les deux inclusions de M_1 et M_2 dans $M_1 \star M_2$; le problème du transport dans ce cadre devient la recherche d'une loi τ sur $M \star M$ telle que τ coïncide avec τ_1 (resp. τ_2) sur la sous-algèbre $i_1(M)$ (resp. $i_2(M)$). La seule chose claire est qu'il existe toujours un plan de transport, donné par la loi $\tau_1 \star \tau_2$.

Une application de transport, dans le cas classique, c'est la donnée d'une fonction $F : K \to K$ telle que F pousse la mesure μ_1 sur la mesure μ_2. Il n'est pas difficile de voir qu'il s'agit de construire un vecteur de n fonctions $F = (F_1, \ldots, F_n)$ tel que les variables aléatoires $F_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, F_n(X_1, \ldots, X_n)$, où X_i est la variable aléatoire "i-ème coordonnée" sous la loi de probabilité μ_1, aient pour loi jointe la loi du vecteur $(Y_1, \ldots, Y_n)$, où Y_i est la variable aléatoire "i-ème coordonnée" sous la loi de probabilité μ_2. Cela s'adapte sans difficulté au cadre non-commutatif.

On peut étendre la définition des distances de Wasserstein, en effet la quantité classique

$$\int_{K \times K} |x - y|^p d\mu$$

s'écrit en fait, avec les notations précédentes, $\tau_\mu(\sum_{i=1}^n |X_i - Y_i|^p)$. Cette écriture fait encore sens dans le cadre non-commutatif qu'on vient de présenter, si bien qu'on définit la distance de p-Wasserstein entre les lois τ_1 et τ_2 comme l'infimum de la quantité $\tau(\sum_{i=1}^n |i_1(X_i) - i_2(X_i)|^p)$, pris sur l'ensemble des lois τ sur $M \star M$ avec les bonnes "marginales". Par des arguments de compacité, il est encore vrai que l'infimum est atteint. En revanche, dans le cas non-commutatif, beaucoup moins de choses sont sues au niveau de l'existence d'un transport, en particulier d'un transport optimal. À titre d'exemple, s'il est possible de parler du support d'une trace, il n'est pas évident de voir comment adapter le raisonnement mené dans le cas classique pour le coût quadratique pour montrer (et même donner un sens) que la trace "se concentre sur le graphe d'un transport".

D'autres aspects du transport optimal ont été étudiés dans le cadre des probabilités libres, comme les inégalités de coût de transport (ICT). On renvoie à [BV01] pour une présentation détaillée et un premier exemple de ICT.

2 Le transport monotone libre

Dans cette section, on s'attache à montrer le résultat principal de [GS12], à savoir l'existence d'une application de transport entre la loi semi-circulaire et une petite perturbation de cette loi. Après avoir reformulé le problème du transport comme une équation analogue à l'équation de Monge-Ampère, l'existence de cette application est obtenue par une technique de point fixe dans un espace convenable de fonctions analytiques en plusieurs variables non commutatives, ce qui nécessite au préalable d'estimer les opérateurs différentiels (formels) mis en jeu.

2.1 Notations, conventions, et un théorème d'inversion

Espaces de fonctions analytiques Pour tout entier n, on notera $Pol_n := \mathbb{C}\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ la $\mathbb{C}$-algèbre libre à n générateurs, ou - ce qui revient au même - l'algèbre des polynômes à coefficients complexes en n variables non-commutatives. Tout élément de Pol_n s'écrit $\sum_q \lambda_q(P)q$, la somme portant sur tous les monômes unitaires (les mots en $X_1, \ldots, X_n$), $\lambda_q(P)$ désignant le coefficient devant q dans l'écriture de P comme somme de monôme, les coefficients $\lambda_q(P)$ étant presque tous nuls.

On munit Pol_n d'une famille de normes $||.||_A$ pour $A > 0$, donnée par :

$$||P||_A = \sum_{q, deg(q) \geq 0} |\lambda_q(P)| A^{\deg(q)}$$

et on note $Pol_n^{(A)}$ le complété de Pol_n pour la norme $||.||_A$. C'est un espace de fonctions à plusieurs variables non-commutatives développables en série entières de rayon de convergence au moins A au sens suivant : pour toute algèbre de Banach Q et tout n-uplet d'éléments $T_1, \ldots, T_n$ de norme au plus A, il existe un morphisme d'algèbres $Pol_n^{(A)} \longrightarrow Q$ qui envoie chaque X_j sur T_j $(j = 1 \ldots n)$. Il est clair que $Pol_n^{(A)} \subset Pol_n^{(B)}$ pour $B < A$, et le cas $n = 1$ (séries entières à une variable) montre que cette inclusion est stricte.

2.1.1 Outils différentiels sur Pol_n

Soit P un polynôme de Pol_n et $H = (H_1, \ldots, H_n)$ un vecteur d'éléments de Pol_n, le polynôme $P(X_1 + \epsilon H_1, \ldots, X_n + \epsilon H_n)$ s'écrit $P(X_1, \ldots, X_n) + \epsilon Q(X_1, \ldots, X_n) + \epsilon^2 R(X_1, \ldots, X_n)$ avec R un polynôme de Pol_n, et Q donné par :

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{deg(q) \geq 0} \lambda_q(P) \sum_{i=1}^{n} \sum_{q = AX_iB} A(X_1, \ldots, X_n) H_i(X_1, \ldots X_n) B(X_1, \ldots, X_n)$$

Cela justifie la définition suivante :

Définition 6 (Gradient non-commutatif)**.** *Pour tout $i = 1 \ldots n$, le i-ème taux d'accroissement libre ∂_i est défini sur Pol_n en étendant par linéarité l'application qui à un monôme q associe $\sum_{q=AX_iB} A \otimes B$. Le gradient non-commutatif est l'application ∂ qui à tout P de Pol_n associe le vecteur $(\partial_1 P, \ldots, \partial_n P)$.*

Cette application est bien une dérivation :

Proposition 2. *Pour tout $i = 1 \dots n$, le i-ème taux d'accroissement libre ∂_i est l'unique dérivation de Pol_n à valeurs dans $Pol_n \otimes Pol_n$ telle que $\partial_i X_j = \delta_{i=j}$.*

Il faut préciser que Pol_n agit par : $A(P_1 \otimes P_2)B = AP_1 \otimes P_2 B$.

Preuve. Il est clair que $\partial_i X_j = \delta_{i=j}$. Pour montrer que ∂_i est une dérivation, comme ∂_i est linéaire, il suffit de vérifier la règle de Leibniz sur un produit de monômes, mais

$$\sum_{q_1 q_2 = AX_iB} A \otimes B = \sum_{q_1 = A_1 X_i B_1} A_1 \otimes B_1 q_2 + \sum_{q_2 = A_2 X_i B_2} q_1 A_2 \otimes B_2 = \partial_i(q_1) q_2 + q_1 \partial_i(q_2)$$

avec les conventions sur la structure de $Pol_n \otimes Pol_n$ comme Pol_n-bimodule précisées plus haut. Comme les X_i engendrent l'algèbre, deux dérivations qui coïncident sur les X_i sont identiques. □

On utilisera beaucoup dans la preuve le gradient cyclique défini par :

Définition 7 (Gradient cyclique)**.** *Pour tout $i = 1 \dots n$, la i-ème dérivée cyclique D_i est définie sur Pol_n en étendant par linéarité l'application qui à un monôme q associe $\sum_{q=AX_iB} BA$. Le gradient cyclique est l'application qui à tout P de Pol_n associe le vecteur $(D_1 P, \dots, D_n P)$.*

Cet opérateur n'est pas une dérivation pour $n \geq 2$.

Enfin, on introduit un opérateur qui donne, dans ce contexte, l'analogue de la matrice Jacobienne :

Définition 8. *Si $F = (F_1, \dots, F_n)$ est un vecteur de n éléments de Pol_n, on note $\mathcal{J}F$ la matrice de coefficients $(\mathcal{J}F)_{i,j} = (\partial_j F_i)$ $(1 \leq i, j \leq n)$.*

Notations Si q est une matrice carrée de taille n à coefficients dans $Pol_n \otimes Pol_n$, et $F = (F_1, \dots, F_n)$ un vecteur de Pol_n^n, on note :

1. $Tr(q) := \sum_{i=1}^n q_{ii}$
2. $q\#F := (\sum_i q_{ji} F_i)_{i=1}^n$

Ouvrons une parenthèse, nécessaire quoique sans intérêt : la notation 2. n'est pas exempte d'ambiguïté : on veut effectuer le produit $q_{ji} F_i$, où q_{ji} est un élément de $Pol_n \otimes Pol_n$ et F_i un élément de Pol_n. Supposons, pour simplifier, que $q_{ji} = P_1 \otimes P_2$ est un tenseur pur. L'algèbre $Pol_n \otimes Pol_n$ est munie d'une structure de Pol_n-bimodule que l'on a décrite précédemment : $A(P_1 \otimes P_2)B = AP_1 \otimes P_2 B$. Mais ici, on considère plutôt la structure de $Pol_n \otimes Pol_n$-module (à droite) sur Pol_n donnée par $(P_1 \otimes P_2)B = P_1 B P_2$. Le mieux est d'oublier la structure de Pol_n-bimodule sur $Pol_n \otimes Pol_n$, qui n'est intervenue que pour montrer que les opérateurs ∂_i étaient des dérivations, dorénavant quand on lira ab avec a dans $Pol_n \otimes Pol_n$ et b dans Pol_n, on pensera à la structure de $Pol_n \otimes Pol_n$-module (à droite) sur Pol_n donnée par $(P_1 \otimes P_2)B = P_1 B P_2$.

Remarque sur les complétions de Pol_n On tente ici de prévenir certaines confusions de notations. Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires non-commutatives auto-adjointes de loi τ. Appelons M la C^*-algèbre engendrée par $X_1, \dots, X_n$, et N l'algèbre de von Neumann engendrée par ces mêmes variables. Les algèbres M et N contiennent les éléments obtenus par calcul fonctionnel appliqué à $X_1, \dots, X_n$: M contient le calcul fonctionnel continu, et N contient de plus le calcul fonctionnel mesurable. Dans les deux cas, M et N contiennent les éléments $P(X_1, \dots, X_n)$, pour tout polynôme P dans Pol_n (et même pour toute fonction analytique P dans $Pol_n^{(A)}$, du moment que A est supérieur au maximum des normes des éléments X_i, $i = 1 \dots n$). En ce sens, M et N pourraient être considérées comme des complétions (pour deux topologies différentes) de l'espace $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$. Cependant, tandis que les variables (formelles) $X_1, \dots, X_n$ sont libres dans $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, il se peut très bien que les variables aléatoires non commutatives X_1 et X_2 commutent (par exemple) et d'ailleurs on n'a pas tenu compte, dans la description précédente, de la loi τ.

