1 Mesures - Intégration

1.1 Exemples

Remarques diverses :

– La projection d'une tribu n'est pas une tribu : prendre $E = \{0,1\}^2$ quatre points sommets d'un carré, et la tribu formée de $\emptyset$, E, d'un sommet et des trois autres. L'une des projections donne alors $\emptyset, \{0,1\}, \{0,1\}, \{0\}$ ce qui ne forme pas une tribu.

– Il n'existe pas de mesure de masse finie non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation.

1.2 Exemples

Remarque sur l'unicité de la mesure. Si $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $\mathcal{C}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ stable par intersection finie et telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, et si μ et ν sont deux mesures coïncidant sur $\mathcal{C}$ et vérifiant de plus :

1. $\mu(E) = \nu(E) < +\infty$, alors $\mu = \nu$.
2. Si on dispose simplement d'une suite croissante E_n de parties mesurables telle que $\bigcup E_n = E$ et $\mu(E_n) = \nu(E_n) < +\infty$ pour tout n, alors $\mu = \nu$

Cette conséquence du lemme des classes monotones (qui dit que la classe monotone engendrée par une famille stable par intersections finies coïncide avec la tribu engendrée par cette famille) entraîne l'unicité de la mesure de Lebesgue (cas 2.), où encore le fait qu'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est caractérisée par la mesure des intervalles $]-\infty, a]$.

Les hypothèses ne sont pas trop fortes : si on omet de demander $\mu(E) = \nu(E)$ au 1., un contre-exemple est donné par $\mu = \delta_0$ et $\nu = 2\delta_0$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, qui coïncident sur l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Cette famille d'intervalles est bien stable par intersection finie, et la tribu qu'elle engendre est bien $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$, cependant $\nu \neq \mu$ (même si ces deux mesures sont finies).

2 Convergence dominée

2.1 Exemples

Lemme de Scheffé. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions mesurables positives $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $f_n \xrightarrow{\mu} f$, avec f intégrable, et si $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$ alors $\int |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$ (ce qui est en général faux, seule l'autre implication est vraie). Preuve :

On écrit $f_n + f = f_n \vee f + f_n \wedge f$, et on remarque que $\int f_n \vee f d\mu \longrightarrow \int f d\mu$ par convergence dominée. Donc $\int f_n \max f d\mu \longrightarrow \int f d\mu$. En écrivant $f_n \wedge f = \frac{1}{2}|f_n - f| + f + f_n$, on obtient bien $\int |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$. Quelques remarques :

– On peut remplacer la condition "f_n positive" par la condition d'appui : $f_n \geq g$ avec g intégrable (poser $h_n = f_n - g$ qui est bien positive). On a besoin de cette hypothèse dans l'application du théorème de convergence dominée, il faut pouvoir écrire $|f_n \vee f| \leq f +$ qqch d'intégrable. Sinon, on a le contre-exemple du "grand écart russe", deux créneaux (largeur $1/n$ et hauteur n) qui se compensent (en haut et en bas), qui tendent vers 0 μ-presque partout, dont l'intégrale

toujours nulle tend vers celle de la fonction nulle, mais pour lesquels l'intégrale du module vaut 2.
- Il y a une vision "graphique" de Scheffé qui traduit la démonstration.

2.2 Contre-exemples utiles

- La bosse glissante : une bosse de masse constante qui part à l'infini.
- L'escalier belge : une vague de masse infinie qui débute de plus en plus loin.
- Le puits infini : une montagne de hauteur n et de largeur $\frac{1}{n}$ qui s'écrase en 0.
- Le stroboscope infernal : un éclairage de taille a_n qui se déplace le long de $[0,1]$ modulo 1, avec la série des a_n qui diverge (ex. $a_n = \frac{1}{n}$).
- Le chameau élastique : une bosse fixe de masse 1 et une bosse jumelle mouvante qui s'éloigne.

Utilisons les pour former des contre-exemples :

1. Théorème de convergence monotone. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives alors $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.
   (a) Evidemment, si la suite n'est pas croissante, n'importe quel contre-exemple fonctionne (par exemple le puits infini droit).
   (b) On peut remplacer, comme dans le Lemme de Scheffé, la condition "positives", par une condition d'appui $f_n \geq g$ intégrable (quitte à considérer $h_n = f_n - g$). En particulier, il suffit que l'une des fonctions soit intégrable (puis on utilise la croissance).
   (c) Sans cette hypothèse d'"appui intégrable", prendre $f_n = -\frac{1}{n}$ contredit la conclusion.
2. Lemme de Fatou : si les fonctions f_n sont mesurables, positives, alors $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.
   (a) Si les fonctions ne sont pas positives : prendre un puits infini inversé. Alors $\liminf f_n = 0$ mais $\int f_n = -1$.
   (b) Il n'y a pas forcément égalité, même si $f_n \geq 0$: prendre un puits infini droit ou une bosse glissante. Alors $\liminf f_n = 0$ mais $\int f_n = 1$: l'intégrale est constante mais la fonction s'écrase.
   (c) Application du Lemme de Fatou : Soit f_n une suite de fonctions positives intégrables qui converge (μ-p.p.) vers f, avec de plus $\int f_n \longrightarrow 1$, alors f est intégrable et $\int f \leq 1$. Mais il n'y a pas forcément égalité, on peut choisir par exemple $\int f = \frac{1}{2}$, pour cela, prenons le chameau élastique de masse 1.
3. Théorème de convergence dominée : si les f_n sont mesurables, dominées (μ-p.p) (en <u>module</u>) par g intégrable et si $f_n \longrightarrow f$ (μ-p.p.) alors $\int |f_n - f| \longrightarrow 0$
   (a) Si l'on oublie l'hypothèse de domination, on peut prendre le puits infini droit (sans aucune domination) ou le puits infini inversé (si l'on omet de mettre un module).
   (b) L'hypothèse de convergence μ-presque partout de f_n vers f n'est pas essentielle.
   (c) On a même : $\int |f_n - f| \longrightarrow 0$.
4. On peut construire, à l'aide du stroboscope, une suite de fonctions positives continues sur $[0,1]$, bornées par 1, telle que $\lim f_n \longrightarrow 0$ avec la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeant nulle part.

