1 Généralités

1.1 À propos de $\mathbb{R}$

On peut construire $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$, qui sont les parties non vides strictes de $\mathbb{Q}$ closes par minorant (si $x \in A$ et $y \leq x$ alors $y \in A$). Grosso modo, $\sqrt{2}$ correspond à la coupure $\{x \in \mathbb{Q}, x < \sqrt{2}\}$ (qui ne peut bien entendu pas être définie ainsi). Par l'injection évidente on identifie $\mathbb{Q}$ à son image dans $\mathbb{R}$, et on obtient rapidement les propriétés importantes de $\mathbb{R}$, comme la propriété de la borne supérieure : on prend P une partie non vide majorée, et on vérifie que $S = \bigcup_{A \in P} A$ est une coupure de $\mathbb{Q}$ et est bien le plus petit des majorant de P ($\mathbb{R}$ étant ici ordonné par l'inclusion), ou encore l'archimédianité de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est complet :

Définition : Espace topologique $(E, \mathcal{O})$ où $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ définit les ouverts, tels que pour $(u_i)_{(i \in I)} \subset \mathcal{O}$,

1. I fini $\Longrightarrow \bigcap_{i \in I} u_i \in \mathcal{O}$ (en particulier $I = \emptyset$ donne, avec $\bigcap_{i \in \emptyset} u_i = E$, que E est ouvert)
2. I quelconque $\Longrightarrow \bigcup_{i \in I} u_i \in \mathcal{O}$ (en particulier $I = \emptyset$ donne, avec $\bigcup_{I \in \emptyset} u_i = \emptyset$ que $\emptyset$ est ouvert)

Exemples

- Topologie grossière : $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$
- Topologie discrète $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$.
- L'intersection quelconque de topologies est une topologie (cf. tribus)
- L'ensemble $f^{-1}\mathcal{O} = \{U \in \mathcal{P}(E),\ U$ image réciproque par f d'un ouvert de $(F, \mathcal{O})\}$ définit la topologie "image réciproque/image inverse" de $\mathcal{O}$ par f. Cela tient au fait que $f^{-1}(V \cap V') = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V')$ et de même pour l'union. Les fermés de $f^{-1}\mathcal{O}$ sont les images réciproques des fermés de $\mathcal{O}$.
- On peut définir une topologie par la donnée de ses fermés. Pour la topologie de Zariski sur $\mathbb{K}^n$, les fermés sont les sous-variétés algébriques à savoir l'ensemble des zéros d'une famille de polyômes de $\mathbb{K}[X_1, \ldots X_n]$.
- L'ensemble des parties vides ou de complémentaire fini est une topologie sur E quelconque.

Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux topologies sur le même espace E, on dit que $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. La topologie grossière est la moins fine des topologies, tandis que la topologie discrète est la plus fine.

Définition : Un homéomorphisme de $(E, \mathcal{O})$ dans $(E', \mathcal{O}')$ est une application $f : E \longrightarrow E'$ bijective et telle que $f^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. f et f^{-1} envoient alors les ouverts sur les ouverts.

Définition :

- Espace métrique, distance, application K-lipschitzienne
- Application isométrique, isométrie = isométrique + bijective, espaces isométriques.
- Boules ouvertes, fermées, sphère. L'adhérence de la boule ouverte n'est pas toujours la boule fermée.
- Topologie induite par une distance d : U est ouvert si pour tout a dans U il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans U.
- Remarque : une isométrie est un homéomorphisme (pour les topologies induites par les distances respectives), car elle envoie une boule sur une boule (de même rayon) et réciproquement.

Définition : Espace topologique métrisable : il existe une distance d sur E induisant la topologie. Il existe des espaces non métrisables, comme $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Zariski. On définit deux notions :

1. d et d' deux distances sur E sont topologiquement équivalentes si elles induisent la même topologie, si $Id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est un homéomorphisme.
2. d et d' deux distances sur E sont équivalentes si il existe $c > 0$ vérifiant $\frac{1}{c}d(x,y) \leq d'(x,y) \leq cd(x,y)$ pour tout couple de points (x,y).

Alors 2. entraîne 1. mais la réciproque est fausse.

Définition :

- Distance à une partie A notée $d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$. Cette application est $1-$lipschitzienne. On a en effet pour tout $y \in A$, $d(a,y) \leq d(a,b) + d(b,y)$, donc en passant à l'infimum on a encore $d(a,A) \leq d(a,b) + d(b,A)$ et réciproquement en échangeant b et a.
- Notion de $r-$voisinage ouvert d'une partie A non vide noté $V_r(A) = \{x \in E, d(x,A) < r\}$, de r-voisinage fermé.
- Diamètre d'une partie, partie bornée, fonction (à valeur dans un espace métrique) bornée.
- Distance discrète, distance induite sur une partie de E.
- Norme et distance associée. Norme $||x||_p = (\sum_{i=1}^n (x_i)^p)^{\frac{1}{p}}$, $||x||_\infty$. Normes équivalentes. Transport d'une norme par isomorphisme.

Définition : Distances sur un espace produit : Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ où (E_i, d_i) sont des espaces métriques. On pose $d_p((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = (\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^p)^{\frac{1}{p}}$ et $d_\infty = \max_{i=1\ldots n} d_i(x_i,y_i)$. Ce sont des distances équivalentes qui induisent donc la même topologie appelée "topologie produit". Preuve : on peut se ramener au problème des normes sur $\mathbb{R}^n$ qui est résolu par équivalence des normes et qui fournit des coefficients. On peut aussi remarquer que d_p est équivalente à d_∞ par $d_\infty \leq d_p \leq N^{\frac{1}{p}} d_\infty$.

Exemples Question : quelles sont les isométries de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_p ?

1.2 Théorème d'Arens-Fells

Tout espace métrique X est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé. Pour cela, on fixe $x_0 \in X$, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties non vides finies de X, $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions réelles positives bornées sur $\mathcal{F}$ et on envoie tout x sur la fonction $f_x \in \mathcal{B}$ définie par $f_x(A) = d(x,A) - d(x_0,A)$. On munit $\mathcal{B}$ de la norme uniforme.

- On observe bien $x \mapsto f_x$ est une isométrie, par double inégalité : l'une découlant du fait que la distance à une partie est 1-lipschitzienne, l'autre en prenant le cas particulier $A = \{y\}$ et en passant au sup.
- Il est faux que l'image de X par $x \mapsto f_x$ soit un fermé de $\mathcal{B}$. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer d'écrire la preuve : sans hypothèse supplémentaire comme la complétude de X on risque de ne pas y arriver, et pour cause, prenons $f_{x_n} \longrightarrow f_{\sqrt{2}}$ où $X = \mathbb{Q}$ et x_n est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors $f_{\sqrt{2}} \neq f_q$ pour tout q rationnel, donc $f(X)$ n'est pas fermé, ici, dans $\mathcal{B}$.
- Il faut donc restreindre l'espace vectoriel ambiant à Vect$\{f_x, x \in X\}$

Exemples Distance de Hausdorff entre deux parties fermées et bornées non vides d'un espace métrique X

$$d_H(K, K') = \max\{\sup_{x\in K} d(x, K'), \sup_{x'\in K'} d(x', K)\}$$

- Sur la distance SNCF : les seules similitudes directes continues pour la distance SNCF sont les homothéties et les rotations de centre l'origine.
- La distance de Hausdorff permet de définir la proximité de deux figures (fermées bornées non vides), et donc de définir une figure limite, par exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne usuelle. C'est le cas du flocon de Koch, où l'on dispose d'une suite de fonctions $K_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ où le n-ième flocon s'identifie à la courbe paramétrée $K_n([0,1])$. On a $d_H(K_{n+1}, K_n) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3^n}$ et il y a convergence uniforme de la suite de fonctions. ETUDE DU FLOCON DE KOCH. Dans la vision "courbe paramétrée", subsiste le problème de la vitesse de parcours de la courbe, ce qui peut engendrer une non-convergence de l'arc définissant la courbe tandis que le support converge pour la distance de Hausdorff.

1.3 Autour des distances équivalentes et topologiquement équivalentes

1. Soit E un ensemble muni de deux métriques d et d'. On dit que d est plus fine que d' si il existe $c > 0$ telle que $d'(x,y) \leq cd(x,y)$ pour tout couple de points (x,y). Alors la topologie $\mathcal{O}$ induite par d est plus fine que la topologie $\mathcal{O}'$ induite par d', on a $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.
2. Soit E un ensemble muni de deux métriques d et d'. On dit que d et d' sont localement équivalentes si pour tout point x de E, il existe un réel r strictement positif tel que les distances induites par d et d' sur l'intersection $B_d(x,r) \cap B_{d'}(x,r)$ sont équivalentes. Alors d et d' induisent la même topologie sur E.