La loi τ des variables aléatoires non commutatives $X_1, \dots, X_n$ induit par identification évidente une forme linéaire sur $Pol_n = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ (polynômes formels), et on construit l'espace $L^2(Pol_n, \tau)$ qui est le complété de l'espace Pol_n pour la norme d'espace de Hilbert associée au produit hermitien $\langle P, Q\rangle := \tau(\bar{P}Q)$ (il faut d'abord quotienter par l'idéal des éléments dégénérés pour ce produit scalaire). On peut ensuite retrouver les variables aléatoires non commutatives $X_1, \dots, X_n$ comme opérateurs agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(Pol_n, \tau)$, suivant le principe de la construction GNS (voir par exemple [Bla06] p.107), et préciser en quel sens M et N tels que définis au paragraphe précédent sont naturellement associés à la loi τ en n variables (sans passer par des variables concrètes).

Opérateur adjoint à l'opérateur $\mathcal{J}$ On termine par la définition de l'opérateur $\mathcal{J}^*$, qui joue le rôle d'adjoint à $\mathcal{J}$:

L'opérateur ∂_j est de domaine dense sur $L^2(Pol_n, \tau)$. Si $1 \otimes 1$ appartient au domaine de ∂_j^*, alors $Pol_n \otimes Pol_n$ est contenu dans le domaine *dom* ∂_j^*. Dans ces conditions on notera $\mathcal{J}^*$ l'application qui à une matrice carrée q de taille n à coefficients dans $Pol_n \otimes Pol_n$ associe :

$$\mathcal{J}^* q := (\sum_i \partial_i^*(q_{ji}))_{j=1}^n$$

En particulier, si $F = (F_1, \dots, F_n)$ est un vecteur de n éléments de Pol_n, la matrice $\mathcal{J}^* \circ \mathcal{J}F$ a pour coefficient (i, j) le terme :

$$(\mathcal{J}^* \circ \mathcal{J}F)_{i,j} = \partial_i^*(\partial_i F_j)$$

2.1.2 Applications au calcul différentiel

Convenons dans toute la suite de définir la norme d'une matrice (qui peut être une matrice-colonne) d'éléments d'un espace vectoriel normé comme le maximum des normes de ses coefficients. L'opérateur de gradient cyclique D n'est alors pas borné sur Pol_n, et - à l'instar de la dérivation usuelle dans le cas commutatif- ne s'étend pas en un opérateur borné $Pol_n^{(A)} \longrightarrow Pol_n^{(A)}$. On dispose néanmoins d'une inégalité de Cauchy :

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy pour D)**.** *L'opérateur de gradient cyclique D est borné de $(Pol_n, ||.||_A)$ vers $(Pol_n, ||.||_{A_1})$ pour tout $0 < A_1 < A$. Ainsi, il s'étend par continuité en un opérateur borné de $Pol_n^{(A)}$ vers $Pol_n^{(A_1)}$ et l'on a :*

$$||DG||_{A_1} \leq \frac{A}{|A - A_1|^2} ||G||_A \tag{2}$$

Preuve. Il suffit d'écrire la définition de la norme, qui ramène (pour chaque coefficient D_iG $(i = 1\ldots n)$) le calcul à l'inégalité de Cauchy usuelle pour une fonction d'une variable complexe analytique sur le disque de rayon A. $\square$

Une inégalité semblable est valable pour l'opérateur de type jacobienne $\mathcal{J}$. Pour $A > 0$, on munira systématiquement $Pol_n^{(A)} \otimes Pol_n^{(A)}$ du produit tensoriel projectif noté $Pol_n^{(A)} \otimes_\pi Pol_n^{(A)}$ ($||.||_{A\otimes_\pi A}$ sera la norme associée).

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy pour $\mathcal{J}$)**.** *L'opérateur $\mathcal{J}$ est borné de $(Pol_n^n, ||.||_A)$ vers $(M_n(Pol_n \otimes Pol_n), ||.||_{A_1\otimes_\pi A_1})$ pour tout $0 < A_1 < A$. Ainsi, il s'étend par continuité en un opérateur borné de $((Pol_n^{(A)})^n, ||.||_A)$ vers $(M_n(Pol_n^{(A_1)} \otimes_\pi Pol_n^{(A_1)}), ||.||_{A_1\otimes_\pi A_1})$ et l'on a :*

$$||\mathcal{J}F||_{A_1\otimes_\pi A_1} \leq \frac{A}{|A - A_1|^2}||F||_A \tag{3}$$

On a aussi, ce qui est mieux que la combinaison de (2) *et* (3) *:*

$$||\mathcal{J}DG||_{A_1\otimes_\pi A_1} \leq \frac{A}{|A - A_1|^3}||G||_A \tag{4}$$

De la même manière, on peut majorer la norme du vecteur ∂g pour une fonction g de $Pol_n^{(A)}$:

Proposition 5 (Inégalité de Cauchy pour ∂)**.** *L'opérateur ∂ est borné de $(Pol_n, ||.||_A)$ vers $(Pol_n \otimes_\pi Pol_n, ||.||_{A_1\otimes_\pi A_1})$ pour tout $0 < A_1 < A$. Ainsi, il s'étend par continuité en un opérateur borné de $(Pol_n^{(A)}, ||.||_A)$ vers $((Pol_n^{(A_1)} \otimes_\pi Pol_n^{(A_1)})^n, ||.||_{A_1\otimes_\pi A_1})$ et l'on a :*

$$||\partial g||_{A_1\otimes_\pi A_1} \leq \frac{A}{|A - A_1|^2}||g||_A \tag{5}$$

Une dernière série de notations que l'on utilisera dans la preuve :

Définition 9.
- *L'opérateur $\mathcal{N}$ est défini par son action sur un monôme q : $\mathcal{N}q = \deg q \times q$ et prolongé par linéarité à Pol_n, cet opérateur ne s'étend pas en un opérateur borné $Pol_n^{(A)} \longrightarrow Pol_n^{(A)}$ mais est borné de $Pol_n^{(A)}$ vers $Pol_n^{(A_1)}$ pour tout $A_1 < A$.*
- *Pour tout $A > 0$, $\mathcal{N}$ est inversible sur l'adhérence dans $Pol_n^{(A)}$ du sous-espace de Pol_n formé par les polynômes sans terme constant, on note Σ son inverse. On note Π l'opérateur de projection sur le sous-espace des fonctions nulles en* 0.
- *On note $\mathcal{S}$ l'opérateur de symétrisation, défini sur $\Pi Pol_n^{(A)}$ par son action sur les monômes :*

  $$\mathcal{S}X_{i_1}\ldots X_{i_p} := \frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p} X_{i_{r+1}}\ldots X_{i_p}X_{i_1}\ldots X_{i_r}$$

  Notons que $\mathcal{S}$ est clairement une isométrie.
- *On note avec un indice* 0 *(Pol_{n0}, ${Pol_n^{(A)}}_0$) le sous-espace des fonctions (polynomiales, analytiques...) nulles en zéro i.e. sans terme constant.*

Calcul fonctionnel avec $Pol_n^{(A)}$ On donne maintenant quelques définitions qui prennent leur sens lorsqu'on applique les fonctions analytiques sur des algèbres de Banach concrètes comme vu au paragraphe 2.1. Pour simplifier la discussion, on ne considérera que des C^*-algèbres.

Définition 10 (Fonctions croissantes). *Soit $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un vecteur d'élements de $Pol_n^{(A)}$ (pour un certain $A > 0$). On dit que F est croissant lorsque pour toute C^*-algèbre M, pour tout couple de vecteurs $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de M tel qu'aucun des X_i ou Y_i ($i = 1 \ldots n$) n'a une norme strictement supérieure à A, on a*

$$[F(X) - F(Y)] \cdot (X - Y) \geq 0$$

(au sens de la positivité dans les C^*-algèbres). Le produit entre deux vecteurs $X \cdot Y$ est défini par $X \cdot Y := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i^* + Y_i X_i^*$.

Définition 11 (Fonctions c-convexes). *Soit G dans $Pol_n^{(A)}$. On dit que G est c-convexe si l'inégalité suivante est vérifiée au sens de la positivité dans une C^*-algèbre :*

$$[F(X) - F(Y)] \cdot (X - Y) \geq c(X - Y) \cdot (X - Y)$$

pour tout couple de vecteurs $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ d'une C^*-algèbre M tel qu'aucun des X_i ou Y_i ($i = 1 \ldots n$) n'a une norme supérieure ou égale à A.

Il est facile de vérifier que si $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est un vecteur d'élements de $Pol_n^{(A)}$ (pour un certain $A > 0$) et si $\mathcal{J}F$ est une matrice positive, alors F est croissante.

2.2 Théorèmes d'inversion pour les fonctions analytiques

Théorème 2 (Théorème de point fixe). *Soit G un élément de $Pol_n^{(A)}$ pour un certain $A > 0$, supposons qu'il existe un réel a tel que $0 < a < A$ et $C < 1$ pour lesquels :*

1. *F est C-Lipschitz sur la boule ouverte de rayon a dans $(Pol_n^{(A)})^n$*
2. *$||F(0)||_A < (1 - C)a$*

Alors il existe une solution Z_* de norme $||Z_*||_A < a$ à l'équation de point fixe $Z = F(Z)$.

Preuve. C'est un cas particulier du théorème de point fixe dans un espace de Banach. □

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut déterminer la différentielle (au sens du calcul différentiel dans les espaces de Banach) des applications du type : $Y \mapsto F(Y)$ pour $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un vecteur d'élements de $Pol_n^{(A)}$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur de n fonctions analytiques de norme inférieure à A. On a vu, en définissant le gradient non-commutatif, comment les expressions du type $\sum_{q=AX_iB} AH_iB = \partial_i(q)H_i$ apparaissaient comme termes de premier ordre dans le développement de $q(X + \epsilon H) - q(X)$. L'application différentielle est donc la multiplication par la matrice des gradients non-commutatifs (la jacobienne $\mathcal{J}$).

Proposition 6 (Lien entre la différentielle et $\mathcal{J}F$). *Soit $F = (F_1, \ldots, F_n)$ un vecteur d'élements de $Pol_n^{(A)}$, et ϕ_F l'application, définie sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon A dans $(Pol_n^{(A)})^n$, à valeurs dans $(Pol_n^{(A)})^n$*

$$\phi_F(Y_1, \ldots, Y_n) := (F_1(Y_1, \ldots, Y_n), \ldots, F_n(Y_1, \ldots, Y_n))$$

le calcul s'effectuant au sens du calcul fonctionnel défini par les F_i sur les n-uplets de variables de norme inférieure à A dans l'espace de Banach $Pol_n^{(A)}$. Alors ϕ_F est de classe C^1 sur son domaine de définition, et sa différentielle est donnée en tout point $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ par l'application de multiplication par la matrice $\mathcal{J}F(Y)$ dont le coefficient (i, j) est $\partial_j F_i(Y)$, la dernière expression étant toujours interprétée au sens du calcul fonctionnel.