2.3 Lemme de Borel-Cantelli

Si A_n est une suite de parties mesurables de E telles que $\sum \mu(A_n) < \infty$ alors $\mu(\limsup(A_n)) = 0$ (autrement dit il n'y a μ-presque aucun élément qui appartient à une infinité de A_n). Différentes preuves de B-C :

1. "À la main". Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\mu(\bigcup\limits_{k\geq N} A_k) \leq \sum_{k\geq N} \mu(A_k) \leq \epsilon$. Mais alors $\mu(\bigcap\limits_{n\geq 1}\bigcup\limits_{k\geq n} A_k) \leq \mu(\bigcup\limits_{k\geq N} A_k) \leq \epsilon$.
2. Par un théorème de convergence dominée en utilisant le cours. On définit la suite de fonctions mesurables $f_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$, qui est une suite croissante de fonctions positives et intégrables (puisque $\int f_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$). La limite est donc intégrable, et une remarque du cours fait observer que si f est positive et intégrable, alors $\mu\{x, f(x) = +\infty\} = 0$ (c'est l'inégalité de Markov). Or ici $f(x) = +\infty$ si et seulement si x appartient à une infinité de A_k, ce qui conclut.

2.4 Applications du lemme de Borel-Cantelli

- Soit $\epsilon > 0$. Pour presque tout $x \in [0,1]$, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. En effet, la somme des mesures des intervalles $A_pq =]\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}[$ converge.

2.5 Il n'existe ni tribu, ni topologie qui soient infinies dénombrables

Soit E un espace muni de $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ qui désignera soit une tribu de E soit une topologie sur E caractérisée par l'ensemble des fermés de E (qui est par passage au complémentaire en bijection avec l'ensemble des ouverts de E). On définit dans tous les cas l'atome engendré par $x \in E$ comme $\dot{x} = \bigcap_{A\in\mathcal{B}, x\in A} A$. Comme $A = \bigcup_{x\in A} \dot{x}$ et que les atomes forment une partition de E, $\mathcal{B}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\{\dot{x}, x \in E\})$. S'il y a un nombre fini d'atomes, $\mathcal{B}$ est fini, et s'il y a un nombre infini (au moins dénombrable) d'atomes alors $\mathcal{B}$ est de cardinal supérieur ou égal à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc $\mathcal{B}$ n'est pas dénombrable.

2.6 Théorème de récurrence de Poincaré

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application mesurable sur un espace E mesurable de mesure finie ($\mu(E) < \infty$), qui conserve la mesure ($\mu(f^-1(A)) = \mu(A)$ pour tout partie mesurable A). Alors pour toute partie mesurable A et pour tout μ-presque tout point $x \in A$, il existe une infinité d'itérés de x par f qui reviennent dans A.

Idée de la preuve : la masse de l'espace étant finie il ne peut y avoir une infinité de parties disjointes de même mesure non nulle.

2.7 Théorème d'Egoroff

Soit E un espace mesurable et μ une mesure finie sur E, soit f_n une suite de fonctions réelles mesurables sur E convergeant μ-presque partout vers f réelle mesurable. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie A mesurable telle que $\mu(A) < \epsilon$ et telle que la convergence soit uniforme sur $E - A$.

Preuve : on montre la convergence uniforme à $\frac{1}{k}$ près pour un espace de “co-mesure” aussi petite que l'on veut à partir d'un certain rang :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \eta > 0,\ \exists n \geq 1,\ \mu(\bigcup_{j \geq n} \{x \in E, |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}) \leq \eta$$

Pour cela on introduit A_{nk} l'ensemble considéré et on montre que, à k fixé, la suite $(A_{nk})_n$ est décroissante, d'intersection totale vide, donc il existe un rang à partir duquel $\mu(A_{nk}) < \eta$. Pour conclure, on choisit $\eta = 2^{-k} \times \epsilon$.

Un contre-exemple en mesure infinie est celui de $f_n = \mathbf{1}_{[n,+\infty[}$.

Application : en mesure finie, on peut toujours réduire l'étude de la convergence à un espace de “co-mesure” aussi petite qu'on veut et sur lequel la convergence est uniforme, par exemple quand on se ramène au cas de fonctions étagées qui convergent vers la fonction mesurable considérée.