   Preuve : Soit U un ouvert de $\mathcal{O}$ et $x \in U$, soit $r > 0$ donné par hypothèse : il existe $c > 0$ vérifiant, pour tout couple de points (x,y) dans $B_d(x,r) \cap B_{d'}(x,r)$, $\frac{1}{c}d(x,y) \leq d'(x,y) \leq cd(x,y)$. Comme U est ouvert pour la topologie engendrée par d, il existe $s > 0$ (que l'on peut choisir inférieur à r) tel que $B_d(x,s) \subset U$. On remarque alors que $B_{d'}(x, \frac{r}{c}) \subset U$. Par conséquent $U \in \mathcal{O}'$, donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ (et réciproquement par symétrie).

   Remarque : Deux distances localement équivalentes sont donc topologiquement équivalentes, mais pas forcément équivalentes puisque $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ sont topologiquement équivalentes sans être équivalentes (l'une des deux expressions seulement est bornée sur $\mathbb{R}^2$). L'implication topologiquement équivalentes $\Longrightarrow$ localement équivalentes est également fausse, puisque $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ sont topologiquement équivalentes sans être localement équivalentes (le point $x = 0$ pose problème).
3. Soit f une fonction dérivable et strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Poser $d'(x,y) = |f(x) - f(y)|$ permet de définir une distance sur $\mathbb{R}$, qui induit une topologie $\mathcal{O}'$. Alors $\mathcal{O}'$ est moins fine que $\mathcal{O}$ (topologie induite par la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$). En particulier, si f' ne s'annule jamais, d et d' sont topologiquement équivalentes.

   Preuve : Soit $x \in U$ et $r' > 0$ tel que $B_{d'}(x,r') \subset U$. Comme f est dérivable, la fonction $\widetilde{f} : y \mapsto \frac{d'(x,y)}{d(x,y)}$ admet un prolongement continu à $B^f_{d'}(x, \frac{r'}{2})$ et y est donc bornée, ainsi $d'(x,y) \leq cd(x,y)$ pour un certain $c > 0$ et pour tout y dans $B^f_{d'}(x, \frac{r'}{2})$. Mais alors $B_d(x, \frac{r}{c}) \subset B^f_{d'}(x, \frac{r'}{2}) \subset B_{d'}(x,r') \subset U$, ce qui conclut.

Remarque : Cela assure que $d'(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ induit la même topologie que la distance usuelle. Le même raisonnement vaut aussi pour $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$, hormis en 0 que l'on traite à part en remarquant que $|\sqrt{y}| < r \iff |y| < r^2$.

4. Soit g une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, s'annulant uniquement en 0. Si $d' = g \circ d$ définit une distance (par exemple si g est sous-additive), alors la topologie $\mathcal{O}$ induite par d est plus fine que la topologie $\mathcal{O}'$ induite par d'. En particulier, si g est strictement croissante, d et d' sont topologiquement équivalentes.

   Preuve : soit $U \in \mathcal{O}'$, $x \in U$ et $r' > 0$ tel que $B_{d'}(x,r') \subset U$, puis soit $r \in g^{-1}([0,r'[)$. On vérifie que $B_d(x,r) \subset U$.

5. On définit des distances topologiquement équivalentes à d, mais bornées, en posant $d' = \min(\lambda, d)$ et $d'' = \frac{d}{1+d}$. Pour d'', on est dans le cas d'application de la remarque précédente, $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ étant continue, strictement croissante et sous-additive sur $\mathbb{R}_+$.

Définition :

- Pseudo-distance ou "écart" : une distance sans l'axiome de séparation.
- Famille séparante de pseudo-distances : pour tout couple de points (x,y), avoir $d_i(x,y) = 0$ pour tout i entraîne $x = y$
- Si l'on se donne une famille séparante de pseudo-distances, on peut construire des distances en posant (avec $\delta_i = \frac{d_i}{1+d_i}$)
  1. Si la famille est dénombrable : $d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} d_n(x,y)$ si la série converge toujours, ou bien $d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_n(x,y)$
  2. $d(x,y) = \sup_{i\in I} d_i(x,y)$ si ce sup existe toujours ou bien $d(x,y) = \sup_{i\in I} \delta_i(x,y)$.
- Topologie induite par une famille de (pseudo-)distances $(d_i)_{i\in I}$: $U \subset E$ est ouvert lorsque pour tout élément x de U il existe une sous-famille finie J de I telle que l'intersection des boules $B_i(x,r)$ pour i appartenant à J soit contenue dans U.

Exemples Espace de Schwartz, noté $S(\mathbb{R})$, des fonctions C^∞ à décroissance rapide (ainsi que leurs dérivées), muni de la famille de semi-normes $||f||_{j,n} = \sup_{\mathbb{R}}(1 + |x^n|)(|f^{(j}(x)|)$. Ici, il s'agit en fait de normes, mais dans le cas général on peut considérer $S(\mathbb{R}^d)$ en dérivant par rapport à chaque variable, et on dispose seulement de semi-normes.

Topologie induite par une famille de (pseudo-)distances et distances topologiquement équivalentes Soit $(d_i)_{i\in I}$ et $(d'_i)_{i\in I}$ deux familles de pseudo-distances telles que d_i et d'_i sont topologiquement équivalentes pour tout $i \in I$. Alors les deux familles induisent la même topologie.

Preuve : Soit $U \in \mathcal{O}$ (topologie engendrée par la famille $(d_i)_{i\in I}$) et $x \in U$. Par définition, il existe une sous-famille finie $J \subset I$ et $r > 0$ tels que $\bigcap_{i\in J} B_i(x,r) \subset U$. Soit $i \in J$, la boule ouverte $B_i(x,r)$ est un ouvert pour $\mathcal{O}$, donc un élément de $\mathcal{O}'$ (topologie engendrée par la famille $(d'_i)_{i\in I}$), et il existe donc $r_i > 0$ tel que $B'(x,r_i) \subset B_i(x,r)$. Ainsi $\cap_{i\in J} B'_i(x,r_i) \subset U$, poser $r' = \min_{i\in J} r_i > 0$ permet de conclure : $U \in \mathcal{O}'$. Par symétrie, $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Définition : Espace séparé : autour de deux points distincts on peut trouver deux voisinages d'intersection vide.

– Si f et g sont continues coïncidant sur une partie dense de X et à valeur dans Y, il est faux de dire que $f = g$ si Y n'est pas séparé (prendre $X = Y = \{0,1\}$ X muni de la topologie discrète et Y muni de la topologie grossière, avec $f(0) = g(0)$ mais $f(1) \neq g(1)$).

Définition : Espace connexe par arcs rectifiables : il existe un chemin continu de longueur finie entre deux points quelconques (la longueur d'un chemin est le supremum des longueurs d'une approximation du chemin par des segments à extrémités sur le chemin). On note d_l cette longueur. CF GROMOV. On a $(d_l)_l = d_l$. Espace géodésique : pour tout couple de points (x, y) il existe un chemin de longueur $d(x, y)$ reliant x à y (contre-exemple : $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$).

– $\mathbb{C}$ muni de la distance SNCF est géodésique

Définition : Pré-base d'ouverts, base d'ouverts. Soit Σ une partie de $\mathcal{P}(E)$, la plus petite topologie contenant Σ ("topologie engendrée par Σ") est l'intersection de toutes les topologies contenant Σ (cf. remarque sur l'intersection de topologies), elle s'identifie à l'ensemble des unions d'intersections finies d'éléments de Σ, on dit que Σ est une pré-base de cette topologie.

Preuve : comme l'union d'intersections finies d'éléments de Σ est bien contenue dans toute topologie contenant Σ, il suffit de montrer que cela forme une topologie. En cela, toute famille est pré-base de la topologie qu'elle engendre, mais n'est pas en général une base au sens suivant :

Une base d'ouverts d'un espace topologie $(X, \mathcal{O})$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ telle que tout ouvert de X soit union d'éléments de $\mathcal{B}$. De manière équivalente, pour tout élément x de tout ouvert V, il existe un élément U de la base d'ouverts tel que $x \in U \subset V$.