Remarquons que $\partial_j F_i$ n'est pas un élément de $Pol_n^{(A)} \otimes_\pi Pol_n^{(A)}$ en général, mais dans tout $Pol_n^{(A_1)} \otimes_\pi Pol_n^{(A_1)}$ avec $A_1 < A$, ce qui autorise à l'appliquer sur des éléments de la boule ouverte de centre 0 et de rayon A dans $(Pol_n^{(A)})^n$.

Preuve. [Esquisse] Le résultat est simple à obtenir si chaque coefficient F_i $(i = 1 \ldots n)$ de F est un polynôme : on suit alors la définition du gradient non-commutatif. Dans le cas général tout élément de $(Pol_n^{(A)})^n$ peut être approché (en norme $||.||_A$ et aussi en norme $||.||_{A_1}$ si $A_1 < A$) par des polynômes, et les différentielles forment (au moins localement) une suite de Cauchy (pour la norme $||.||_{A_1}$) - cela découle des inégalités de Cauchy mentionnées plus haut, et du fait général que la norme de la différentielle de ϕ_F, c'est à dire la norme d'opérateur de la matrice associée, est majorée par n fois la norme dans $M_n(Pn^{(A_1)} \otimes_\pi Pol_n^{(A_1)})$ (que l'on a définie comme le maximum des normes des coefficients). On applique alors un résultat de calcul différentiel sur un Banach : si f_n est une suite de fonctions C^1 qui converge (en norme) vers f, et dont les différentielles convergent (en norme) vers une fonction g, alors f est C^1 de différentielle g. □

Théorème 3 (Fonctions implicites). *Soit $A > 0$ et $F(X, Y) = (F_1(X, Y), \ldots, F_n(X, Y))$ un vecteur d'éléments de $Pol_{2n}^{(A)}$. On suppose que :*

1. *$F(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) = 0$*
2. *$Q = \mathcal{J}_2(0, \ldots, 0)$ est inversible ($\mathcal{J}_2$ désigne l'application de l'opérateur J à la fonction des n dernière coordonnées)*

Alors il existe $a > 0$ tel que pour tout vecteur $U = (U_1, \ldots, U_n)$ d'éléments de $Pol_n^{(A)}$, si $||U||_A < a$, il existe une unique solution V dans $(Pol_n^{(A)})^n$ à $F(U, V) = 0$ vérifiant $||V||_A < a$.

Preuve. C'est le théorème des fonctions implicites pour les espaces de Banach. La condition d'inversibilité de $\mathcal{J}_2$ assure l'inversibilité de la différentielle, vu la proposition précédente. □

On termine cette section par une version du théorème d'inversion locale :

Théorème 4 (Inversion locale). *Pour tout réels C et D positifs et deux réels $A > A' > 0$, notons $\Omega_{C,D,A,A'}$ le sous-ensemble de $(Pol_n^{(A)})_0^n$ sur lequel les quantités $||\mathcal{J}f||_{A \otimes_\pi A}$ et $||(\mathcal{J}f(0))^{-1}f||_A$ existent et sont bornées par C et D respectivement. Alors pour tout D, A', A fixés, il existe un C strictement positif tel que, pour tout f dans $\Omega_{C,D,A,A'}$, le vecteur $Y = X + f(X)$ est inversible au sens suivant : il existe un vecteur G dans $(Pol_n^{(A')})^n$ tel que $X = G(Y)$.*

Preuve. Pour C suffisamment petit, $\mathcal{J}Y$ est inversible dans $Pol_n^{(A)} \otimes_\pi Pol_n^{(A)}$ avec $A > A'$. On applique alors le théorème des fonctions implicites à $F(U, V) = U - Y(V)$, il faut toutefois s'assurer qu'on peut l'appliquer sur tout le disque (fermé) de centre 0 et de rayon A', puisqu'on veut l'appliquer en $U = X$ qui est de norme A'. Mais cela est garanti, pour C suffisamment petit, si D reste borné (c'est un corollaire de la preuve du théorème des fonctions implicites, ou, de manière équivalente, du théorème d'inversion locale dans un espace de Banach. Rappelons que pour inverser localement une fonction f, on peut commencer par appliquer la transformation $f \mapsto df(0)^{-1}(f - f(0))$ qui ramène, au premier ordre, le problème à une situation "universelle"). $\square$

2.3 États de Gibbs classiques et libres

On définit brièvement la notion d'état de Gibbs (au sens classique). On définit ensuite son analogue libre, et on évoque les questions d'existence et de caractérisation.

États de Gibbs classiques

Définition 12 (État de Gibbs associé au potentiel V)**.** *Soit V une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^d$, telle que $Z_V = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)}dx < +\infty$. La mesure de probabilité $\mu_V(dx) = \frac{1}{Z_V}e^{-V(x)}dx$ est alors bien définie, et est appelé état de Gibbs associé au potentiel V.*

Un lien de cette définition avec le mouvement Brownien est le suivant : soit B_t un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^d$, et soit X_t la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2}\nabla V(X_t)dt$$

Alors pour toute distribution initiale X_0, le processus X_t converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers l'état de Gibbs associé à V.

États de Gibbs libres Dans la perspective du lien entre grandes matrices aléatoires et probabilités libres, il est naturel de se demander si la limite

$$\tau(Q(M)) := \lim_{N+\infty} \frac{1}{Z_N} \int_{(H_N)^k} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Q(M))e^{-N\mathrm{Tr}(V(M))}dM \tag{6}$$

existe pour tout N, lorsque l'intégration porte sur les k-uplets de matrices hermitiennes par rapport à la mesure $\frac{1}{Z_N}e^{-N\mathrm{Tr}(V(M))}dM$, dM désignant la mesure de Lebesgue sur $(H_N)^k$ identifié à $(\mathbb{R}^{n^2})^k$. Ici Z_N est un facteur de normalisation, V est un polynôme (ou une fonction) fixée en k variables non commutatives tel que chaque intégrale est définie. Si la limite existe pour tout polynôme Q en k variables non commutatives, alors τ est la loi de k variables aléatoires non commutatives, et on appelle cette loi la loi de Gibbs libre associée à V. Cette terminologie de "libre" se justifie par les résultats de liberté asymptotique de grandes matrices aléatoires, par exemple pour $V(M_1, \ldots, M_k) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k M_i^2$, on obtient à la limite la loi de k variables semi-circulaires libres. Plus généralement, si V se décompose comme la somme de k fonctions $V_1, \ldots, V_k$ telles que V_i ne dépend que de la variable M_i, alors si la loi limite existe c'est la loi de variables aléatoires libres.

Équations de Schwinger-Dyson Quand le potentiel V est c-convexe (au sens de la définition 11), la loi de Gibbs libre, si elle existe, satisfait à une équation, dite de Schwinger-Dyson, qui permet dans certains cas de la caractériser. Cette propriété est remarquée par Biane dans [Bia03], et développée notamment dans [GMS06] en relation avec la combinatoire des cartes planaires (voir aussi [Gui09] Part III). Dans un précédent article [GS09], Guionnet et Shlyakhtenko ont montré (sous certaines conditions) l'unicité de solutions à l'équation de Schwinger-Dyson pour des potentiels strictement convexes, si bien qu'on peut réduire le problème du transport à la recherche d'éléments vérifiant une certaine équation de Schwinger-Dyson.

L'équation de Schwinger-Dyson associée à un potentiel $V = \sum \lambda_V(q)q$ porte sur une loi τ de n variables aléatoires non-commutatives et s'écrit

$$\tau \otimes \tau(\partial_i Q) = \tau(QD_iV) \tag{7}$$

pour tout $i = 1 \dots n$ et tout polynôme Q à n variables non-commutatives. Pour montrer que les limites simples de l'équation (6) vérifient cette équation (au moins pour V c-convexe), on se restreint au cas où Q est un monôme (ce qui suffit par linéarité de (7)) et on écrit que le terme de droite est, par définition la limite pour $N \to +\infty$ de la quantité :

$$\int \frac{1}{N} e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \sum_q \lambda_V(q) \sum_{q=AX_iB} \mathrm{Tr}(AQB)dM$$

Mais par intégration par parties, l'expression précédente est égale à

$$\int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N^2} (\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Tr})(\partial_i Q)dM$$

Comme Q est un monôme, $\partial_i Q = \sum_{Q=AX_iB} A \otimes B$ et

$$\int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N^2} (\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Tr})(\partial_i Q)dM = \int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N^2} \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)dM$$

Ce qui est presque la quantité apparaissant dans la définition du terme de gauche dans l'équation (7). Il faut maintenant utiliser deux arguments de théorie de la mesure (une inégalité de Brascamp-Lieb associée à une inégalité de concentration) pour garantir que l'on peut séparer les deux occurrences de la trace.

Inégalités de concentration Les phénomènes de concentration de la mesure surviennent notamment pour des mesures log-concaves, i.e. s'écrivant $d\mu = \exp(-V(x))dx$, où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et V est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$. Pour cerner le cas des matrices aléatoires on dit parfois que V est convexe si pour tout entier N l'application $(M_1, \dots, M_n) \mapsto \mathrm{Tr}V(M_1, \dots, M_n)$ est convexe sur l'espace des n-uplets de matrices hermitiennes de taille N. Autrement dit, lorsque V est convexe, la mesure de densité $\exp(-N\mathrm{Tr}(V))dM$ est log-concave (où M désigne la mesure de Lebesgue sur les n-uplets de matrices hermitiennes de taille N). Cette définition est compatible avec la définition 11, car un polynôme c-convexe (au sens de 11) est convexe.

Les mesures log-concaves présentent des effets de concentration de la mesure : les fonctions Lipschitziennes s'écartent peu de leurs valeurs moyennes pour de telles mesures, par exemple si f est 1-Lipschitzienne, la probabilité que f s'écarte d'au moins δ de sa valeur moyenne est majorée par $\exp(-C\delta^2)$, où C est un réel strictement positif dépendant de la mesure et qui, dans le cas des mesures $\exp(-N\mathrm{Tr}(V))dM$, peut être choisi proportionnel à N.