2.8 Uniforme continuité de l'intégrale - Dépasser Markov

Si $f = (E, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, alors :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall A \text{ mesurable},\ \mu(A) < \eta \Longrightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$$

Choisissons pour simplifier $\int |f| d\mu = 1$. L'inégalité de Markov nous donne $\forall M > 0, \mu\{x, |f(x)| > M\} < 1/M$, mais on ne peut pas conclure avec ça.

Il faut dépasser Markov (qui ne donne des renseignements que ponctuellement, ou pour passer à la limite, mais qui ne permet pas de majorer l'intégrale d'une partie autrement que par l'intégrale totale). En utilisant la remarque suivante :

> Remarque : Pour une fonction intégrable au sens de Riemann, on a : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \epsilon$. Pour Lebesgue, une application du théorème de convergence dominée donne $\int_{|f(x)|>M} |f(x)| dx < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. On peut choisir N assez grand tel que $\int_{\{x, |g(x)| \geq n\}} |g| d\mu \leq \epsilon/2$. Mais alors, avec $\delta = \epsilon/2N$, on a pour tout partie A mesurable de mesure plus petite que δ :

$$\int_A |f| d\mu \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

On peut également (c'est sensiblement la même chose) utiliser une comparaison série-intégrale qui commencerait ainsi : Posons $A_n = \{x, 2^n \leq |f(x)| \leq 2^{n+1}$, remarquons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n)$ converge, car minore $\int |f| d\mu$. Ainsi : il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $\sum_{|n| \geq N} 2^n \mu(A_n) \leq \epsilon \ldots$

2.9 Convergence en mesure

On se place en mesure finie μ sur E. Soit f_n et f des fonctions mesurables, on dit que f_n converge vers f en mesure si pour tout $\epsilon > 0$, on a : $\mu\{x, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors la convergence en norme 1, la convergence simple entraînent la convergence en mesure, mais la réciproque est fausse (prendre d'abord une fonction qui converge simplement μ-p.p. mais pas en norme 1 comme le puits infini, prendre ensuite le stroboscope infernal).

Si f_n converge vers f en mesure, on peut quand même extraire de f_n une suite qui converge vers f μ-p.p. Pour cela, on considère une suite n_k strictement croissante telle que $\mu(A_{n_k} = \{x, |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}|\} < 2^{-k}$, la série de terme général $\mu(A_{n_k})$ converge, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli la suite f_{n_k} converge μ-p.p. vers f. On montre un théorème de convergence dominée : si f_n converge en mesure vers f en étant dominée (μ-p.p.) par une fonction g intégrable pour tout n, alors

$$\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve : soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mu\{x, |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\epsilon$. Mais alors pour n supérieur à N on a :

$$\int_E |f_n - f| d\mu \leq (\epsilon \int_E |g|) + (\mu(E)\epsilon)$$

(Il faut remarquer que f est elle aussi dominée par g μ-p.p. par extraction d'une sous-suite).

Remarques supplémentaires : on peut métriser la convergence en mesure par $\delta(f, g) = \inf\{\epsilon, \mu\{|f - g| > \epsilon\} \ \leq \epsilon\}$, qui rend l'espace $\mathbb{L}^0$ des fonctions mesurables (quotienté par l'égalité μ-p.p.) complet, mais on ne peut pas métriser la convergence μ-p.p. : il existe d'après ce qui précède une suite (ex. stroboscope infernal) qui converge en mesure mais pas μ-p.p., une telle suite resterait à distance (μ-p.p.) strictement $> \epsilon$ de sa limite tandis qu'une de ses sous-suites convergerait, donc serait à distance $< \epsilon/2$, absurde.

3 Mesure de Lebesgue - Espaces L^p

3.1 Questions de régularité

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure $< \epsilon$: indexer les rationnels par q_n et prendre des intervalles ouverts de taille $2^{-(n+1)}\epsilon$ autour de chaque r_n.

- Un ouvert de mesure finie non bornée de : voir question précédente.
- Un borélien de mesure strictement positive et d'intérieur vide : les irrationnels.
- Un ouvert dense de $[0, 1]$ de mesure $\neq 1$: la question précédente intersectée avec $[0, 1]$.
- Deux compacts homéomorphes de mesure différente : plusieurs ensembles de Cantor.
-

3.1.1 Deux preuves du théorème de Lusin

Théorème (Lusin) : si $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie mesurable de mesure inférieure à ϵ sur laquelle f est continue (ou encore il existe g continue coïncidant avec f partout sauf sur un ensemble de mesure inférieure à ϵ

1. On rappelle que les fonctions continues sont denses dans $L^1([a, b])$. Alors, il existe une suite de fonctions continues $\{g_n\}$ telle que $\{g_n\} \to f$ dans L^1. De cette suite, on peut extraire une sous-suite $\{g_{n_k}\}$ telle que $g_{n_k} \to f$ presque partout. En utilisant le théorème d'Egoroff (on est bien en mesure finie), on a $g_{n_k} \to f$ en convergence uniforme sauf sur un ensemble de mesure

aussi faible que voulue. Comme l'ensemble des fonctions continues est fermée par convergence uniforme, cela termine la démonstration.