Exemples Si l'on dispose d'une partie $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des intersections finies d'éléments de cette prébase forme par définition une base d'ouverts de la topologie engendrée par Σ : il faut donc travailler sur les éléments de Σ (former toutes les intersections finies) pour obtenir une base de la topologie engendrée par Σ. Mais si Σ vérifie des hypothèses de stabilité par intersection, on dispose du théorème suivant : si X est un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de parties de X, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. X est recouvert par des éléments de $\mathcal{B}$
2. Pour tout couple d'ouverts de la famille $U, V \in \mathcal{B}$, pour tout $x \in U \cap V$, il existe un ouvert W_x dans $\mathcal{B}$ tel que $x \in W_x \subset U \cap V$.

alors $\mathcal{B}$ forme une base de la topologie qu'elle engendre, i.e. l'ensemble des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. Preuve : il suffit de montrer que cet ensemble est bien une topologie, et il n'y a que la stabilité par intersection finie à vérifier, mais on a bien l'écriture $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x$ où U, V, x et W_x sont comme précédemment. On conclut par distributivité : $\bigcup A_i \cap \bigcup B_j = \bigcup (A_i \cap B_j)$.

Dans les cas concrets, une base d'ouverts de la topologie induite par une distance est l'ensemble des boules pour cette distance. Pour les topologies induites par une famille de pseudo-distances, une base d'ouverts est formée de l'ensemble des intersections finies de boules ouvertes (de même rayon si l'on veut). Une pré-base en est donnée par l'ensemble des boules ouvertes associées à une distance.

Voisinages, système fondamental de voisinages (tout voisinage contient un tel voisinage).

Exemples Topologies de Schwartz et Whitney sur l'espace des fonctions lisses à support compact

– On montrer que la topologie de Schwartz est strictement plus fine que la topologie de Whitney, pourtant elles définissent les mêmes suites convergentes. En effet, si l'une des deux topologies n'est pas métrisable, il se peut qu'elles définissent les mêmes suites convergentes sans être identiques. En revanche, si d et d' sont deux distances qui définissent les mêmes suites convergentes, elles définissent les mêmes ouverts (raisonner par l'absurde..).

Définition : Densité d'une partie : $A \subset X$ est dense dans X si $\bar{A} = X$ au sens topologique, c'est à dire que tout ouvert non vide de X rencontre A, ou encore que tout élément non vide d'une base d'ouverts de X rencontre A. On dit que :

1. X est séparable s'il existe une partie dénombrable dense
2. X est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une base dénombrable d'ouverts

On a toujours 2. $\Longrightarrow$ 1. : si (U_i) est une base dénombrable d'ouverts et si on choisit $x_i \in U_i$ alors la partie dénombrable (x_i) est dense car elle rencontre tout ouvert non vide.

- Si X est métrisable, la réciproque est vraie, il suffit de prendre les boules ouvertes $B(x_i, r)$ pour x_i décrivant une partie dénombrable dense et r décrivant les rationnels.
- La réciproque est fausse en général : on a un contre-exemple en prenant $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie engendrée par les intervalles semi-ouverts $]a, b]$ $(a < b)$ (qui recouvrent $\mathbb{R}$ et vérifient le second critère pour être une base de la topologie engendrée). Cet espace est séparable car les rationnels forment une partie dénombrable dense. On vérifie même que tout point possède une base dénombrable de voisinages (intervalles à coordonnées rationnelles entourant x). Cependant X n'admet pas de base dénombrable d'ouverts : cela tient au fait qu'en fermant à droite on a "isolé tous les points" (par exemple l'ouvert $]0, x]$, pour être recouvert, doit contenir un ouvert de la base plus petit du type $]\alpha, x]$ qui ne convient que pour ce x précis, et ce pour tout x, ce qui fait un nombre indénombrable d'ouverts de base à fournir). Une rédaction peut consister à considérer l'ensemble des plus grands éléments / sup d'un ouvert de la base : si b n'appartient pas à cet ensemble (dénombrable), alors le segment $]b-1, b]$ ne peut être recouvert par des ouverts de la base (sinon d'après la remarque précédente l'un des ouverts du recouvrement doit contenir un $]\alpha, b]$, mais b est alors nécessairement plus grand élément de cet ouvert inclus dans $]b-1, b]$, contradiction).

Exemples $\mathbb{Z}$ (tout ensemble infini) est dense dans $(\mathbb{R}, \text{Zariski})$.

Définition : Continuité d'une fonction. Équivalence :

1. L'image réciproque d'un fermé est un fermé
2. L'image réciproque d'un ouvert est un ouvert
3. $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Le 3. donne immédiatement que l'image continue, surjective d'une partie dense est dense dans l'ensemble d'arrivée. À propos du 3. , l'exemple de $f : x \mapsto E(\frac{1}{x})$ montre que c'est faux dans le cas général (l'adhérence de $f([0, 1[)$ vaut $\{0\}$ tandis que l'image de l'adhérence vaut $\{0, 1\}$). L'inclusion réciproque est fausse, notamment du fait de la liberté qu'on peut avoir dans le choix de l'espace topologique d'arrivée (qui permet justement d'écarter fortement l'adhérence de l'image de l'image de l'adhérence). Prendre $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

1.4 Le théorème de Tietze-Uryhsonn

1.4.1 Énoncé

Soit X un espace métrique, F un fermé non vide de X, f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ continue et bornée. Alors il existe un prolongement continu g de f à l'espace X tout entier tel que g et f coïncident sur F, et tel que $\sup_X g = \sup_F f$, $\inf_X g = \inf_f f$.

1.4.2 Préliminaires

Quitte à translater f, on peut supposer que $m = \inf_F g > 0$. Posons $M = \sup_F f$ et notons ρ le rapport $\frac{m}{M}$. On va montrer que la fonction g définie par :

1. $g(x) = f(x)$ si $x \in F$
2. $g(x) = \inf_{y \in F} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)}$ si $x \notin F$

est bien définie et convient. On remarque que F étant fermé, $d(x, F)$ ne s'annule qu'en les points de F. De plus $d(x, y) \geq d(x, F)$ donc l'expression dont on choisit l'infimum est bien non vide et minorée par $f(y)$ où y est un point quelconque de F.

1.4.3 Preuve

Si F est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ on aurait pensé à prolonger f par ses valeurs aux extrémités, si F était un convexe de $\mathbb{R}^n$ (telle que la distance à F soit atteinte en un unique point), on aurait composé f à droite par la projection sur F. Ici montrons que g convient dans le cas général.

1.4.4 Continuité à l'extérieur

Montrons d'abord la continuité sur le complémentaire (ouvert) de F : soit $x_0 \notin F$. Par continuité de la distance à une partie, on se restreint à étudier la continuité du numérateur $h(x)$ dans l'expression de f, et comme $d(x, F) = 0 \iff x \in F$ pour F fermé, il existe une une boule ouverte centrée en x_0 telle que tous les points de la boule sont à distance strictement positive de F. Pour tout point x de cette boule et tout point y du fermé F, l'inégalité triangulaire s'écrit $f(y)d(x, y) \leq f(y)(d(x_0, y) + d(x, y))$ et en tenant compte du caractère borné de F : $f(y)d(x, y) \leq Md(x, x_0) + f(y)d(x_0, y)$. En passant à l'infimum, on obtient que $h(x) - h(x_0) \leq Md(x, x_0)$. Par symétrie, on obtient que h est localement M-lipschitzienne et par conséquent continue. Montrons maintenant la continuité sur la frontière de F (la continuité en un point situé dans l'intérieur de F résulte simplement de l'hypothèse f continue).

1.4.5 Continuité sur la frontière

Soit x_0 à la frontière de F et $0 < \epsilon < 1$. Comme F est fermé, $x_0 \in F$ et par continuité de f en x_0, il existe une boule ouverte B_1 de rayon $r_1 > 0$ centrée en x_0 tel que $|f(y) - f(x_0)| \leq \epsilon \times f(x_0)$. On considère également une boule ouverte centrée en x_0 de rayon $r_2 > 0$ sur laquelle $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$.

Le principal problème est posé par le fait que le rapport $\frac{d(x,y)}{d(x,F)}$ peut-être très grand et donc $g(x)$ très éloigné de la valeur $f(y)$ en le point considéré, ce qui est gênant car quand bien même cette valeur serait proche de $f(x_0)$ cela ne garantit rien sur la proximité de $g(x)$ et $f(x_0)$. On remarque que deux facteurs différents interviennent dans la détermination de l'infimum définissant $g(x)$ pour x hors de F : la distance au point $y \in F$ considéré $[d(x, y)]$ et la valeur de f en ce point $[f(y)]$. Le deuxième critère ne varie *a priori* que dans un rapport $\rho = \frac{m}{M}$. Cela ne suffit pas car ρ peut être très petit devant 1 : il faut astreindre f à varier peu sur un certain voisinage de x_0.