Bien entendu, on ne peut pas espérer en général de concentration pour des fonctions non Lipschitziennes, or on espère appliquer de telles inégalités à des fonctions du type $M_1, \dots, M_k \mapsto \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(q(M_1, \dots M_k))$ où q est un monôme en k variables non-commutatives. Une fonction polynomiale de degré supérieur à 2 n'est en général pas

Lipschitzienne sur une partie non bornée, mais reste Lipschitz sur toute partie bornée. On a alors besoin d'estimer la mesure du complémentaire d'une partie bornée.

Les inégalités de Brascamp-Lieb fournissent une telle information, par exemple dans le cas d'un potentiel V c-convexe : la probabilité sous $\exp(-N\mathrm{Tr}(V))dM$ que le maximum des rayons spectraux de $M_1, \ldots, M_n$ soit supérieur ou égal à un réel M décroît exponentiellement avec M, le temps caractéristique pouvant être choisi inversement proportionnel à N.

En combinant ces deux outils, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N^2}(\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{Tr})(\partial_i Q)dM &= \int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N^2}\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)dM \\ &= \int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A)dM \int e^{-N\mathrm{Tr}(V)} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(B)dM + o(1)\end{aligned}$$

si bien que la limite quand $N \to +\infty$ des lois $\exp(-N\mathrm{Tr}(V))dM$, si elle existe, satisfait à l'équation de Schwinger-Dyson associée à V.

Loi de Gibbs libre associée à un potentiel c-convexe Par analogie avec l'EDS $dX_t = dB_t - \frac{1}{2}\nabla V(X_t)dt$ pour laquelle les solutions suivent la loi de Gibbs (classique) associée à V, l'étude de l'équation différentielle stochastique libre :

$$dX_t = dS_t - \frac{1}{2}(DV)(X_t)dt \tag{8}$$

où S_t est un mouvement Brownien libre, permet de montrer l'existence d'une loi de Gibbs libre pour certains potentiels V, et de la caractériser comme l'unique solution de l'équation de Schwinger-Dyson associée. Dans [BS01], Biane et Speicher montrent l'existence et l'unicité de solutions à l'équation 8 pour une certaine classe de potentiels V (ceux tels que $V + aX^2$ est convexe pour un certain a), cependant lorsque V n'est pas convexe il se peut que la solution de 8 ne converge pas, pour $t \to +\infty$, vers la loi de Gibbs libre.

Définition 13 (Potentiels (c,M) convexes)**.** *Un polynôme V à n variables non commutatives est dit (c, M)-convexe si l'inégalité suivante est vérifiée au sens de la positivité dans une C^*-algèbre :*

$$[V(X) - V(Y)] \cdot (X - Y) \geq c(X - Y) \cdot (X - Y)$$

pour tout couple de vecteurs $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ d'une C^*-algèbre tel qu'aucun des X_i ou Y_i $(i = 1 \ldots n)$ n'a une norme supérieure ou égale à M.

Dans l'article [GS09], Guionnet et Shlyakhtenko montrent que, pour des potentiels (c, M)-convexes (c et M sont des réels positifs), les solutions de l'équation (8) convergent vers la loi de Gibbs libre associée à V à condition que la norme de la donnée initiale soit suffisamment petite (afin qu'on puisse contrôler la taille de X_t au cours du temps de façon à pouvoir toujours appliquer l'inégalité de convexité). En particulier, comme une solution à l'équation de Schwinger-Dyson associée à V est une mesure stationnaire pour (8), la mesure de Gibbs libre est la seule solution à l'équation de Schwinger-Dyson, au moins parmi les lois de n variables aléatoires non commutatives bornées par une certaine constante.

Théorème 5 (Guionnet-Shlyakhtenko, 2007). *Soit V un polynôme (c, M)-convexe en n variables non commutatives. Il existe M_0 et B_0 deux constantes dépendant de c et de $||DV(0) \cdot DV(0)||$ et une constante $b \geq B_0$ telles que si $M \geq M_0$ et si Z est un vecteur de variables aléatoires auto-adjointes bornées par b, alors il existe une unique solution X_t^Z à l'équation (avec donnée initiale Z) :*

$$dX_t^Z = dS_t - \frac{1}{2} DV(X_t^Z)dt, \ t \geq 0$$

De plus cette solution est bornée par M pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\limsup ||X_t^Z||_\infty \leq B_0$. La solution X_t^Z converge en loi vers une certaine loi de probabilité de n variables non commutatives bornées par B_0, et cette loi limite est indépendante de la distribution initiale. Cette loi vérifie l'équation de Schwinger-Dyson associée à V, et il n'existe pas d'autre loi de n variables non commutatives bornées par b qui vérifie cette équation.

2.4 Formulation du problème à plusieurs variables

On passe maintenant à la question de l'existence d'un transport.

Fixons $X_1, \ldots, X_n$ des variables semi-circulaires libres. Le problème du transport, comme décrit au paragraphe (1.3), consiste à chercher des éléments $Y_1, \ldots, Y_n$ dans l'algèbre de Von Neumann (M, τ_{sc}) engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ (M est en particulier stable par calcul analytique) dont la loi (sous τ_{sc}) est la loi τ_V (loi de Gibbs libre de potentiel V). Si l'on suppose que $V(X) = \frac{1}{2} X \cdot X + W(X)$ est proche du potentiel quadratique (pour une certaine norme analytique), on peut supposer qu'il existe une solution $Y = Y_1, \ldots, Y_n$ proche des générateurs $X = X_1, \ldots, X_n$, et on cherche une solution de la forme $Y = F(X)$, où $F = (F_1, \ldots, F_n)$ est un vecteur de fonction analytiques (qui doivent converger sur un rayon plus grand que le rayon spectral des variables $X_1, \ldots, X_n$) que l'on écrit $F(X) = X + f(X)$, où f est, dans cette heuristique, considéré comme "petit" puisque Y est cherché proche de X. Une façon de garantir que $F(X)$ suit bien, sous τ_{sc}, la loi τ_V est de vérifier l'équation de Schwinger-Dyson (qui possède une unique solution dans les cas considérés).

Il est facile de vérifier qu'une famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de variables aléatoires non-commutatives vérifie l'équation de Schwinger-Dyson associée au potentiel V si et seulement si l'équation suivante est satisfaite pour tout $j = 1 \ldots n$:

$$\partial_{Y_j}^*(1 \otimes 1) = D_j V(Y) \tag{9}$$

où $\partial_{Y_j}^*$ désigne l'adjoint de l'opérateur ∂_{Y_j} agissant sur l'algèbre de von Neumann obtenue par complétion de $\mathbb{C}\langle Y_1, \ldots, Y_n \rangle$ par rapport à la loi de Y. Cette écriture n'est pas maniable, car on cherche à exprimer le problème en fonction des générateurs $(X_1, \ldots, X_n)$. Cela est possible si l'on peut passer de X à Y par changement de variables, par exemple si la matrice jacobienne de Y (par rapport aux coordonnées X) est inversible.

Proposition 7 (Formule de changement de variable). *Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ dans l'algèbre de Von Neumann (M, τ) engendrée par des variables aléatoires non commutatives $X_1, \ldots, X_n$ de loi τ. Les opérateurs de taux d'accroissement libre ∂_i sont alors vus comme des opérateurs non-bornés définis sur un domaine dense. Si la matrice $\mathcal{J}Y = (\partial_{X_i} Y_j)_{ij}$ est bien définie et inversible, et si $1 \otimes 1$ est dans le domaine de ∂_j^* pour tout $j = 1 \ldots n$, alors :*

1. *L'opérateur ∂_{Y_j} coïncide avec $\hat{\partial}_j$ défini par :*

$$\hat{\partial}_j(Z) := \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{J}Y)^{-1}_{ji} \# \partial_i(Z)$$

où $(a \otimes b)\#(A \otimes B) := Aa \otimes bB$

2. *L'adjoint $\partial^*_{Y_j}$ coïncide avec $\sum_i \partial_i^*((\mathcal{J}Y)^{-1}_{ji})^\dagger$ où $(a \otimes b)^\dagger := b^* \otimes a^*$*
3. *Si Y est le gradient cyclique DG d'une fonction G dans $Pol_n^{(A)}$ pour un $A > 0$, alors $((\mathcal{J}Y)^{-1}_{ji})^\dagger = (\mathcal{J}Y)^{-1}_{ji}$, et $(\mathcal{J}Y)^{-1}$ est auto-adjoint.*

Preuve. La preuve de 1. et 2. est un calcul direct, pour 1. on vérifie que les deux opérateurs s'accordent sur Y_j (et que ce sont deux dérivations). La propriété 3. permet de simplifier les expressions, et la dernière observation ($\mathcal{J}Y$ auto-adjoint) est proche du lemme de Schwarz pour les fonctions C^2. □

On peut maintenant reformuler le fait qu'un transport $Y = F(X) = X + f$ donné vérifie l'équation de Schwinger-Dyson associé à $V(X) = \frac{1}{2}X \cdot X + W(X)$. La famille d'équations (9) est équivalente à l'équation vectorielle

$$\mathcal{J}_Y^*(1) = Y + (DW)(Y) \tag{10}$$

Notons que cette écriture est bien plus compacte que la liste d'équations traduisant l'égalité des moments de deux lois (qui serait le moyen le plus naïf pour vérifier que l'on a bien transporté τ_{sc} sur τ_{V_2}). Si l'on cherche F (donc f) comme gradient cyclique d'une fonction G, et si l'on suppose que $\mathcal{J}F$ est inversible (i.e. $1 + \mathcal{J}f$ est inversible), alors l'équation (10) est équivalente à :

$$\mathcal{J}^*((1 + \mathcal{J}f)^{-1}) = X + f + (DW)(X + f) \tag{11}$$

Si τ_P est la loi associée à un potentiel P, on a $\mathcal{J}^*(1) = DP$ (gradient cyclique). Pour la loi semi-circulaire, en particulier, on obtient $\mathcal{J}^*(1) = X$, si bien que l'équation précédente se ré-écrit sous la forme d'une équation de point fixe pour f :

$$f = -\mathcal{J}^*(\mathcal{J}f(1 + \mathcal{J}f)^{-1}) - (DW)(X + f) \tag{12}$$

Il n'est cependant pas clair qu'on puisse borner efficacement la constante de Lipschitz de la fonction de f qui constitue le terme de droite. Une série de manipulations va donner une forme plus maniable à l'équation (12), nous décrivons d'abord ces manipulations dans le cas à une variable.