2. Soit f mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées qui converge vers f, donc on peut se ramener à une fonction étagée, donc à une fonction caractéristique d'un borélien. Par régularité de la mesure de Lebesgue, on se ramène à la fonction caractéristique d'un ouvert, donc d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts. Pour chaque intervalle, on peut approximer la fonction caractéristique à 2^{-n} près par une fonction affine donc continue.

3.1.2 Une autre preuve de l'inégalité de Jensen

Théorème (Jensen) Si μ est une mesure de probabilité, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et φ une fonction convexe à valeurs positives, alors

$$\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(\int f d\mu)$$

Preuve du cours : utiliser le fait que pour φ convexe, $\varphi(x) = \sup_{a,b \in \mathcal{E}_\varphi}(ax+b)$ où $\mathcal{E}_\varphi = \{(a,b), \varphi(x) \geq ax + b \; \forall x\}$.

Preuve plus "naturelle" (proche de la preuve pour Riemann / f continue). Supposons φ monotone. Soit f_n une suite monotone de fonctions étagées qui converge (μ-p.p.) vers f, telle que $\varphi \circ f_n \leq \varphi \circ f$ (donc $f_n \leq f$ si φ est croissante et vice-versa). On vérifie l'inégalité de Jensen pour les f_n par simple convexité, en remarquant que μ doit être de masse totale 1 pour appliquer la convexité. Par convergence monotone et continuité de φ on établit : $(\varphi(\int f_n d\mu) \longrightarrow \varphi(\int f d\mu)) \leq \int \varphi \circ f_n \leq (\int \varphi \circ f)$ Plus généralement, φ étant convexe, elle est soit monotone, soit décroissante puis croissante. Dans ce dernier cas, on découpe E en deux parties A_1 et A_2 sur lesquelles φ est monotone. On doit ensuite vérifier que :

$$\varphi\left(\int_E f d\mu\right) = \varphi\left(\int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu\right) = \varphi\left(\mu(A_1) \times \int_{A_1} f \frac{d\mu}{\mu(A_1)} + \mu(A_2) \times \int_{A_2} f \frac{d\mu}{\mu(A_2)}\right)$$

puis par convexité :

$$\varphi\left(\int_E f d\mu\right) \leq \mu(A_1) \times \varphi\left(\int_{A_1} f \frac{d\mu}{\mu(A_1)}\right) + \mu(A_2) \times \varphi\left(\int_{A_2} f \frac{d\mu}{\mu(A_2)}\right)$$

En appliquant ce qui précède aux intégrales sur des mesures de probabilité $\frac{\mu}{\mu(A_1)}$ et $\frac{\mu}{\mu(A_2)}$, on obtient finalement :

$$\varphi\left(\int_E f d\mu\right) \leq \left(\mu(A_1) \times \int_{A_1} \varphi \circ f \frac{d\mu}{\mu(A_1)} + \mu(A_2) \times \int_{A_2} \varphi \circ f \frac{d\mu}{\mu(A_2}\right) = \int_E \varphi \circ f d\mu$$

3.2 L^p

3.2.1 Complétude dans les espaces L^p

Lemme : Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute suite absolument convergente est convergente. Si u_n est une suite de Cauchy, on peut extraire une suite v_n telle que la série

$\sum ||v_{n+1} - v_n||$ converge, donc que $\sum v_{n+1} - v_n$ converge, donc que v_n converge, et une suite de Cauchy dont une sous-suite converge converge.

Soit f_n une suite de L^p telle que $\sum ||f_n||_p < +\infty$. On veut construire une fonction candidate, à savoir $\sum f_n$: problème de convergence. On se ramène à construire la limite pour tout x, pour cela, comme $\mathbb{R}$ est complet, on peut montrer que $\sum |f_n(x)| < +\infty$ presque partout, auquel cas on peut poser $h(x) = \sum f_n(x)$ presque partout. On pose $g_n(x) = \sum^n |f_n(x)|$, soit g la limite de la suite (croissante) g_n : g prend éventuellement des valeurs infinies mais le théorème de convergence monotone est aussi valable dans ce cas. En particulier : $(\int (g_n)^p)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow (\int g^p)^{\frac{1}{p}}$ par convergence monotone, avec $\left(\int (g_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} = ||\sum^n |f_n|||_p \leq \sum^n ||f_n||_p \leq \sum^\infty ||f_n||_p$ (par Minkowski), et finalement en passant à la limite $(\int g^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum ||f_n||_p < +\infty$. Cette inégalité entraîne que $g < +\infty$ μ-p.p. donc que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument vers $h(x)$ μ-p.p. On a bien obtenu notre candidat $h(x)$, il vaut maintenant vérifier la convergence en norme p de $\sum^n f_n$ vers h (il faudrait au préablable étendre la définition de h en posant par exemple $h(x) = 0$ sur l'ensemble de mesure nulle pour lequel la série ne converge pas). Remarquons que $|h(x)| \leq g(x)$ et que par conséquent h est dans L^p.