On remarque cependant qu'en considérant une valeur quelconque de $f(y)$ pour un point $y \in F$ situé à une distance d de x, on peut limiter les "recherches" (le domaine sur lequel on considère l'infimum) dans un rayon $\frac{d}{\rho}$. On raisonne alors de la manière suivante : si x est assez proche de x_0 on sait que $g(x)$ correspond à un infimum sur une zone de F à faible distance de x, donc - par inégalité triangulaire - de x_0. Sur cette zone, f varie faiblement, et on peut alors améliorer le rapport de variation ρ en un rapport ρ' plus proche de 1, ce qui garantit qu'une valeur en un point qui serait presque le point de F "le plus proche" de x, (afin de contrôler le rapport problématique $\frac{d(x,y)}{d(x,F)}$) ne s'éloigne que peu de la valeur $g(x)$, et est par ailleurs proche de $f(x_0)$.

Si x est un point hors de F situé à distance au plus $\frac{1}{4} \times \rho \times r_1$ de x_0, alors :

$$g(x) := \inf_{y \in F} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)} = \inf_{y \in F \cap B(x, \frac{r_1}{2})} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)}$$

Preuve : si $y \in F - B(x, \frac{r_1}{2})$, alors on a : $f(y)d(x,y) > m\frac{r_1}{2} = \rho M \frac{r_1}{2} > 2f(x_0)d(x,x_0) \geq 2\inf_{y \in Y} f(y)d(x,y)$.

Soit x un tel point. Pour tout point $y \in F \cap B(x, \frac{r_1}{2})$, comme $d(y,x_0) \leq d(y,x) + d(x,x_0) \leq \frac{r_1}{2} + \frac{1}{4}\rho r_1 \leq r_1$ (en particulier car $\rho \leq 1$), on a encore $y \in F \cap B(x_0, r_1)$. Or on a choisi r_1 tel que $\forall y \in F \cap B(x, r_1)$ on ait : $\frac{f(y)}{f(x_0)}$ compris entre $1-\epsilon$ et $1+\epsilon$: on a ainsi limité les variations de f à un rapport $\rho' = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ sur un voisinage de x_0.

Si x vérifie l'hypothèse précédente, et vérifie de plus la condition $d(x,x_0) \leq \frac{1}{4} \times \rho' \times r_2$ on peut alors affirmer :

$$g(x) = \inf_{y \in F \cap B(x, \frac{r_1}{2})} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)} = \inf_{y \in F \cap B(x, \frac{r_2}{2})} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)}$$

Preuve : on répète la preuve précédente en remplaçant notamment ρ par ρ'.

Mais alors si $d(x,x_0) \leq \min(\frac{1}{4}\rho r_1, \frac{1}{4}\rho' r_2)$, on a (avec $r = \min(r_1, r_2)$) :

$$g(x) = \inf_{y \in F \cap B(x, \frac{r}{2})} \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,F)}$$

Soit y_0 un point de $F \cap B(x, \frac{r}{2})$ tel que $d(x,y_0) \leq d(x,F) \times (1+\epsilon)$. Alors $g(x) \leq f(y_0) \times \frac{1}{\rho'} \leq f(x_0)(1+\epsilon)\rho'$. Soit y_1 un point de $F \cap B(x, \frac{r}{2})$ tel que $f(y_1)\frac{d(x,y_1)}{d(x,F)} \leq g(x) + \epsilon$. Alors $g(x) \geq f(y_1) \geq f(x_0)(1-\epsilon)$. Finalement $f(x_0)(1-\epsilon) \leq g(x) \leq f(x_0)(1+\epsilon)\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$. En faisant $\epsilon \longrightarrow 0$, on obtient bien que $g(x)$ peut être rendu arbitrairement proche de $f(x_0) = g(x_0)$ pour x assez proche de x_0.

1.4.6 Corollaire et remarques sur la séparation

Si F est un fermé et U un ouvert contenant F sur X espace topologique métrisable, il existe une fonction "caractéristique" de F continue, valant 1 sur F et 0 en-dehors de U. Cette propriété est plus généralement vraie sur un espace dit "normal" : un espace topologique est normal lorsqu'il est séparé et que deux fermés disjoints possèdent des voisinages disjoints. On a les deux propriétés suivantes :

1. Un espace topologique métrisable est normal : prendre F et F' deux fermés, et pour U l'ensemble des points à distance strictement plus petite de F que de F', et pour U' l'ensemble symétrique. U et U' sont des ouverts (par continuité de la distance à une partie) disjoints contenant respectivement F et F'.
2. Un espace normal vérifie la propriété d'Urysohn : si F et F' sont deux fermés disjoints de X, il existe une application continue sur X à valeurs dans $[0,1]$ valant 0 sur F et 1 sur F'. Il n'est pas évident, en appliquant une seule fois la propriété "être normal" que l'on puisse obtenir le résultat : on a en effet envie de pose $f_F = 0$, $f_{F'} = 1$ et $f_{X-F\cup F'} =$ constante, ce qui ne convient pas. On remarque que dans la preuve du théorème précédent, le caractère métrique servait principalement à

déterminer la distance d'un point à une partie et de définir f presque comme une constante sur une ligne de niveau de la distance à la partie. Pour reproduire cet effet, on stratifie l'espace en entourant F d'une suite dénombrable d'ouverts : U_s avec s décrivant l'ensemble des nombres dichotomiques et tels que

$$s < t \Longrightarrow F \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_t \subset \overline{U_t} \subset X - F'$$

La construction se fait par récurrence en utilisant à chaque fois le caractère normal de X. Comme l'ensemble des nombres dichotomiques est dense dans $[0, 1]$, on a une stratification de l'espace qui peut nous donner une indication sur la distance à F : si un point appartient à un ouvert U_s avec s proche de 0, c'est que x est proche de F. On applique cette constatation en posant pour x hors de f : $f(x) = \inf\{s, x \in U_s\}$ qui est bien continue.

Définition : Connexité, connexité par arcs. Implication cpa $\Longrightarrow$ connexe et contre-exemple (peigne, $t \mapsto sin(1/t)$).

- Espace localement connexe : tout point possède un système fondamental de voisinages connexes (et pas simplement un voisinage connexe). Idem : localement cpa. Si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe.
- Composantes connexes. Espace totalement discontinu : les composantes connexes sont de singletons. Exemple : un espace discret, ou l'ensemble de Cantor triadique (qui n'est pas discret puisque tout point est d'accumulation).
- L'image continue d'un espace connexe est connexe (etc.).
- Le théorème "de l'arbre et de l'écorce" : si D est une partie contenue entre C et $\overline{C}$ où C est un sous-espace connexe, alors D est connexe : soit $f : D \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. C étant connexe, f_C est constante. Mais f étant continue et comme C est dense dans D, f est constante sur D tout entier.
- L'adhérence d'un connexe est donc connexe (mais c'est faux pour cpa comme le montre $t \mapsto sin\frac{1}{t}$). Une composante connexe est par conséquent fermée (maximalité pour l'inclusion), mais c'est encore faux pour cpa.
- La réunion de sous-espaces connexes d'intersection non vide est connexe. Dans le cas d'une famille dénombrable de sous-espaces connexes, on peut simplement demander à ce qu'ils forment une chaîne d'intersections successives connexes ("théorème des chipolatas").

2 Catalogue de topologies

2.1 Topologie initiale et topologie produit, topologie limite projective

2.1.1 Topologie initiale

C'est la topologie la moins fine sur un objet initial X, *i.e.* d'où partent des flèches vers des objets Y_i ($i \in I$) munis de leur propre topologie $\mathcal{O}_i$, rendant les flèches continues. On énonce les propriétés :

- Les ouverts sont donnés par :
  1. $\{f_i^{-1}(U_i), i \in I, U_i \in \mathcal{O}_i\}$ forme une prébase d'ouverts (i.e. c'est la topologie engendrée par les ...)
  2. Si B_i est une base d'ouverts de $(Y_i, \mathcal{O}_i)$ alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de type $f^{-1}(U_i), u_i \in B_i$ forme une base d'ouverts. En particulier si tous les Y_i sont à base dénombrable d'ouverts et si I est dénombrable, alors il y a un nombre dénombrable de telles intersections et X est encore à base dénombrable d'ouverts.
- Si $g : Z \longrightarrow X$ est une flèche vers X, alors g est continue si et seulement si $f_i \circ g$ est continue pour tout $i \in I$. Idée : on a choisi juste assez peu d'ouvert pour permettre cette propriété : prendre une topologie plus fine risquerait de faire chuter g continue, mais prendre moins d'ouverts ne permettrait pas d'avoir les f_i continues. Un sens est facile, pour l'autre il faut utiliser la caractérisation précédente : la topologie initiale est engendrée par les $f^{-1}(U_i)$, il suffit de vérifier que les $g^{-1}(f^{-1}(U_i)$ sont bien des ouverts, mais c'est le cas si $f_i \circ g$ est continue.