2.5 Un exemple éclairant : le cas à une variable

Le cas à une variable est particulièrement maniable pour plusieurs raisons : la non-commutativité n'apparaît pas, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires au sens classique, les polynômes et les fonctions analytiques considérées prennent leur sens usuel, les opérateurs différentiels ont une expression simple : en particulier, $\mathcal{J}F = \frac{F(x)-F(y)}{x-y}$ et $DG = G'$. Par ailleurs, les questions que l'on peut se poser relèvent de plein droit de la théorie classique du transport de mesure, largement développée en dehors du cadre très restrictif des petites perturbations de la loi semi-circulaire. Pourtant, la démarche va fournir, en plus d'une "nouvelle preuve" de l'existence d'un transport, les manipulations convenables à effectuer dans le cas de plusieurs variables non commutatives.

Soit X une variable aléatoire semi-circulaire, que l'on peut réaliser comme l'opérateur de multiplication par x sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, \mu_{sc})$, avec $d\mu_{sc} = \mathbf{1}_{[-2,2]}\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$. Pour $V_2(x) = V_1(x) + W(x)$ potentiel assez proche de $V_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, il y a existence et unicité de la solution de l'équation de Schwinger-Dyson associée à V_2 (cf. paragraphe 2.3). Cette équation est équivalente à $\mathcal{J}^*(1 \otimes 1) = 2\int \frac{1}{x-y} d\eta_{V_2}$ (on notera dans la suite de cette section η_V la mesure de probabilité associée à l'état de Gibbs libre de potentiel V) ce qui est encore équivalent à

$$2\int \frac{1}{x-y} d\eta_V(y) = V'(x)$$

On peut maintenant chercher un transport entre η_{V_1} et η_{V_2}, c'est à dire une certaine application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que F pousse en avant la mesure η_{V_1} sur η_{V_2}, ou, pour abréger, $F_*\eta_{V_1} = \eta_{V_2}$. Cette dernière propriété est vérifiée si et seulement si $F_*\eta_{V_1}$ vérifie l'équation de Schwinger-Dyson associée à V_2, i.e. si :

$$2\int \frac{1}{F(x) - F(y)} d\eta_{V_1} = V_2'(F(x))$$

Ce qui est simplement la traduction, après le changement de variable $x \mapsto F(x)$ du fait que $\mathcal{J}_{V_2}^*(1 \otimes 1) = V_2'$, lorsque $\mathcal{J}_{V_2}$ désigne l'opérateur de dérivation agissant sur (une partie dense de) l'espace $L^2(\mathbb{R}, \eta_{V_2})$ (c'est l'équivalent du $\mathcal{J}_Y$ de la formule de changement de variables de la proposition 7). Retranchons $\mathcal{J}_{V_1}(1 \otimes 1) = V_1'(x)$ de chaque côté de l'équation

$$-2\int \frac{1}{x-y} \frac{\mathcal{J}f(x,y)}{1 + \mathcal{J}f(x,y)} d\eta_{V_1}(y) = F(x) + W'(F(x)) - x$$

Si l'on multiplie par $F'(x) = 1 + f'(x)$ l'équation obtenue, le terme de droite s'écrit $FF'(x) + W'(F(x))F'(x) - xF'(x)$, ce qui est agréable puisqu'on reconnaît des dérivées. Pour manier le terme de gauche on décompose $\mathcal{J}f + f'\mathcal{J}f$ en ajoutant et retranchant f', si bien que :

$$\begin{aligned}(1 + f'(x)) \times \int \frac{1}{x-y} \frac{\mathcal{J}f}{1 + \mathcal{J}f} d\eta_{V_1} &= \int \frac{1}{x-y} \frac{\mathcal{J}f(x,y) - f'(x)}{1 + \mathcal{J}f(x,y)} d\eta_{V_1}(y) \\ &\quad + \int \frac{1}{x-y} \frac{f'(x) + f'(x)\mathcal{J}f(x,y)}{1 + \mathcal{J}f(x,y)} d\eta_{V_1}(y)\end{aligned}$$

la deuxième intégrale s'écrit aussi $f'(x)\int \frac{1}{x-y} d\eta_{V_1}$, dont on connaît une autre expression par hypothèse. Finalement, si $F'(x)$ n'est essentiellement jamais nul (i.e. la multiplication par F' préserve l'équivalence entre les équations), l'équation du transport est équivalente à :

$$-2\int \frac{1}{x-y} \frac{\mathcal{J}f(x,y) - f'(x)}{1 + \mathcal{J}f(x,y)} d\eta_{V_1}(y) + f'(x)V_1'(x) = FF'(x) + W'(F(x))F'(x)$$

ou encore :

$$-2\int \frac{1}{x-y} \frac{\mathcal{J}f(x,y) - f'(x)}{1 + \mathcal{J}f(x,y)} d\eta_{V_1}(y) = FF'(x) + W'(F(x))F'(x) - xF'(x) + xf'(x)$$

et un calcul élémentaire donne encore :

$$-2\int \frac{1}{x-y}\frac{\mathcal{J}f(x,y)-f'(x)}{1+\mathcal{J}f(x,y)}d\eta_{V_1}(y) = \frac{1}{2}(f^2)'(x)+(xf)'(x)+W(x+f(x))'(x) \quad (13)$$

équation équivalente à l'équation de transport sous réserve que $F'(x)$ soit inversible (η_{V_1} presque partout). On utilise ensuite les relations suivantes entre le taux d'accroissement et la dérivée :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-y}(f'(x)-\mathcal{J}f(x,y)) &= \partial_x(\mathcal{J}f(x,y)) \\
\partial_x \int \mathcal{J}f - \log(1+\mathcal{J}f)d\eta_V &= \int \frac{(f'(x)-\mathcal{J}f)}{x-y}d\eta_V(y) - \int \frac{(f'(x)-\mathcal{J}f)}{(x-y)(1+\mathcal{J}f)}d\eta_V
\end{aligned}$$

qui sont faciles à vérifier, et permettent d'obtenir, après quelques manipulations, que le terme de gauche dans (13) est la dérivée de $2\int \log(1+\mathcal{J}f(x,y))d\eta_{V_1}(y)$, si bien que (13) est équivalente, en intégrant, à :

$$2\int \log(1+\mathcal{J}f(x,y))d\eta_{V_1}(y) = (xf)(x)+\frac{1}{2}(f(x))^2+W(x+f(x))+\text{const.} \quad (14)$$

On peut ré-écrire (14) sous la forme d'une équation de point fixe : cherchons f sous la forme g', sachant que l'opérateur sur les fonctions analytiques $g \mapsto xg'$ admet une forme relativement simple (il agit sur les monômes en les multipliant par leur degré). On a noté $\mathcal{N}$ cet opérateur, inversible sur l'espace des fonctions analytiques qui s'annulent en 0, d'inverse noté Σ. Alors (14) est équivalent à :

$$2\int \log(1+\mathcal{J}(\Sigma\hat{g})')d\eta_{V_1}(y) - \frac{1}{2}((\Sigma\hat{g})'(x))^2 - W(x+(\Sigma\hat{g})'(x)) + \text{const.} = \hat{g}(x) \quad (15)$$

avec $f = (\Sigma\hat{g})'$. Résoudre cette équation de point fixe en $\hat{g}$ demande d'estimer les constantes de Lipschitz de la fonction de $\hat{g}$ définie par le terme de gauche, ce que l'on va faire directement dans le cas général, après avoir brièvement décrit comment adapter la méthode précédente pour n variables non commutatives.

2.5.1 Le cas général

La première étape est encore d'exprimer le fait qu'un certain vecteur $F = (F_1, \ldots, F_n)$ dans $(Pol_n^{(A)})^{(n)}$ pour un A strictement supérieur à la norme des variables semi-circulaires, noté $F(X) = X + f(X)$ transporte la loi semi-circulaire vers une (en fait, la seule) loi vérifiant l'équation de Schwinger-Dyson associée au potentiel $V_2 = V_1 + W$.

L'équation de Schwinger-Dyson s'écrit, dans le cas de n variables non-commutatives, sous la forme $\mathcal{J}^*_{F(X)}(1) = DV_2(F(X))$. D'après la formule de changement de variables (7), cela est équivalent à l'équation :

$$\mathcal{J}^*((1+\mathcal{J}f)^{-1}) = DV_2(F(X)) = X + f + DW_2(X+f)$$

On peut retrancher DV_1 des deux côtés de l'égalité, et comme $DV_1(X) = X$ on obtient :

$$-\mathcal{J}^*(\frac{\mathcal{J}f}{1+\mathcal{J}f}) = f + DW_2(X+f) \quad (16)$$

Maintenant, l'opération équivalente à la multiplication par $F'(X)$ dans le cas unidimensionnel est la multiplication par la différentielle de F, c'est à dire l'application de $g \mapsto \mathcal{J}F\#g = \mathcal{J}f\#g + g$ (le symbole $\#$ a été défini dans ce contexte, voir le paragraphe de notations, c'est la multiplication matricielle avec, de plus, la structure de module $(a \otimes b)g_i = ag_ib$). On obtient l'équation suivante, similaire à (13) :

$$\mathcal{J}^*(\frac{\mathcal{J}f}{1+\mathcal{J}f}) - \mathcal{J}f\#\mathcal{J}^*(\frac{1}{1+\mathcal{J}f}) = \mathcal{J}f\#f + f + \mathcal{J}f\#X + \mathcal{J}F\#DW(F(X))$$

Le terme de droite s'écrit comme un gradient cyclique, en effet $\mathcal{J}f\#f = D(\frac{1}{2}f \cdot f)$, $f + \mathcal{J}f\#X = D(f \cdot X)$ et $\mathcal{J}F\#DW(F(X)) = D(W(F(X)))$. Pour le terme de gauche, on s'inspire du résultat à une variable, en cherchant à l'écrire comme la dérivée d'une certaine expression en $\log(1+\mathcal{J}f)$. On utilise le lemme technique suivant :

Lemme 1. *Soit g un élément de $Pol_n^{(A)}$ et $f = Dg$. Si $1 \otimes 1$ appartient au domaine de ∂_j^* (calculé pour la loi τ) pour tout $j = 1 \dots n$, alors pour tout entier $m \geq -1$, on a :*

$$D\left((1 \otimes \tau + \tau \otimes 1)(\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{J}f)_{ii}^{m+2})\right) = (m+2) \times \left(-\mathcal{J}^*((\mathcal{J}f)^{m+2}) + \mathcal{J}f\#\mathcal{J}^*((\mathcal{J}f)^{m+1})\right)$$

Preuve. La preuve (Lemme 3.4 du preprint [GS12]) est surtout technique, et consiste à décomposer $Dg = f$ en monôme puis à travailler sur les indices, en s'appuyant sur une expression explicite pour $\partial_j^*(A \otimes B)$. □