On utilise pour cela une convergence dominée, mais le TCD ne donne habituellement que $\int |s_n - s| \longrightarrow 0$ et pas $\int |s_n - s|^p$. On doit considérer la suite de fonctions $|\sum^n f_n(x) - h(x)|^p$, qui tend μ-p.p. vers 0, et qui est dominée comme suit :

$$|\sum^n f_n(x) - h(x)|^p \leq (\sum^n |f_n(x)| + |h(x)|)^p \leq (2|g(x)|)^p \leq 2^p |g(x)|^p$$

La fonction g étant dans L^p, la fonction g^p est dans L^1, et une application du théorème de convergence dominée conclut à $\int |f_n(x) - h(x)|^p \longrightarrow 0$, puis $||f_n - h||_p \longrightarrow 0$.

Deux remarques :

1. Si la série de terme général f_n converge normalement (pour la norme L^p), on a vu que la série de terme général f_n converge μ-p.p. normalement au sens usuel, i.e. $\sum |f_n(x)| < \infty$.
2. Si f_n est une suite de Cauchy dans L^p, on peut extraire une suite telle que $\sum ||v_{n+1} - v_n||_p$ converge, donc d'après la remarque précédente la suite v_n admet une limite simple μ-p.p.

3.2.2 Théorème de Radon-Nikodym

On peut toujours comparer deux mesures (σ-finies) μ et ν en décomposant ν (de façon unique) comme la somme d'une mesure absolument continue par rapport à μ et d'une mesure étrangère à μ (i.e. il existe une partie mesurable qui comporte toute la masse de μ et dont le complémentaire contient toute la masse de l'autre mesure).

Pour la preuve, on étudie d'abord le cas où $\nu \leq \mu$ (auquel cas $\nu << \mu$), et on utilise le caractère "Espace de Hilbert" de $L^2(E)$ pour trouver une fonction h de carré intégrable et positive telle que $\nu(A) = \int_A h d\mu$.

Dans le cas général, on étudie ν par rapport à $\mu + \nu$. L'étude précédente fournit un h tel que $\nu(A) = \int_A h(d\mu + d\nu)$. On observe que lorsque h vaut 1, cela correspond à $\mu = 0$ et au fait que ν porte la masse de $\mu + \nu$: la restriction de ν à cet ensemble fournit la partie "étrangère".

On vérifie ensuite que la restriction de ν au complémentaire est bien absolument continue par rapport à μ, en effet si $\mu(A) = 0$ sur une partie A de ce complémentaire, on a $\nu(A) = \int_A h d\nu$ avec $h < 1$ ce qui est absurde sauf si $\nu(A) = 0$ à son tour.

4 Mesures produits

4.1 Propriétés

4.1.1 Identité $B(E_1 \times E_2) = B(E_1) \otimes B(E_2)$

Rappel : $B(E_1 \times E_2)$ est la tribu engendrée par les ouverts de la topologie produit (ici les ouverts élémentaires sont les pavées $Ouvert \times Ouvert$, tandis que $B(E_1) \otimes \cdots \times B(E_k)$ est la plus petite tribu contenant les produits $A_1 \times \cdots \times A_k$, i.e. la plus petite tribu contenant le produit des tribus. On aimerait avoir $B(E_1 \times E_2) = B(E_1) \otimes B(E_2)$. La bonne hypothèse est d'avoir E_1 et E_2 métriques et séparables, afin qu'on puisse recouvrir tout ouvert de façon dénombrable par des pavés.

Preuve : $B(E_1) \otimes B(E_2) \subset B(E_1 \times E_2)$. Pour cela on doit remarquer que $B(E_1) \otimes B(E_2)$ est aussi la plus petite tribu rendant mesurables les projections : si A_i est une partie mesurable de E_i alors $\pi_i^{-1}(A_i) = E_1 \times A_i \times \cdots \times E_k$ qui est bien mesurable pour la tribu produit. Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est une tribu rendant mesurable les projections, pour tout $A_1 \times \cdots \times A_k$ on a $A_1 \times \cdots \times A_k = \bigcap \pi_i^{-1} A_i$ où les A_i sont mesurables, donc $A_1 \times \cdots \times A_k$ est mesurable. Ainsi la tribu produit est-elle incluse dans $\mathcal{E}$.

Réciproquement, il s'agit de vérifier que tout ouvert de $E_1 \times E_2$ est inclus dans $B(E_1) \otimes B(E_2)$. Pour cela, on utilise la séparabilité : si (x_n, y_n) est une suite dense, alors quitte à mettre sur $E_1 \times E_2$ la distance produit (qui induit bien la topologie produit), on dispose d'une base dénombrable d'ouverts de la forme $Ouvert \times Ouvert$. Tout ouvert de $E_1 \times E_2$ est alors union dénombrable de tels ouverts, donc appartient à $B(E_1) \otimes B(E_2)$ (car les ouverts sont mesurables pour $B(E_1)$ et $B(E_2)$, donc le produit de deux ouverts est bien dans $B(E_1) \otimes B(E_2)$.