2.1.2 Topologie produit

C'est la topologie la moins fine sur un objet produit $X = \prod X_i$ depuis lequel partent les projections p_i vers les espaces topologiques $(X_i, \mathcal{O}_i)$ qui rende toutes les projections continues. On énonce les propriétés :

- Remarques sur les ouverts :
  1. $\{p_i^{-1}(U_i), i \in I, U_i \in \mathcal{O}_i\}$ forme une prébase d'ouverts : c'est l'ensemble des parties du type : le produit total dans lequel seul un X_i est remplacé par un des ses ouverts U_i.
  2. Une base d'ouverts est donc donnée par les intersections finies de ce type, c'est à dire le produit total dans lequel seul un nombre fini de X_i sont remplacés par des ouverts.
  3. Si $g : Z \longrightarrow X$ est une flèche vers X, alors g est continue si et seulement si $p_i \circ g$ est continue pour tout $i \in I$.
  4. L'adhérence du produit est le produit des adhérences. En particulier un produit de fermés est fermé, ce qui est faux pour le cas ouvert.
  5. Attention : les projections ne sont ni ouvertes ni fermés. La projection des branches de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ (dans $\mathbb{R}^2$) sur l'axe des abscisses donne $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas fermé alors que l'hyperbole l'est (par exemple comme image réciproque dans $\mathbb{R}^2$ du singleton $\{1\}$ pour l'application continue $(x, y) \mapsto xy$).
- La topologie produit est stable par permutation des éléments du produit (on réalise un homéomorphisme).
- On garde par passage à la topologie produit :
  1. La séparation (et réciproquement si l'espace produit est séparé alors les composantes non vides du produit sont également séparées).

2. La séparabilité, le fait d'avoir une base dénombrable d'ouverts (en cas de produit dénombrable)
3. Le caractère métrisable (toujours dans le cas d'un produit dénombrable). La réciproque s'énonce : si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille indénombrable d'espaces topologiques ayant tous au moins deux points, alors le produit est métrisable si et seulement si I est dénombrable et X_i est métrisable pour tout I.

   Preuve : comme X_i est homéomorphe à une partie de X, on peut transporter la distance de X vers X_i pour métriser X. Montrons que I est nécessairement dénombrable. L'idée est que dans les espaces métriques on dispose d'une base dénombrable d'ouverts autour d'un certain point x_0, mais qu'un ouvert élémentaire pour la topologie produit ne restreint qu'un nombre fini de coordonnées, en particulier l'ensemble des coordonnées restreintes par un nombre dénombrable d'ouverts est union dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable. Si I est indénombrable, il existe une coordonnée $j \in I$ qui n'est jamais restreinte. Mais alors, choisissons un ouvert contenant x_0 et ne passant pas par tous les points de X_j : aucun des ouverts considérés précédents ne peut être inclus dedans, ce qui est absurde (on avait considéré une base).

2.1.3 Quelques remarques supplémentaires sur la topologie produit

Attention : un produit d'ouverts n'est en général pas un ouvert. Exemple : dans $E = [0,1]^{\mathbb{N}}$, bien que $[0,1[$ soit un ouvert de $[0,1]$, la partie $A = [0,1[^{\mathbb{N}}$ n'est pas ouverte dans E. On montre en effet que bien que la suite nulle appartienne à A, aucun voisinage de cette suite n'est contenu dans A : l'idée est la même que précédemment, on ne restreint qu'un nombre fini de coordonnées, si bien que pour tout ouvert contenant 0 il existe une suite qui ne "démarre" que très loin et qui appartient bien à l'ouvert.

– Un point se trouve à la frontière de $A\times B$ ssi il est au croisement de la frontière de A et de l'adhérence de B ou réciproquement. Un dessin le donne dans R^2, mais l'adhérence du produit étant le produit des adhérences, on a $\partial(A\times B) = \overline{A}\times\overline{B}\cap\overline{X\times Y - A\times B}$, or $\overline{X\times Y - A\times B} = \overline{X-A}\times\overline{B}\cup\overline{A}\times\overline{Y-B}$, finalement on a bien $\partial(A\times B) = \overline{A}\times\partial B \ \cup\ \partial A\times\overline{B}$.
– Un produit d'espaces connexes est connexe (resp. cpa). C'est simple pour cpa, pour connexe il faut remarquer qu'en fixant toutes les coordonnée sauf une, l'injection est continue et qu'on peut alors composer par f pour montrer que toute fonction f continue à valeurs discrètes est constante.
– En revanche, avec la "mauvaise" topologie produit (les ouverts sont les produits quelconques d'ouverts), on montre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe : l'ensemble des suites non bornées est ouvert ainsi que son complémentaire.

2.1.4 Topologie limite projective

C'est la topologie induite sur la limite projective par la topologie produit, ou encore la topologie la moins fine rendant continues les restrictions des projections à la limite projective.

2.2 Topologie induite

C'est la topologie initiale associée à l'inclusion d'une partie A d'un espace métrique X dans lui-même. On ne garde que les ouverts nécessaires : un ouvert de X doit avoir son image réciproque ouverte dans A, mais cette image réciproque vaut exactement $X\cap A$. Donc les ouverts de A sont la trace sur A des ouverts de X, idem pour les fermés, pour les voisinages.

- La continuité est une propriété locale : on peut restreindre son étude à des ouverts recouvrant X. Plus précisément, si U_i est un recouvrement ouvert de X alors une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction à chacun des U_i (muni de la topologie induite) est continue.
  Preuve : si f est continue, l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X, donc l'image réciproque de tout ouvert de Y par f_{U_i} est la trace sur U_i d'un ouvert de X, donc un ouvert de U_i muni de la topologie induite. Réciproquement, comme les ouverts U_i recouvrent X, l'image réciproque d'un ouvert $A \subset Y$ par f correspond à $\bigcup_i f_{U_i}^{-1}(A)$. Mais chaque $f_{U_i}^{-1}(A)$ est un ouvert de U_i donc un ouvert de X car U_i est ouvert. On utilise ici la propriété : "Tout ouvert de $U \subset X$ est un ouvert de X si et seulement si U est ouvert dans X".
- La propriété précédente (étude locale de la continuité) tient encore pour un recouvrement fermé à condition qu'il s'agisse d'un recouvrement fini (car une union quelconque de fermés n'est pas forcément fermée).
- On conserve certaines propriétés en passant à la topologie induite :
  1. La séparation (si $U \cap V = \emptyset$, c'est encore le cas de $(U \cap A) \cap (V \cap A)$.
  2. Être à base dénombrable d'ouverts (les $U_k \cap A$ forment une base dénombrable d'ouverts de la topologie induite).
  3. Être métrisable.
  4. Être métrisable et séparable (i.e. admettre une partie dénombrable dense). En effet, si X est métrisable, la condition de séparabilité est équivalente à celle d'admettre une base dénombrable d'ouverts. Attention, un sous-espace topologique d'un espace séparable n'est pas nécessairement séparable : prendre l'exemple de $\mathbb{R}$ muni de la topologie "ouvert $= \emptyset$ ou contient 0". Cet espace admet $\{0\}$ comme partie dénombrable dense, mais $\mathbb{R} - \{0\}$ muni de la topologie induite est muni de la topologie grossière, en particulier tous les singletons contentant un irrationnel r sont ouverts, comme trace sur $\mathbb{R} - \{0\}$ de la partie ouverte dans $\mathbb{R}$ $\{0, r\}$.

2.3 Topologie finale : topologie somme disjointe, topologie faible

2.3.1 Topologie finale

C'est la topologie la plus fine sur un objet final X sur lequel arrivent des flèches $f_i : Y_i \longrightarrow X$ rendant les flèches continues. C'est la topologie dont les ouverts sont les parties $U \subset X$ telles que $f_i^{-1}(U)$ est un ouvert de Y_i pour tout i (idem pour fermé). Une application $g : X \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si les composées $g \circ f_i$ sont continues pour tout i (on a pris juste assez d'ouverts sur X pour cela : si on en avait pris plus, on risquerait de ne plus avoir les f_i continues si on en avait pris moins, alors on pourrait g continue sans que les $g \circ f_i$ ne le soient).