En développant $\log(1+\mathcal{J}f)$ en série entière (formellement, ou pour $\mathcal{J}$ supposé petit - ce qui sera le cas a posteriori), et en comparant terme à terme, on obtient finalement l'identité suivante, similaire à ce qui a été obtenu pour une variable :

$$D\left((1 \otimes \tau + \tau \otimes 1)(\mathrm{Tr}\log(1+\mathcal{J}f))\right) = \mathcal{J}^*(\frac{\mathcal{J}f}{1+\mathcal{J}f}) - \mathcal{J}f\#\mathcal{J}^*(\frac{1}{1+\mathcal{J}f})$$

En résumé, l'équation de transport est équivalente, sous réserve que $\mathcal{J}F$ soit inversible, que $\mathcal{J}f$ soit suffisamment petit en norme $||.||_A$, et que f soit un gradient cyclique à l'équation

$$D\left((1 \otimes \tau_{V_1} + \tau_{V_1} \otimes 1)(\mathrm{Tr}\log(1+\mathcal{J}f))\right) = D(\frac{1}{2}f \cdot f) + D(f \cdot X) + D(W(F(X))) \quad (17)$$

Il est faux que le noyau de D ne contienne que les fonctions de degré inférieur à 0 : considérer par exemple $X_1X_2 - X_2X_1$ (ou plus généralement un polynôme P tel que $P(\sigma \cdot X) = \epsilon(\sigma)P(X)$ pour tout cycle σ de S_n, où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature). Cependant, on peut toujours chercher à résoudre l'équation "intégrée"

$$(1 \otimes \tau_{V_1} + \tau_{V_1} \otimes 1)(\mathrm{Tr}\log(1+\mathcal{J}f)) = \frac{1}{2}f \cdot f + f \cdot X + W(F(X))$$

Rappelons que l'on cherche f comme le gradient cyclique d'une fonction Dg, et l'on peut sans restreindre la généralité supposer g sans terme constant. Le terme $f \cdot X = Dg \cdot X$ est l'analogue du terme $xf'(x)$ dans le cas à une variable, et il coïncide avec $\mathcal{N}g$. On effectue le changement de variable $\hat{g} = \mathcal{N}g$, i.e. $g = \Sigma\hat{g}$. L'équation précédente se ré-écrit sous la forme d'une équation de point fixe :

$$\hat{g} = (1 \otimes \tau_{V_1} + \tau_{V_1} \otimes 1)(\mathrm{Tr}\log(1+\mathcal{J}D\Sigma\hat{g})) - \frac{1}{2}D(\Sigma\hat{g} \cdot \Sigma\hat{g}) - W(X + D\Sigma\hat{g}) \quad (18)$$

Il s'agit maintenant de montrer que cette équation de point fixe est résoluble dans un espace $Pol_{n_0}^{(A)}$ avec A suffisamment grand et W suffisamment petit, pour cela on va estimer les fonctions de $\hat{g}$ qui apparaissent dans le terme de droite.

2.6 Estimation des opérateurs différentiels

On commence par estimer le terme en $\log(1+\mathcal{J}D\Sigma\hat{g})$, grâce au lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $g_1,\dots,g_m$ des éléments de Pol_{n0}. Posons*

$$Q_m(g_1,\dots,g_m) := (1\otimes\tau+\tau\otimes 1)(\mathit{Tr}[(\mathcal{J}Dg_1)\dots(\mathcal{J}Dg_m)])$$

où τ est une forme linéaire sur Pol_n vérifiant $|\tau(q)|\le C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q. Alors pour tout $A>C_0$, on a :

$$||Q_m(\Sigma g_1,\dots,\Sigma g_m)||_A \le C(C_0,A,n,m)\prod_{i=1}^{m}||g_k||_A$$

avec $C(C_0,A,n,m)=2(\frac{n}{A^2-AC_0})^m$. En particulier l'application $(g_1,\dots,g_m)\mapsto Q_m(\Sigma g_1,\dots,\Sigma g_m)$ s'étend en un opérateur multilinéaire borné de ${Pol_n^{(A)}}_0$ dans $Pol_n^{(A)}$.

Preuve. Montrons d'abord le résultat dans le cas où tous les g_i $(i=1\dots m)$ sont de monômes. On a $(\mathcal{J}D\Sigma g)_{ij}=\frac{1}{p}\partial_j D_i g=\frac{1}{p}\sum_{g=AX_iB}\sum_{BA=RX_jQ}R\otimes Q$ pour tout monôme g de degré p. Ainsi, on peut écrire en développant :

$$(\mathcal{J}Dg_1)\dots(\mathcal{J}Dg_m)_{ii}=\sum_{i=j_0,j_1,\dots,j_m=i}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{deg\ g_k}\sum_{g_k=A_kX_{j_{k-1}}B_k}\sum_{B_kA_k=R_kX_{j_k}Q_k}R_k\otimes Q_1\dots Q_k$$

Remarquons qu'il y a au plus $deg\ g$ décompositions d'un monôme g qui apparaissent dans une expression du type $\sum_{g=AX_iB}$. On peut alors estimer $||(1\otimes\tau)\mathrm{Tr}[(\mathcal{J}Dg_1)\dots(\mathcal{J}Dg_m)]||_A$: il y a n^{m-1} termes dans la somme $\sum_{i=j_0,j_1,\dots,j_m=i}$ et chacun est contrôlé de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
&\|(1\otimes\tau)[(\mathcal{J}D\Sigma g_1)\cdots(\mathcal{J}D\Sigma g_m)]_{j_0j_m}\|_A\\
&\quad=\sum_{j_1,\dots,j_{m-1}}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{\deg g_k}\sum_{g_k=A_kX_{j_{k-1}}B_k}\sum_{B_kA_k=R_kX_{j_k}Q_k}A^{\deg(R_1\cdots R_m)}\otimes\tau(Q_1\cdots Q_m)\\
&\qquad\le n^{m-1}\sum_{l_1\cdots l_m}A^{l_1+\dots+l_m}\cdot C_0^{\deg g_1-l_1-2+\dots+\deg g_m-l_m-2}\\
&\quad=n^{m-1}A^{\deg g_1+\dots+\deg g_m}A^{-2m}\sum_{l_1\cdots l_m}\left(\frac{C_0}{A}\right)^{\deg g_1-l_1-2+\dots+\deg g_m-l_m-2}\\
&\qquad\le n^{m-1}\prod_{k=1}^{m}A^{-2}\|g_k\|_A\frac{1}{1-C_0/A}
\end{aligned}$$

On a une même estimation pour $||(\tau\otimes 1)\mathrm{Tr}[(\mathcal{J}Dg_1)\dots(\mathcal{J}Dg_m)]||_A$, si bien qu'en sommant les n termes de la trace on arrive à :

$$||Q_m(\Sigma g_1,\dots,\Sigma g_m)||_A\le 2n^mA^{-2m}(\frac{1}{1-C_0/A})^m\prod_{k=1}^{m}||g_k||_A$$

qui est la formule voulue. Pour le cas général, on décompose les g_i en somme de monômes et on utilise la multilinéarité de Q_m. □

On peut maintenant contrôler la constante de Lipschitz de $g \mapsto Q_m(g, \dots g)$ sur toute partie bornée.

Lemme 3. *Soit g_1, g_2 des éléments de ${Pol_n^{(A)}}_0$, on pose $Q_m(x) = Q_m(x, \dots, x)$, on suppose que τ (dans la définition de Q_m) est une forme linéaire sur $Pol_n^{(A)}$ vérifiant $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q et que $A > C_0$, alors on a :*

$$\|Q_m(\Sigma g_1) - Q_m(\Sigma g_2)\|_A \leq C(C_0, A, n, m)(\|g_1\|_A + \|g_2\|_A)^{m-1}\|g_2 - g_1\|_A.$$

et en particulier, $\|Q_m(\Sigma g_1)\|_A \leq C(C_0, A, n, m)\|g_1\|_A^m$, avec la même constante $C(C_0, A, n, m) = 2(\frac{n}{A^2 - AC_0})^m$ que précédemment.

Preuve. On écrit la différence $Q_m(g_1) - Q_m(g_2)$ comme une somme télescopique et on applique le lemme 2 précédent. □

Lemme 4. *Soit g un élément de ${Pol_n^{(A)}}_0$, on note toujours $Q_m(x) = Q_m(x, \dots, x)$, on suppose que τ (dans la définition de Q_m) est une forme linéaire sur $Pol_n^{(A)}$ vérifiant $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q et que $A > C_0$. On suppose de plus que $||g||_A < \frac{A^2 - AC_0}{n}$. Alors la série de terme général $\frac{(-1)^m}{m} Q_m(\Sigma g)$ $(m \geq 1)$ converge dans $Pol_n^{(A)}$, et si l'on pose :*

$$Q(\Sigma g) := \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m} Q_m(\Sigma g)$$

on a $Q(\Sigma g) = (1 \otimes \tau + \tau \otimes 1)\, Tr \log(1 + \mathcal{J}D\Sigma q)$, où le terme de droite se comprend au sens du calcul fonctionnel. De plus, la condition de Lipschitz suivante est vérifiée :

$$||Q(\Sigma g) - Q(\Sigma f)||_A \leq 2||f - g||_A \frac{n}{A^2 - AC_0} \frac{1}{1 - \frac{n}{A^2 - AC_0}(||f||_A + ||g||_A)}$$

dès que g et f sont de norme $||.||_A$ strictement inférieure à $\frac{1}{2}\frac{A^2 - AC_0}{n}$.

Preuve. D'après le lemme 3, on a $\|Q_m(\Sigma g)\|_A \leq 2(\frac{n}{A^2 - AC_0})^m \|g\|_A^m$. Par hypothèse, $||g||_A < \frac{A^2 - AC_0}{n}$, si bien que la série de terme général $\frac{(-1)^m}{m} Q_m(\Sigma g)$ converge absolument dans l'espace de Banach $Pol_n^{(A)}$.

Pour l'égalité $Q(\Sigma g) = (1 \otimes \tau + \tau \otimes 1)\mathrm{Tr} \log(1 + \mathcal{J}D\Sigma q)$, on peut raisonner ainsi : la condition $||g||_A < \frac{A^2 - AC_0}{n}$ entraîne que $||\mathcal{J}Dg||_{A'} \leq \frac{A}{(A - A')^3}\frac{A^2 - AC_0}{n}$ pour tout $0 < A' < A$ d'après l'inégalité de Cauchy pour $\mathcal{J}D$. Ainsi, pour A' suffisamment petit, on a $||\mathcal{J}Dg||_{A'} < 1$, et on peut utiliser le développement en série entière de $\log(1 + x)$ pour obtenir l'égalité voulue dans $Pol_n^{(A')}$. Comme le terme de gauche de l'égalité appartient en fait à $Pol_n^{(A)}$ et que $Pol_n^{(A)} \subset Pol_n^{(A')}$, l'égalité vaut dans $Pol_n^{(A)}$.