4.2 Fubini

4.3 Construction de la mesure produit

4.3.1 Fibres

Soit E_1, E_2 et $E_1 \otimes E_2$. On veut construire une mesure sur le produit, telle que la mesure du produit de deux pavés soit le produit des mesures des pavés. On introduit d'abord la fibre au-dessus de x pour une partie mesurable $C \subset E_1 \otimes E_2$: $C_x = \{y' \in E_2, (x, y') \in C\}$. Symétriquement, on définit C^y. Propriétés : C_x est une partie mesurable de E_2 et si ν est une mesure finie sur E_2, μ une mesure finie sur E_1, alors l'application qui à x associe la mesure $\nu(C_x)$ est μ-mesurable (en fait il faut surtout ici que ν soit finie, mais on aime avoir la propriété symétrique donc on demande μ et ν finies).

Preuve : on vérifie que l'ensemble des parties C dans $E_1 \otimes E_2$ qui vérifient "C_x est mesurable" est une tribu contenant les pavés, donc coïncide avec $E_1 \otimes E_2$. De même, on considère l'ensemble des parties C de $E_1 \otimes E_2$ telles que $x \mapsto C_x$ soit mesurable. On vérifie qu'il s'agit d'une classe monotone (en particulier pour avoir $\nu(C - C')_x = \nu(C) - \nu(C'_x)$ on a besoin d'avoir ν finie) contenant les pavés (donc contient la classe monotone engendrée par les pavés, qui par application du lemme des classes monotones est $E_1 \otimes E_2$ tout entier).

Remarque : on adapte la preuve au cas σ-fini.

4.3.2 Mesure-produit

On affirme l'existence et l'unicité d'une mesure sur $E_1 \otimes E_2$ telle que $m(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$ où A et B sont mesurables et μ, ν sont des mesures σ-finies. On constate que cette mesure coïncide avec

$$m(C) = \int_{E_1} \mu(dx)\nu(C_x) = \int_{E_2} \nu(dy)\mu(C^y)$$

(Idée : l'aire peut se calculer de deux façons en découpant en rectangles de largeur dx selon les abscisses ou dy selon les ordonnées, et en multipliant par la mesure de la projection selon l'autre axe).

L'unicité découle du lemme des classes monotones. On garantit l'existence en vérifiant que chaque définition avec les intégrales vérifie les hypothèses (elles sont donc égales par unicité) : on définit bien une mesure et la valeur sur les pavés est bien celle voulue.

4.3.3 Théorèmes de Fubini

Théorème pour les fonctions positives : si m désigne la mesure-produit de μ et ν (qui sont donc σ-finies) et si $f : E \times F \longrightarrow [0, \infty]$ est une fonction mesurable, alors les fonctions $x \mapsto \int_F f(x,y)\nu(dy)$ et $y \mapsto \int_E f(x,y)\mu(dx)$ sont mesurables, et on a de plus

$$\int_{E\times F} f(x,y)dm = \int_E (\int_F f(x,y)\nu(dy))\mu(d)x = \int_F (\int_E f(x,y)\mu(dx))\nu(dy)$$

La preuve de la première assertion se fait en se ramenant à des fonctions étagées (la limite de fonctions mesurables étant mesurables), et par linéarité à des fonctions caractéristiques. La preuve de la seconde assertion se fait également en passant par des fonctions étagées (puis convergence monotone des $0 \leq f_n \leq f$ [Rappel : f positive]) (puis deuxième convergence monotone et interversion).

Théorème pour les fonctions intégrables sur $E \times F$: si f est dans $L^1(E \times F, E \otimes F)$ alors :

1. $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable presque partout (idem $x \ \mapsto f(x,y)$
2. La fonction $x \mapsto \int_F f(x,y)\nu(dy)$ est bien définie presque partout, et intégrable.
3. Le calcul de $\int E \times F f(x,y)dm$ peut se faire en intégrant selon l'une puis l'autre coordonnée

Preuve : on applique le théorème précédent à $|f|$, on obtient 1. (remarquons que $y \mapsto f(x,y)$ est mesurable car l'image réciproque d'une partie mesurable par f est une partie mesurable C, et que l'image réciproque de cette même partie mesurable par l'application $y \mapsto f(x,y)$ est exactement C_x, qui est mesurable comme précisé plus haut). Pour obtenir 3., on décompose en $f = f^+ - f^-$.

4.3.4 Convolution

Si f, g sont intégrables, alors leur produit de convolution est bien défini presque partout, et $||f \star g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. C'est une application du théorème de Fubini-Tonnelli.

> Proposition : Si p et q sont conjugués, f est dans L^p et g dans L^q, alors leur produit de convolution est toujours bien défini, uniformément continu et borné par $||f||_p||g||_q$.

Preuve : bonne définition et caractère borné = Hölder. Pour l'uniforme continuité, on procède ainsi :

1. Par Hölder on se ramène à contrôler $||f - f_\epsilon||_p$ où $f_\epsilon(x) = f(x+\epsilon)$ pour ϵ petit.
2. Par densité des fonctions C^∞ à support compact, on se ramène à traiter ces fonctions. Comme elles sont à support compact, leurs dérivées sont bornées, donc elles sont lipschitziennes, et comme leur support est compact la différence $||f_n - f_{n,\epsilon}||_p$ est majorée par $S(n)^{1/p}\delta$ où δ est l'écart maximal pour deux points espacés de ϵ et $S(n)$ est la mesure du support de f_n.