2.3.2 Topologie somme disjointe

C'est la topologie finale pour l'ensemble des inclusions d'une famille d'ensembles X_i dans leur somme directe : c'est la topologie la plus fine sur une somme disjointe $X = \sum_i X_i$ qui rend toutes les injections canoniques continues. Les ouverts sont les sommes quelconques d'ouverts. On conserve :

1. La séparation
2. La séparabilité, le caractère "base dénombrable d'ouverts" (dans le cas d'une somme dénombrable)
3. Le caractère métrisable (et ici on a pas besoin de supposer l'ensemble que l'on somme dénombrable, contrairement au produit). Si X_i est une famille d'ensemble métrisables, on peut construire une

distance "somme" simplement en bornant toutes les distances d_i par 1 (quitte à poser $d_i' = \min(d_i, 1)$ qui lui est topologiquement équivalente), puis en posant $d(x, y) = d_i(x, y)$ si x et y appartiennent à un même i et 1 sinon. Une autre façon serait de choisir un représentant r_i dans chaque $X_i \times \{i\}$ et de poser $d(x_i, y_j) = d(x_i, r_i) + d(x_j, r_j) + 1 \ldots$

2.3.3 Topologie faible

C'est la topologie finale pour l'ensemble des inclusions d'une famille d'ensembles X_i dans leur union simple : c'est la topologie la plus fine rendant les injections continues. La topologie "faible" n'est pas forcément séparée : si l'on considère $X_\pm = \{0_\pm\} \cup \mathbb{R}^*$ qui sont deux ensembles séparés, la topologie faible sur leur union ($\mathbb{R}$ avec un zéro double) n'est pas séparée.

Remarque : les seuls espaces topologiques dont la topologie soit la topologie faible des singletons sont les espaces discrets. En effet, les singletons sont ouverts dans eux-mêmes.

2.4 Topologie quotient, topologie limite inductive

2.4.1 Topologie quotient

C'est la topologie finale définie par la projection π sur le quotient $Y = X/\mathcal{R}$, donc la topologie la plus fine rendant la projection continue. Comme π est rendue continue par la définition de cette topologie, si une partie de Y est ouverte c'est que sa pré-image est ouverte (resp. fermée). Mais par ailleurs la topologie quotient est la topologie la plus fine rendant π continue, donc si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X c'est que U peut-être posée comme un ouvert de Y. Finalement $U \subset Y$ ouvert/fermée $\iff$ $\pi^{-1}(U) \subset X$ ouvert/fermée.

On définit une partie saturée $A \subset X$ pour $\mathcal{R}$ comme une partie qui contient tous les éléments en relation avec chacun de ses éléments, ce qui se traduit par $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. La surjection canonique π envoie les parties saturées ouvertes sur un ouvert de Y (resp. fermé), et réalise une bijection des parties saturées sur les parties de X/R (au sens : un certain nombre de classes d'équivalences pleines).

Preuve : soit U une partie saturée ouverte. Son image par π est un certain nombre de classes d'équivalences pleines, or ces classes sont considérées comme ouvertes si et seulement si leurs pré-image est ouverte, or ici $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ est un ouvert de X.

2.4.2 Séparation de l'espace quotient ?

- Y est séparé si et seulement si deux éléments qui ne sont pas en relation dans X sont <u>séparés</u> par deux<u>ouverts saturés</u>. En effet, le passage au quotient ne conserve un ouvert en général "que" s'il est saturé (voir remarque précédente).
  Preuve : si la condition est vérifiée, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont deux classes d'équivalence distinctes, il existe dans X deux ouverts U et V saturés disjoints contenant respectivement x et y. Mais alors $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont deux ouverts de l'espace quotient qui contiennent nos deux classes d'équivalence, mais qui restent disjoints car $\pi^{-1}(\pi(U) \cap \pi(V)) = \pi^{-1}(\pi(U)) \cap \pi^{-1}(\pi(V)) = U \cap V = \emptyset$ et π est surjective, donc $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$. Réciproquement, si nos deux classes distinctes sont séparées dans Y par deux ouverts quotients u et v, on peut prendre les pré-images par π de ces deux ouverts.
- Exemple : le tore est séparé car $x + \mathbb{Z}^n$ est fermé, donc si x et y ne sont pas en relation la distance $\epsilon = d(y, x + \mathbb{Z}^n)$ est strictement positive : prendre l'union des petites boules de taille $\epsilon/2$ autour de chaque point de la classe d'équivalence de x et de y garantit la séparation par des ouverts saturés.

- Condition nécéssaire : le graphe de la relation doit être fermé. Preuve : si deux éléments pas en relation ont leurs classes d'équivalences "tangentes", ces éléments ne peuvent être séparés dans le quotient. Ou encore le complémentaire du graphe est ouvert.
- Condition suffisante : si le graphe est fermé et la projection ouverte, alors le quotient est séparé
- Le quotient de X par la relation "avoir même image par f" (ou f est continue et l'espace d'arrivée est séparé) est séparé.

Si une classe d'équivalence est dense, la topologie n'est pas séparée. Si toutes les classes sont denses, la topologie est grossière.

Notion de "plus grand quotient séparé" pour un ensemble muni d'une pseudo-distance : on identifie deux points à distance nulle l'un de l'autre.

2.5 Topologie limite inductive

C'est la topologie quotient du quotient de la somme disjointe par la relation $x_i \mathcal{R} x_j \iff \exists k \leq \max(i,j),\ f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$, c'est également la topologie finale sur la limite inductive associée à la restriction des injections canoniques

3 Groupes et corps topologiques

Définition : Groupe topologique : le produit et le passage à l'inverse sont continus. Les translations à gauche et à droite (attention à droite c'est $x \mapsto g^{-1}$) sont des homéomorphismes. Un morphisme de groupes topologiques est continu si et seulement si il est continu en l'élément neutre : soit en effet $g \in G$ et U un voisinage de $f(g)$. Alors $f(x) \in U \iff f(x) \in f(g)U_e$ (où U_e est un voisinage de g) $\iff f(g^-1)f(x) \in U_e \iff f(g^{-1}x) \in U_e$, or si f est continue en l'élément neutre, il existe un voisinage V de de e tel que $f(V) \subset U_e$. Il suffit de choisir $g^{-1}x \in V_e$, i.e. $x \in gV_e$ qui est bien un voisinage de g.

Exemples Groupes discrets, groupe topologique produit. L'adhérence d'un sous-groupe d'un groupe topologique est encore un groupe par continuité du produit et du passage à l'inverse.

Influence de la composante connexe de l'élément neutre (composante neutre) : c'est un sous-groupe distingué (démarche élégante : l'application de $C \times C$ dans C $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue donc d'image un connexe contenant e, donc incluse dans C, donc C est un sous-groupe, idem pour $x \mapsto gxg^{-1}$ (pour tout $g \in G$), donc un sous-groupe distingué).

Tout groupe topologique connexe est engendré par tout voisinage de son élément neutre. Un groupe topologique est séparé si et seulement si le singleton $\{e\}$ est fermé.

Preuve : Notons H ce sous-groupe et montrons que H est à la fois ouvert et fermé. Il faut jouer avec les translations de V voisinage de e. D'une part, si tout voisinage de x rencontre H, alors xV rencontre H donc $x \in H$ (donc H fermé). D'autre part, si $x \in H$, alors $xV \in H$ donc H contient un voisinage de x (donc H ouvert). Donc H est tout le groupe (connexe). Pour la deuxième assertion, si $\{e\}$ est fermé c'est le cas de tous les singletons par translation.

Définition : Espaces vectoriels topologiques. Localement convexe : possède un système fondamental de voisinages convexes de 0 (donc par translation de tout point). Jauge d'un convexe. Un espace vectoriel topologique (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est localement convexe ssi sa topologie est définie par une famille de semi-normes : considérer l'ensemble des jauges $||.||_C$ pour C décrivant un système de voisinages convexes de 0).

Définition : Topologies faible, faible-étoile, forte.

Topologie faible : topologie initiale sur E associée aux formes linéaires continues, ou topologie induite par la famille de semi-normes $x \mapsto |l(x)|$ pour l forme linéaire continue (dans le "dual topologique"). Ainsi un système fondamental de voisinages de x_0 est donnée par les intersections finie des boules liées à ces semi-normes centrées en x_0 et de rayon ϵ. La topologie forte est par définition plus forte que la topologie faible, même si en dimension finie elles coïncident (car on retrouve la topologie de la norme par les formes linéaires "projections sur les éléments de base", qui sont en nombre fini. En dimension infinie, comme on ne restreint qu'un nombre fini de coordonnées, la topologie faible est intuitivement strictement plus fine que la topologie forte).