Enfin, pour la constante de Lipschitz, il suffit d'utiliser terme à terme le lemme 3, on obtient :

$$||Q(\Sigma g) - Q(\Sigma f)||_A \leq \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} ||Q_m(\Sigma g) - Q_m(\Sigma f)||_A \leq$$
$$\leq 2 \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} (\frac{n}{A^2 - AC_0})^m (\|g\|_A + \|f\|_A)^{m-1} \|f-g\|_A$$
$$\leq 2||f-g||_A \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m} (\frac{n}{A^2 - AC_0})^m (||f||_A + ||g||_A)^{m-1}$$
$$\leq 2||f-g||_A \frac{n}{A^2 - AC_0} \frac{1}{1 - \frac{n}{A^2-AC_0}(||f||_A + ||g||_A)}$$

$\square$

Les autres termes de l'équation de point fixe 18 se contrôlent facilement :

Lemme 5. *Pour tout f, g dans ${Pol_n^{(A)}}_0$ on a :*

$$||W(X + D\Sigma g) - W(X + D\Sigma f)||_A \leq ||\partial W||_{A\otimes_\pi A} ||D\Sigma g - D\Sigma f||_A$$
$$\leq ||\partial W||_{A\otimes_\pi A} ||g - f||_A$$

et

$$||D\Sigma g \# D\Sigma g - D\Sigma f \# D\Sigma f||_A \leq ||D\Sigma g - D\,\Sigma f||_A (||D\Sigma g||_A + ||D\Sigma f||_A) = (||f||_A + ||g||_A)||g - f||_A$$

Preuve. La première inégalité est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis, puis de l'identité $D\Sigma q = \frac{1}{\deg q} Dq$ pour q monôme (qui assure que $D\Sigma$ est une contraction). La seconde inégalité est élémentaire. $\square$

On peut maintenant contrôler tout le terme de droite dans l'équation 18.

Proposition 8. *Soit W un polynôme dans Pol_n. On définit la fonction*

$$H(g) := (1 \otimes \tau_V + \tau_V \otimes 1)(Tr \log(1 + \mathcal{J} D\Sigma\hat{g})) - \frac{1}{2} D(\Sigma\hat{g} \cdot \Sigma\hat{g}) - W(X + D\Sigma\hat{g})$$

Supposons que $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q. Alors pour tout $A > C_0$, H est bien définie sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}\frac{A^2-AC_0}{n}$ dans ${Pol_n^{(A)}}_0$, et y est localement Lipschitzienne :

$$||H(g) - H(f)||_A \leq \left(2\frac{1}{\frac{A^2-AC_0}{n} - (||f||_A + ||g||_A)} + \frac{1}{2}(||g||_A + ||f||_A) + ||\partial W||_{A\otimes_\pi A} \right) ||f - g||_A$$

Résolution de l'équation de point fixe

Proposition 9. *Soit τ une forme linéaire sur Pol_n vérifiant $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q. Soit A tel que $A^2(1 - \frac{C_0}{A}) > 2n$. En particulier, $C_0 < A$, si bien que τ s'étend en une forme linéaire sur $Pol_n^{(A)}$ vérifiant toujours $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q. Alors il existe deux constantes $C_1(n, A, C_0)$ et $C_2(n, A, C_0)$ strictement positives telles* *que pour tout polynôme W de Pol_{n0}, si $||W||_A < C_1$ et $||\partial W||_{Pol_n^{(A)}\otimes_\pi Pol_n^{(A)}} < C_2$, l'équation de point fixe :*

$$\mathcal{S}\Pi\mathcal{N}g = \mathcal{S}\Pi\left(1\otimes\tau+\tau\otimes 1)\, Tr\log(1+\mathcal{J}Dg) - \frac{1}{2}D\Sigma g\# D\Sigma g - W(X+D\Sigma g)\right) \quad (19)$$

admet une solution g dans l'espace des fonctions analytiques ${Pol_n^{(A)}}_0$. De façon équivalente, si $\hat{g} = \mathcal{N}g$ (i.e. $g = \Sigma\hat{g}$), alors $\hat{g}$ vérifie l'équation de point fixe $\hat{g} = \mathcal{S}\Pi H(\hat{g})$, où H est la fonction définie dans la proposition 8.

Preuve. On veut appliquer un théorème de point fixe dans l'espace des fonctions nulles en zéro, il faut toutefois s'assurer de demeurer dans ce sous-espace à chaque étape de l'itération, et dans ce but il convient de remplacer $g \mapsto F(g)$ par $g \mapsto F(g) - F(g)(0) = \Pi F(g)$ afin d'éliminer le terme constant qui peut apparaître lorsqu'on applique F. Cette élimination ne modifie pas le rapport de Lipschitz, en effet Π est linéaire de norme 1. Il en est de même pour l'opérateur $\mathcal{S}$.

D'après la proposition 8 et la remarque précédente, l'application $\tilde{H} : \hat{g} \mapsto \mathcal{S}\Pi H(\hat{g})$ est bien définie et localement Lipschitzienne sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}\frac{A^2-AC_0}{n}$ dans ${Pol_n^{(A)}}_0$. La constante de Lipschitz de $\tilde{H}$ sur la boule de centre 0 et de rayon r dans ${Pol_n^{(A)}}_0$ est, d'après la proposition 8, inférieure ou égale à

$$\frac{2}{\frac{1}{n}A^2(1-\frac{C_0}{A})-2r} + r + ||\partial W||_{A\otimes_\pi A}$$

C'est une fonction de r continue sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}\frac{A^2-AC_0}{n}[$, qui prend en 0 la valeur

$$\frac{2n}{A^2(1-\frac{C_0}{A})} + ||\partial W||_{A\otimes_\pi A}$$

Cette valeur est strictement inférieure à $1 + ||\partial W||_{A\otimes_\pi A}$ par hypothèse. Il existe donc un réel $r > 0$ (qui ne dépend que de A, C_0, n) et une constante $C_2(A, C_0, n)$ tels que $\tilde{H}$ est de rapport de Lipschitz inférieur à $(1 - C_1)$, où $C_1 = C_1(A, C_0, n)$ est strictement positive, sur la boule de centre 0 et de rayon r dans ${Pol_n^{(A)}}_0$ lorsque $||\partial W||_{A\otimes_\pi A}$ est strictement inférieur à C_2. Comme $\tilde{H}(0) = W$, lorsque $||W||_A$ est strictement inférieur à C_1, on peut appliquer le théorème du point fixe de Picard à la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans le sous-espace des fonctions de ${Pol_n^{(A)}}_0$. □

Existence d'un transport Reformulons la proposition précédente, en fonction de $f = Dg$, et en utilisant les estimées de Cauchy pour les opérateurs D et ∂. Désormais, la loi τ sera la loi semi-circulaire, et $C_0 = 2$.

Théorème 6. *Soit A' tel que $A'^2(1 - \frac{C_0}{A'}) > 2n$. En particulier, $C_0 < A'$, si bien que τ s'étend en une forme linéaire sur $Pol_n^{(A')}$ vérifiant toujours $|\tau(q)| \leq C_0^{\deg q}$ pour tout monôme q. Alors pour tout $A > A'$ il existe une constante $C_3(A, A', n, C_0)$ telle que pour polynôme W de Pol_{n0}, si $||W||_A < C_3$, l'équation (vectorielle)*

$$\mathcal{J}^*((1+\mathcal{J}f)^{-1}) = DV_2(F(X)) = X + f + DW(X+f)$$

admet une solution f dans $(Pol_n^{(A')})^n$. De plus $f = Dg$ pour une fonction g dans ${Pol_n^{(A)}}_0$, et la norme $||f||_{A'}$ de la solution tend vers 0 quand $||W||_A$ tends vers 0.

Preuve. Fixons $A > A'$. Soient C_2 et C_3 les constantes données par la proposition 9 pour $(A' + A)/2$ (et n, C_0). D'après les inégalités de Cauchy pour D et $\mathcal{J}$, on peut trouver une constante $C_3(A, A')$ telle que la minoration $||W||_A < C_3$ garantisse d'avoir $||W||_{(A+A')/2} < C_2$ et $||\partial W||_{(A+A')/2 \otimes_\pi (A+A')/2} < C_3$. Soit g la solution dans $Pol_n^{(A+A')/2}$ donnée par la proposition 9, l'équation qu'elle satisfait implique (par construction, valable seulement dans le cas de la loi semi-circulaire) que son gradient $f = Dg$ vérifie l'équation vectorielle $\mathcal{J}^*((1 + \mathcal{J}f)^{-1}) = DV_2(F(X)) = X + f + DW(X + f)$. De plus f est dans $(Pol_n^{(A')})^n$ car f est dans $Pol_n^{(A+A')/2)}$ et $A' < (A + A')/2$. Enfin, il est clair que la solution g tend, en norme, vers zéro quand W tend vers zéro, donc c'est aussi le cas de $f = Dg$ (toujours par inégalité de Cauchy). □

2.7 Conséquences

L'équation $\mathcal{J}^*((1 + \mathcal{J}f)^{-1}) = DV_2(F(X)) = X + f + DW(X + f)$ est équivalente à l'équation de Schwinger-Dyson pour le potentiel V_2, à condition que $1 + \mathcal{J}f$ soit inversible, ce qui est vérifié en particulier quand f est petit, condition qu'entraîne la petitesse de W d'après la conclusion du théorème précédent. De plus, pour W petit (i.e. V_2 est une petite perturbation du potentiel quadratique), il existe une unique solution τ_{V_2} à la l'équation de Schwinger-Dyson associée à V_2, c'est la "loi de Gibbs libre" associée à V_2 (voir le paragraphe 2.3 et [GS09]). Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Théorème 7. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables semi-circulaires libres, et $A > A'$ deux réels assez grands. Il existe une constante C ne dépendant que de n, A et A' telle que si W est un polynôme de Pol_n de norme $||W||_A$ inférieure à C, alors il existe une fonction G dans $Pol_n^{(A)}$ telle que le vecteur $(Y_1, \ldots, Y_n) := DG$, vu comme vecteur d'éléments de $Pol_n^{(A')}$, a pour loi la loi de Gibbs libre τ_{V_2} associée au potentiel $V_2(X) = \frac{1}{2}X \cdot X + W(X)$. De plus, la matrice $\mathcal{J}DG$ est strictement positive, comme petite perturbation de la matrice identité. Enfin, la différence $||X_j - Y_j||_{A'}$ tend vers 0 avec la norme $||W||_A$.*