Remarque : si f est dans L^p et g dans L^q, alors $f \star g$ tend vers 0 en $\pm\infty$. On peut par exemple approcher f uniformément par f_n C_c^∞.

Remarque : on a montré la convergence en norme $||.||_p$ de f_ϵ vers f quand $\epsilon \longrightarrow 0$. On a une notion plus faible de convergence, définie par : une suite de fonctions L^p f_n tend vers $f \in L^p$ si pour tout $g \in L^q$, on a $\int f_n(x)g(x) \longrightarrow \int f(x)g(x)$: c'est la convergence relativement au produit scalaire.

4.3.5 Approximation de l'unité

Rappel : une approximation de l'unité est une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$, intégrables de norme L_1 égale à 1, et telles que la masse se concentre en 0 i.e. $\int_{|x|>\delta} f_n(x)dx \longrightarrow 0$. On demande à ce que le support des f_n soit compact et inclus dans un compact K indépendant de n (on peut enlever cette hypothèse, mais on doit remplacer f continue par continue à support compact dans la suite et les résultats suivants deviennent douteux).

On a les deux résultats suivants :

Si f est continue alors $\varphi_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact.

Preuve : on écrit

$$\varphi_n \star f(x) - f(x) = \int \varphi_n(t)(f(x-t) - f(x))dt$$

Soit $\epsilon > 0$ et K' un compact. Par uniforme continuité, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in K'$, avoir $|t| < \eta$ entraîne $|f(x-t) - f(x)| < \epsilon$. Mais alors

$$\forall x \in K, |\varphi_n \star f(x) - f(x)| \leq \int_{|t|<\eta} \varphi_n(t)\epsilon + \int_{|t|\geq\eta} \varphi_n(t)|f(x-t) - f(x)|$$

$$\forall x \in K, |\varphi_n \star f(x) - f(x)| \leq \epsilon + \int_{|t|\geq\eta} \varphi_n(t) \times 2||f||_{\infty, K=\text{supp}(\varphi_n)}$$

Si f est dans L^p (avec p fini), alors $\varphi \star f$ converge vers f en norme $||.||_p$.

Preuve : Il faut d'abord remarquer (ce qui est intéressant), que : $||\varphi_n \star f - \varphi_n \star g||_p \leq ||f - g||_p$, ainsi la multiplication par φ_n est 1-lipschitzienne pour la norme p (appliquer l'inégalité de Jensen en remarquant que $\varphi_n(x-y)dy$ est une mesure de probabilité). On en déduit que l'on peut se ramener par densité (et ici on a besoin d'avoir $p < \infty$ car la densité des fonctions continues à support compact dans L^p n'est vraie que pour $p < \infty$) à f continue à support compact. Soit on plagie la preuve du 1. pour l'adapter au cas de la norme $||.||_p$ pour de telles fonctions, soit on applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $|\varphi_n \star f - f|^p$ qui tend vers 0 presque partout, et qui est dominée par $2^p||f||_\infty^p \mathbf{1}_{\{x,|x|\in K+K'\}}$ (car $|\varphi_n \star f - f|^p \leq \int_K \varphi_n(y)|f(x-y) - f(x)|^p$ avec f nulle en dehors de K' et φ_n nulle en-dehors de K. (En appliquant Jensen une fois encore).

On peut les construire en posant $\varphi_n(x) = n^d\varphi(nx)$ pour $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ d'intégrale 1.

5 Mesures signées

5.1 Définition :

Mesure signée : application des parties mesurables dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\mu(\emptyset) = 0$ et une condition de σ-additivité : si A_n est une famille de parties mesurables disjointes, alors la somme des mesures converge absolument, et la mesure de l'union est la somme de cette série (on a besoin de la convergence absolue pour pouvoir définir la somme de façon univoque et que ça ne dépende pas de l'ordre dans lequel on considère les parties).

De toute mesure signée on peut déduire une vraie mesure $|\mu|$ appelée "mesure variation totale" et notée par $|\mu|(A)|$, qui vaut le supremum des sommes $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)|$ sur toutes les partitions (A_n) de A. Cette vraie mesure $|\mu|$ est une mesure positive finie et telle que $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$. Remarque : cette mesure apparaît naturellement si l'on se pose le problème de déterminer la plus petite mesure positive qui majore μ, i.e. plus grande que $|\mu(A)|$ pour tout A mesurable. On voit que pour toute partition de $A = \bigcup A_n$, on doit avoir $|\mu|(A) = \sum |\mu|(A_n) \leq \sum |\mu|(A_n)$ donc qu'il est agréable de poser $|\mu(A)|$ comme le plus petit des majorants de ces quantités.

5.2 Exemples

Décomposition de Jordan : toute mesure signée se décompose comme différence de de mesure finies positives : $\mu = \mu^+ - \mu^-$ avec $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. De plus, μ^+ et μ^- sont étrangères, on a même $\mu^+ = \mathbf{1}_B|\mu|$ et $\mu^- = \mathbf{1}_{E-B}|\mu|$ (où B est unique à une partie de $|\mu|$-mesure nulle près).