Si E est un evn de dimension infinie, la boule unité n'est pas ouverte pour la topologie faible. En effet, si $\cap B_{l_i}(0, \epsilon) \subset B(0, 1)$, les formes linéaires l_i sont en nombre fini donc il existe un vecteur non nul dans l'intersection de leurs noyaux, en particulier il existe un vecteur de toute norme dans cette intersection, ce qui est absurde. Par un argument semblable, on montre que la boule unité, pour la topologie faible, est d'intérieur vide, car tout ouvert non vide contient un vecteur de norme quelconque. Topologie faible-étoile : topologie initiale sur le dual topologique rendant continue les applications $l \mapsto l(x)$ pour tout $x \in E$. Elle est par conséquent induite par la famille de semi-normes $(l \mapsto |l(x)|)$. Cette famille de semi-normes étant séparante, elle est séparée (en revanche ce n'est pas le cas général de la topologie faible, voir Contre-exemples). Sur le dual topologique d'un *espace vectoriel normé*, la topologie forte est donnée par la norme duale ($l \mapsto ||l||$) (norme d'opérateur). La topologie faible-étoile est dans ce cas moins fine que la topologie faible (qui a bien un sens).

Définition : Action de groupe topologique : si G est un groupe topologique et X un espace topologique on peut considérer les actions particulières de G sur X qui sont continues (i.e. $G \times X \to X$ est continue). En particulier, on peut considérer la nature topologique des orbites de X pour cette action ($G/X = X/\mathcal{R}$ étant muni de la topologie quotient et les orbites de la topologie induite par la topologie quotient). Dans ce cas particulier, la projection est ouverte, en effet si U est un ouvert, il suffit de vérifier que $\pi^{-1}(\pi(U))$ est ouvert (car $\pi^{-1}(A)$ est ouvert ssi A est ouvert), or $\pi^{-1}(\pi(U))$, quoique différent de U si U n'est pas saturée, est du moins l'union pour $g \in G$ des $g.U$, or g agit par homéomorphismes et U est ouvert, donc les $g.U$ forment une union d'ouverts. On sait alors qu'il suffit que le graphe de $\mathcal{R}$ soit fermé pour que le quotient soit séparé. Dans ce cas toutes les orbites sont fermées dans G (en effet ce sont les images réciproques par π continue des singletons, qui sont fermés dans l'espace séparé quotient).

Dans le cas d'un espace vectoriel normé (ou muni d'une famille de semi-normes), on peut faire passer la (les semi-) norme(s) au quotient E/F par $||\bar{x}||' = \inf\{||x + f||, f \in f\}$. Cette norme induit la topologie quotient.

Preuve : C'est une norme OK. La topologie quotient rend $||.||'$ continue puisque $||\pi(x)||' = ||x||$ avec $||.||$ continue, elle est par conséquent plus fine que la topologie de la norme.

3.1 Limites et valeurs d'adhérences

Définition : Limite d'une fonction en un point adhérent au domaine de définition. Unicité de la limite quand l'espace d'arrivée est séparé. Passage à la limite dans les égalités, dans les inégalités, dans les compositions.

En particulier, un point est dans l'adhérence d'une partie s'il existe une suite de points de cette partie qui convergent vers lui. La réciproque est fausse faux dans le cas général des espaces topologiques, par exemple lorsqu'il n'y a pas de système fondamental dénombrable de voisinages. Dans ce cas, on peut être dans l'adhérence sans qu'aucune suite ne parvienne pas converger vers nous, car on a trop de voisinages.

Si Z est un espace topologique dans lequel tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages, il y a bien équivalence :

- Être dans l'adhérence $\iff$ être limite d'une suite ($\Leftarrow$ est toujours vrai)
- Être fermé $\iff$ être séquentiellement fermé ($\Rightarrow$ est toujours vrai) . (On utilise le fait qu'une partie est fermée $\iff$ elle est égale à son adhérence). Contre-exemple dans le cas où Z n'est pas à base dénombrable de voisinages : prendre l'ensemble des fonctions $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$, muni de la topologie produit. La partie des fonctions à support dénombrable est bien séquentiellement fermée, mais pas fermée, en effet son complémentaire, s'il était ouvert, contiendrait un ouvert élémentaire qui ne restreint qu'un nombre fini de coordonnées, donc qui contient une fonction nulle partout sauf sur un ensemble fini, ce qui est absurde.
- Être continu $\iff$ être séquentiellement continue.

3.1.1 Valeur d'adhérence

Pour tout voisinage V d'un point l, pour tout voisinage U de a, $f(U \cap A) \cap V$ est non vide : l est point d'adhérence de f en a. Définition équivalente, avec $S(a)$ un système fondamental de voisinages :

$\bigcap_{U\in S(a)} \overline{f(U\cap A)}$.

3.2 Complétude

3.2.1 Suite de Cauchy

La définition peut valoir pour des espaces métriques (ou pseudo-métriques), ainsi que pour des groupes topologiques (on distingue alors suite de Cauchy à gauche et à droite). Propriétés :

- Une application lipschitzienne envoie une suite de Cauchy sur une suite de Cauchy, en fait c'est même le cas d'une application uniformément continue. En particulier deux distances équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy. La réciproque est fausse : on vérifie que $|x-y|$ et $|x^2-y^2|$ définissent les mêmes suites de Cauchy (en fait elles définissent les mêmes suites bornées, or toute suite de Cauchy est bornée, et sur un borné elles sont équivalentes).
- Toute suite convergente est de Cauchy

On définit la notion de complétude pour des espaces métriques ou des groupes topologiques métrisables. Pour un groupe topologique général, on peut parler de complétude séquentielle, et même de complétude mais...

3.2.2 Espace de Fréchet

: (On a vu le rapport entre 1. et 2. par les jauges de convexe.)

1. E est localement convexe (i.e. admet en tout point un système fondamental de voisinages convexes), séparé, séquentiellement complet (toute suite de Cauchy converge), et le vecteur nul admet un système fondamental de voisinages.
2. E est séquentiellement complet et sa topologie est définie par une famille dénombrable séparante de semi-normes.
3. E est localement convexe, métrisable, complet

Remarque : un espace de Fréchet admet une “métrisation” par une famille de semi-normes, donc admet “une distance complète induisant sa topologie qui est invariante par translation”. En revanche, comme on définit la métrique par une série $\sum 2^{-n}d_n$, cette distance n'est pas homogène (comme dans le cas des espaces de Banach).

3.2.3 Quotient dans les Banach

Si E est un Banach et F est un sous-espace vectoriel fermé, alors l'espace vectoriel $\underline{E/F}$ est complet. Rappelons que l'on norme, dans le cas où F est fermé $\pi(x)$ par $\inf_{f\in F}||x+f||_E$. Soit $\overline{(x_n)}$ une suite de Cauchy de E/F. Pour tout n, notons $\varphi(n)$ tel que $\forall p\leq 0, ||\overline{x_{\varphi(n)}}-\overline{x_{\varphi(n)+p}}||<3^{-n}$. Soit y_n un élément de F tel que $||x_{\varphi(n+1)}-x_{\varphi(n)}+y_n||<2^{-n}||$, et posons $x'_0=x_{\varphi(0)}$, $x'_n=x_{\varphi(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}y_k$. On a alors $||x'_{n+1}-x'_n||=||x_{\varphi(n+1)}-x_{\varphi(n)}+y_n||<2^{-n}||$, donc la suite (x'_n) est de Cauchy dans E complet, donc converge vers $x\in E$. Or on a pour tout n, $\pi(x'_n)=\overline{x_\varphi(n)}$, et, par continuité de π, $\overline{x_{\varphi(n)}}$ converge vers $\pi(x)$. Une suite de Cauchy admettant une suite extraite convergente est elle-même convergente, ce qui conclut. Remarque : le quotient d'un Fréchet par un sev fermé reste un Fréchet ...

3.3 Compacité

De tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini / De toute intersection vide de fermés, on peut tirer une intersection finie qui est vide. Un espace discret est compact si et seulement si il est fini. Si X est séparé, une partie compacte est fermée, réciproquement toute partie fermée d'un compact est compacte. Une union finie de compacts est un compact.

Deux espaces compacts disjoints ont des voisinages disjoints si l'espace ambiant est séparé. Soit K et K' deux compacts. Commençons par le cas où où K' est réduit à un point : pour tout $x \in K$ il existe un ouvert autour de x et un ouvert autour de K' d'intersection vide. On recouvre ainsi K par des ouverts, dont on extrait un nombre fini : en considérant l'intersection des ouverts correspondants autour de K' (c'est une intersection finie) on obtient le résultat voulu. On peut appliquer le résultat pour chaque point de K' : on obtient pour chaque point de K' un ouvert autour de K et un ouvert autour du point d'intersection vide. On recouvre ainsi K' par des ouverts, dont on extrait un nombre fini. L'intersection des ouverts correspondant autour de K (c'est une intersection finie) donne le résultat.