D'après le théorème des fonctions implicites évoqué dans la proposition 4, le vecteur $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ est inversible (au sens où l'on peut obtenir X comme $H(Y)$, où H est un vecteur de fonctions analytiques) dès que l'on peut contrôler $(\mathcal{J}(Y - X)(0))^{-1}(Y - X))$ et pour $\mathcal{J}(Y - X)$ suffisamment petit, et à condition que Y soit nul en zéro. On a donc :

Théorème 8. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables semi-circulaires libres, et $A > A'$ deux réels assez grands. Il existe une constante C ne dépendant que de n, A et A' telle que si W est un polynôme de Pol_n de norme $||W||_A$ inférieure à C, alors il existe une fonction G dans $Pol_n^{(A)}$ telle que le vecteur $(Y_1, \ldots, Y_n)$, vu comme vecteur d'éléments de $Pol_n^{(A')}$, a pour loi la loi de Gibbs libre τ_{V_2} associée au potentiel $V_2(X) = \frac{1}{2}X \cdot X + W(X)$. De plus $X = H(Y)$ pour un certain vecteur de fonctions analytiques dans $Pol_n^{(A')}$. En particulier, il existe un isomorphisme préservant la trace entre les C^*-algèbres (et les W^*-algèbres) engendrées par τ_{V_1} et τ_{V_2}.*

Preuve. On sait que pour W assez petit, $||Y - X||_{(A+A')/2}$ devient petit, en particulier on peut contrôler $||Y(0)||_{(A+A')/2}$ pour $||W||_A$ assez petit. Retranchons $Y(0)$ à Y, si bien qu'on obtient un vecteur $\tilde{Y}$ nul en zéro. On peut rendre $||\mathcal{J}(\tilde{Y} - X)||_{(A+A')/2}$ et $||\tilde{X} - X||_{(A+A')/2}$ arbitrairement petits en choisissant $||W||_A$ suffisamment petit, si bien que le vecteur $\tilde{Y}$ appartient à $\Omega_{C,D,(A'+A)/2,A'}$ (notation de la proposition 4) pour D fixé et C arbitrairement proche de zéro. On peut alors inverser le vecteur $\tilde{Y}$ (donc le vecteur Y) en l'exprimant comme $X = H(Y)$ via un vecteur H d'éléments de $Pol_n^{(A')}$. $\square$

Une application Si la loi de Gibbs libre associée à un potentiel V peut dans certains cas être obtenue comme mesure limite des mesures spectrales de matrices hermitiennes aléatoires, l'unicité de la solution à l'équation de Schwinger-Dyson associée à $\frac{1}{2}X^2 + W(X)$ pour W petit en norme analytique permet de traiter le cas de loi de Gibbs libres définies de façon abstraites.

Proposition 10. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires non-commutatives de loi τ, et supposons que $\xi_j = \partial_j^*(1 \otimes 1)$ existe et appartient à $Pol_n^{(A)}$ pour un certain A assez grand (comme dans le théorème précédent 8). Si tous les $||\xi_j - X_j||_A$ $(j = 1 \ldots n)$ sont assez petit qu'une constante ne dépendant que de A et n, alors la C^*-algèbre (resp. l'algèbre de Von Neumann) engendrée par $X_1, \ldots X_n$ est isomorphe à la C^*-algèbre (resp. l'algèbre de Von Neumann) du groupe libre à n éléments.*

Preuve. Définissons une fonction $V(X_1, \ldots, X_n) := \Sigma\left(\sum_{j=1}^n X_j \xi_j\right)$ (le premier symbole Σ désigne ici l'opérateur défini sur $Pol_n^{(A)}$), qui appartient à $Pol_n^{(A)}$ vu l'hypothèse sur les ξ_j. Il s'agit d'abord de vérifier que la loi de Gibbs libre associée à V est bien la loi τ des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$: on utilise pour cela le lemme suivant qui permet d'identifier DV :

Lemme 6 (Voiculescu [Voi00])**.** *Si $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes de Pol_n tels que $\sum_{1 \le j \le n} [X_j, P_j] = 0$, alors $D(\sum_{1 \le j \le n} P_j X_j) = (\mathcal{N} + \ Id) P_j$*

Ce lemme s'étend au cas où $P_1, \ldots, P_n$ sont en fait des fonctions analytiques dans $Pol_n^{(A)}$ car la preuve est purement combinatoire et consiste à travailler monôme par monôme. Il reste à vérifier que $\sum_{1 \le j \le n} [\xi_j, X_j]$ est nul pour $\xi_j = \partial_j^*(1 \ \otimes 1)$, ce qui est vrai d'après le corollaire 5.12 de [Voi99]. En utilisant ce résultat et l'identité $\Sigma \circ D = D \circ \Sigma + \Sigma \circ D \circ \Sigma$ on peut alors identifier la loi de Gibbs libre associée à V et la loi de $X_1, \ldots, X_n$ (au moins dans les cas où l'équation de Schwinger-Dyson a une unique solution). Il est par ailleurs clair que si $||X_j - \xi_j||_A$ est petit uniformément en j, alors $||W||_A$ est petit, et l'on peut alors appliquer le théorème 8. $\square$

En particulier, cela permet à Guionnet et Shlyakhtenko de répondre, pour de petites valeurs de q, à la question, ouverte depuis 20 ans, de la classe d'isomorphisme des algèbres q-gaussiennes. Dans l'article [BS91], Bozejko et Speicher ont introduit une classe d'algèbres de Von Neumann, paramétrées par un réel $q \in [-1, 1]$. Pour $q = 1$, on obtient l'algèbre de Von Neumann (abélienne) engendrée par des variables aléatoires gaussiennes, et pour $q = 0$ on obtient une famille de variables aléatoires semi-circulaires. Pour q général, une longue série d'articles (voir les références de [GS12]) ont progressivement permis de démontrer certaines propriétés de ces algèbres (propriétés valables soit pour q assez petit, soit pour tout q). D'après [Dab10], on peut satisfaire aux hypothèses de la proposition 10 pour q assez petit, ce qui entraîne que pour tout q assez petit les algèbres q-gaussiennes sont en fait isomorphes à l'algèbre de Von Neumann engendrée par une famille de variables semicirculaires libres.

Annexe : Produits tensoriels min et max et produit libre plein

Définition 14 (Produit tensoriel projectif d'algèbres de Banach)**.** *Soit X et Y deux algèbres de Banach sur $\mathbb{C}$. On appelle produit tensoriel projectif (ou produit tensoriel minimal) de X et de Y l'algèbre de Banach obtenue par complétion du produit tensoriel algébrique $X \otimes_{alg} Y$ pour la norme :*

$$||a||_{X\otimes_\pi Y} := \inf\{\sum_k ||x_k||_X||y_k||_Y \mid \sum_k x_k \otimes y_k = a\}$$

Il est faux en général que $L^\infty(X \times X)$ coïncide avec le produit tensoriel algébrique $L^\infty(X) \otimes_{alg} L^\infty(X)$ (pour X espace mesuré). De la même façon, l'égalité $C(X) \otimes_{alg} C(X) = C(X \times X)$ est fausse en général (l'inclusion $\subset$ est bien sûre toujours vraie). Cependant, il suffit de compléter le produit tensoriel pour obtenir l'égalité. Le produit tensoriel minimal est en fait la "plus grande complétion", mais il suffit de compléter *a minima* en considérant le produit tensoriel...maximal !

Définition 15 (Produit tensoriel maximal de C^*-algèbres)**.** *Soit C_1 et C_2 deux C^*-algèbres. On appelle produit tensoriel maximal de C_1 et C_2 la C^*-algèbre obtenue par complétion du produit tensoriel algébrique $C_1 \otimes_{alg} C_2$ pour la norme :*

$$||a||_{C_1\otimes_{\max}C_2} := \sup\{||\pi(a)||_{B(H)} \mid \pi : C_1\otimes_{alg}C_2 \to B(H) \textit{ morphisme d'algèbres unitaires}\}$$

Par exemple $C(X) \otimes_{max} C(X) \cong C(X \times X)$ pour X métrique compact.

Dans la situation non-commutative, on a considéré le :

Définition 16 (Produit libre plein)**.** *Soit C_1 et C_2 deux C^*-algèbres. On appelle produit libre plein la complétion de leur produit libre algébrique pour la norme*

$$||a||_{C_1\star C_2} := \sup\{||\pi(a)||_{B(H)} \mid \pi : C_1 \star_{alg} C_2 \to B(H) \textit{ morphisme d'algèbres unitaires}\}$$

Références

[Amb03] Luigi Ambrosio. Lecture notes on optimal transport problems. In *Mathematical aspects of evolving interfaces (Funchal, 2000)*, volume 1812 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–52. Springer, Berlin, 2003.

[Bia03] Philippe Biane. Logarithmic Sobolev inequalities, matrix models and free entropy. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 19(3) :497–506, 2003. International Workshop on Operator Algebra and Operator Theory (Linfen, 2001).

[Bla06] B. Blackadar. *Operator algebras*, volume 122 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Bre91] Yann Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(4) :375–417, 1991.

[BS91] Marek Bożejko and Roland Speicher. An example of a generalized Brownian motion. *Comm. Math. Phys.*, 137(3) :519–531, 1991.

[BS01] Philippe Biane and Roland Speicher. Free diffusions, free entropy and free fisher information. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, 37(5) :581 – 606, 2001.

[BV01] P. Biane and D. Voiculescu. A free probability analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space. *Geom. Funct. Anal.*, 11(6) :1125–1138, 2001.

[Dab10] Yoann Dabrowski. A free stochastic partial differential equation. *arXiv.org :1008 :4742*, 2010.

[GMS06] Alice Guionnet and Edouard Maurel-Segala. Combinatorial aspects of matrix models. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1 :241–279, 2006.

[GS09] A. Guionnet and D. Shlyakhtenko. Free diffusions and matrix models with strictly convex interaction. *Geometric And Functional Analysis*, 18 :1875–1916, 2009.

[GS12] A. Guionnet and D. Shlyakhtenko. Free monotone transport. *arXiv.org :1204.2182*, April 2012.

[Gui09] Alice Guionnet. *Large random matrices : lectures on macroscopic asymptotics*, volume 1957 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[NS06] Alexandru Nica and Roland Speicher. *Lectures on the combinatorics of free probability*, volume 335 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[VDN92] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. *Free random variables*, volume 1 of *CRM Monograph Series.* American Mathematical Society, 1992.

[Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Voi99] Dan Voiculescu. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. VI. Liberation and mutual free information. *Adv. Math.*, 146(2) :101–166, 1999.

[Voi00] Dan Voiculescu. A note on cyclic gradients. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3) :837–841, 2000.