Preuve : comme μ^+ et μ^- sont inférieures à $|\mu|$, le premier cas traité dans la démonstration du théorème de Radon-Nikodym nous apprend qu'il existe h_1 et h_2 deux fonctions mesurables positives (et finies) telles que $\mu^+ = h_1|\mu|$ et $\mu^- = h_2|\mu|$. (Rappel : c'est tout simplement le théorème de représentation de Riesz de toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert comme produit scalaire). On montre ensuite que le support de h_1 et celui de h_2 sont à peu de choses près complémentaires. L'unicité découle de l'unicité "de la densité" dans le théorème de Radon-Nikodym.

On sait alors intégrer par rapport à une mesure signée en décomposant $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

On adapte le théorème de Radon-Nikodym, qui stipule (dans un premier cas) que toutes les mesures absolument continues sont des mesures à densité (mesurable seulement) par rapport à la mesure de référence (à condition qu'elle soit σ-finie !!). Une mesure signée μ est absolument continue par rapport à ν mesure positive σ-finie si seulement si il y a une des deux conditions (équivalentes) suivantes :

- μ est uniformément absolument continue, i.e. $|\mu|(A)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut quelque soit A à condition d'imposer $\nu(A)$ suffisamment petit
- μ dépend de A par une densité signée : $\mu(A) = \int_A h d\nu$ (et en particulier $|\mu|(A) = \int_A |h| d\nu$).

Preuve 1 : si μ est une mesure signée, on la décompose en $\mu^+ - \mu^-$, avec μ^+ et μ^- mesures positives finies, et toujours absolument continues par rapport à μ. D'après le théorème de Radon-Nikodym (cas des mesures positives), il existe h_1 et h_2 des densités pour μ^+ et μ^-, et on trouve $h = h_1 - h_2$ la densité voulue. Attention, Radon-Nikodym cas positif ne donne que des densités mesurables, il faut remarquer ici que les intégrales sont bien finies car μ est une mesure signée donc "finie" en un certain sens (en particulier $|\mu(E)|$ est fini car inférieur à $|\mu|(E)$, cela est vraiment lié au fait qu'on a imposé la convergence absolue de la série).

Preuve 2 : Soit $\epsilon > 0$ fixé. On peut choisir N assez grand tel que $\int_{\{x,|g(x)|\geq n\}} |g|d\mu \leq \epsilon/2$. Mais alors, avec $\delta = \epsilon/2N$, on a pour tout partie A mesurable de mesure plus petite que δ :

$$\int_A |f|d\mu \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

5.3 Application : dualité $L^p - L^q$

Soit ν une mesure positive σ-finie sur E espace mesuré. Pour p fini, et q le conjugué de p, L^q est le dual topologique de L^p, via

$$g \in L^q \mapsto \Phi_g : f \in L^p \mapsto \int fgd\nu$$

Preuve : on sait d'après Radon-Nikodym que toute mesure signée μ absolument continue par rapport à ν est une mesure à densité. Ici on se donne une forme linéaire continue Φ et on cherche à déterminer $g \in L^q$ telle que $\Phi = \Phi_g$ (ça donnera la surjectivité).

Pour cela, on peut vouloir construire une mesure signée μ associée naturellement à Φ, qui donnera une densité (via R-N) candidate. Soit μ une application sur l'ensemble des parties mesurables, définie par $\mu(A) = \Phi(\mathbf{1}_A)$. On vérifie que μ est bien une mesure signée (en particulier il y a une remarque intéressante pour montrer que la série des mesures d'une partition de A converge absolument : on montre que $\mu(A)$ est la limite des sommes partielles pour une certaine indexation de la partition (par convergence dominée et continuité de Φ. Cet argument ne tient plus dans le cas $p = \infty$). Deux arguments se dégagent alors : soit on sépare partie positive et partie négative, soit on dit que $\mu(A)$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a sommé les $\mu(A_n)$, donc que la série est "commutativement convergente" (négation du théorème de Riemann) donc absolument convergente).

On en déduit l'existence d'une fonction g "densité" intégrable telle que $d\mu = gd\nu$, en particulier $\varphi(\mathbf{1}_A) = \int \mathbf{1_A} gd\nu$. L'égalité recherchée

$$\Phi(f) = \Phi_g(f) = \int_E fgd\nu$$

est donc vraie pour les fonctions caractéristiques, pour les fonctions étagées. On peut l'étendre par convergence dominée à des fonctions mesurables bornées. On aimerait l'étendre par passage à la limite (densité des fonctions mesurables bornées), mais rien ne nous dit que $f \mapsto \int_E fgd\nu$ est continue, en particulier rien ne nous dit que g est dans L^q (ce qui est pourtant le résultat demandé, et qui donnerait la continuité via Hölder).

Pour vérifier que g est dans L^q, on distingue $p = 1$ et $p > 1$. Dans le second cas, on utilise fois $f(x) = \text{Signe}(g(x))|g(x)|^{q-1}$ qui est véritablement reliée à g. Comme f n'a aucune raison d'être dans L^p, on borne f (on est en mesure finie) en posant $f_n = \mathbf{1}_{|g|\leq n} f$. Une convergence monotone donne le résultat.

Comme g est dans L^q, la fonction Φ_g est continue tout comme Φ, et elles coïncident sur le sous-espace dense des fonctions mesurables bornées (par exemple continues à support compact, comme $p < \infty$), donc sont égales.