Dans un compact, toute fonction admet une valeur d'adhérence en un point (utiliser le fait qu'une intersection vide de fermés est vide en temps fini), l'ensemble des valeurs d'adhérence est un compact (car fermé). Une unique valeur d'adhérence signifie que la suite converge.

3.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Pour un espace métrique, il y a équivalence entre

1. La compacité topologique
2. La compacité métrique
3. Précompact et complet

On a vu 1. $\Longrightarrow$ 2. (on considère l'écriture de l'ensemble des valeurs d'adhérence comme intersection de fermés) et 2. $\Longrightarrow$ 3. car compact entraîne précompact (sinon on pourrait construire une suite de points telle que x_n n'est pas dans l'union des boules de centre x_i et de rayon ϵ, donc une suite n'admettant pas de sous-suite convergente).

Montrons 2. $\Longrightarrow$ 1.

Théorème des fermés emboîtés Soit X un espace métrique compact (au sens métrique), et F_n une suite décroissante de fermés non vides. Alors l'intersection $\bigcap F_n$ est non vide.

Preuve : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intersection $\bigcap_{k \leq n} F_n$ est non vide et l'on choisit u_n dans cette intersection. La suite u_n est à valeurs dans un compact, donc admet une suite extraite convergente vers un point l, or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \leq n$ donc la suite $u_{\varphi(n)}$ est ultimement à valeurs dans F_n, et ainsi $l \in F_n$, ce pour tout $n \in N$, ce qui conclut.

Corollaire : de tout recouvrement dénombrable on peut extraire un recouvrement fini : soit U_n un recouvrement dénombrable par des ouverts, i.e. $X = \bigcup U_n$. alors $(X - \bigcup_{k \leq n} U_k)$ est une suite décroissante de fermés, d'intersection vide, donc vide à partir d'un certain rang.

Propriété de Lindelöf Soit X un espace topologique à base dénombrable d'ouverts (par exemple un espace métrique séparable). Alors de tout recouvrement ouvert dans X, on peut extraire un recouvrement dénombrable.

Preuve : soit Ω_n une base dénombrable de voisinages, et $A = \bigcup(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert. L'idée est que $\bigcup U_i = \bigcup \Omega_n$, donc $A = \bigcup U_i \cap \bigcup \Omega_n$ qui a une chance d'être dénombrable. Plus précisément, posons $I_n = \{i \in I, \Omega_n \subset U_i\}$, et soit i_n un élément de I_n pour tout n. Alors :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n} = \bigcup_{i\in I} U_i$$

Une inclusion étant évidente, montrons l'autre : soit $i \in I$ et $x \in U_i$, alors x est dans un certain $\Omega_n \subset U_i$ (car la famille Ω_n est une base d'ouverts, c'est à dire que tout ouvert est union de tels ouverts), donc $x \in U_{i_n}$, ce qui conclut.

La précompacité par les suites de Cauchy Un espace métrique X est précompact lorsque pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Il y a équivalence :

1. X est précompact
2. De toute suite à valeurs dans X on peut extraire une suite de Cauchy

Preuve : Pour 2. $\Longrightarrow$ 1. c'est la même preuve que compact entraîne précompact : on construit par l'absurde une suite dont les termes successifs sont à distance ϵ l'un de l'autre (donc qui n'est pas de Cauchy). Pour 1. $\Longrightarrow$ 2., si u_n est une suite à valeurs dans X, elle repasse une infinité de fois par une boule de rayon $\frac{1}{2}$, puis une infinité de fois par une boule de rayon $\frac{1}{4}$, etc ...

Un espace métrique précompact est à base dénombrable de voisinages Prendre les $B(x_{kn}, \frac{1}{n})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et les boules d'indice kn recouvrant X.

Retour à la preuve Un espace métrique compact est précompact, donc séparable. Si U_i est un recouvrement quelconque, on peut en extraire un recouvrement dénombrable (séparabilité), puis le théorème des fermés emboîtés garantit qu'on peut en extraire un recouvrement fini.

Version plus directe : nombre de Lebesgue Soit U_i un recouvrement ouvert de X, montrons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute partie A de diamètre inférieur à ϵ soit contenue dans un des U_i. Par l'absurde, on aurait $B(x_n, 2^{-n}) \notin U_i$ pour tout i et tout n, mais si on prend x_0 une valeur d'adhérence de la suite u_n et U_{i_0} un ouvert contenant x_0, alors U_{i_0} ne contient aucune boule de centre x_0, contradiction. Comme X est précompact, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon $\epsilon > 0$, donc X est inclus dans les U_i contenant ces boules.

Théorème de Tychonov Tout produit d'espaces compact est compact.

Preuve dans le cas dénombrable : procédé diagonal de Cantor. Dans le cas général, on définit un "mauvais recouvrement" d'un espace topologique comme un recouvrement n'admettant pas de sous-recouvrement fini. À l'aide du lemme de Zorn, on montre que si X admet un mauvais recouvrement, il en admet également un constitué d'éléments d'une prébase d'ouverts. Cela permet de ne considérer que les ouverts élémentaires pour la topologie produit.

Divers L'image continue d'un compact dans un espace séparé est compact. Si f est bijective, c'est un homéomorphisme.

Équivalence des normes en dimension finie. Tout evn de dimension finie est un Banach. Les parties compactes sont les fermés bornés.

3.3.2 Espace localement compact

Un espace séparé tel que tout point admette un voisinage compact. Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact (puisque le produit de compacts est compact est qu'un produit fini de voisinages est un voisinage). En revanche, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact (c'est un produit dénombrable d'espaces localement compacts), car un voisinage de tout point contient une composante non restreinte, et la projection sur cette composante donne $\mathbb{R}$, qui est non compact, ce qui nierait la continuité de la projection.

Théorème de Riesz Soit E un espace vectoriel normé. S'équivalent :

1. E est localement compact
2. La boule unité fermée est compacte
3. E est de dimension finie

(Ex. : si $E = \mathbb{R}^n$ c'est clair. Si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a vu que ça ne marchait pas très fort. Si la dimension est encore plus grande, ça ne risque pas de marcher). Supposons la boule unité fermée compacte. Essentiellement on utilise la précompacité : on considère une famille finies de points x_n telle que l'union des $B(x_i, \frac{1}{2})$ recouvre la boule unité. On note F l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs et on veut montrer $E = F$. L'idée est que F est fermé, et on montre que son adhérence est E tout entier : si x est dans la boule unité, il existe x_i tel que $||x - x_i|| < \frac{1}{2}$. Mais alors $2(x - x_i)$ est dans la boule unité, il existe donc x_j tel que $||2(x - x_i) - x_j|| < \frac{1}{2}$, et par conséquent $||x - x_i - x_j/2|| < \frac{1}{4}$. On obtient une suite de vecteurs de F qui converge vers x donc $x \in F$ ce qui conclut.

Autre démonstration : soit $e_1 \in S$. Supposons construit par récurrence $e_1, \ldots, e_n$ des points de S tels que $||e_i - e_j|| \geq 1$ pour tout $i \neq j$. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Le sous-espace vectoriel F est de dimension finie, donc fermé et différent de E. Soit $x \in E - F$, alors $d(x, F)$ est atteinte en $y \in F$ et $||x-y|| = d(x, F)$. Poser $e_{n+1} = \frac{x-y}{d(x,F)} \in S$ convient. On a donc même montré que S (la sphère unité) n'était pas compact (ce qui entraîne bien sûr que la boule unité fermée n'est pas compacte, car S est un fermé de cette boule).

Remarque : la réciproque est vraie : si la sphère unité S est compacte, alors c'est le cas de la boule unité fermée B. Soit u_n une suite de points de B. Si $0 \in \mathrm{Adh}(u)$ il n'y a rien à faire, sinon quitte à ré-indexer on peut supposer $u_n \neq 0$ quelque soit n, ce qui permet de poser $v_n = \frac{u_n}{||u_n||} \in S$. Comme $||u_n||$ est une suite réelle bornée, elle admet une valeur d'adhérence L, ne considérons que le terme d'une suite extraite associée. Par hypothèse S est compacte, donc quitte à extraire, on peut supposer $v_n \longrightarrow v \in S$. On a alors par une transformation d'Abel :

$$u_n - Lv = u_n \frac{u_n}{||u_n||} - Lv = ||u_n||(\frac{u_n}{||u_n||} - L) + \frac{u_n}{||u_n||}(L - ||u_n||)$$

et les deux termes tendent vers 0, ce qui conclut.

Lemme Si X est localement compact, tout point admet non seulement un voisinage compact, mais même un système fondamental de voisinages compacts. Soit $x \in X$, U un ouvert contenant X et K un voisinage compact de X. Comme X est séparé, l'intersection des voisinages fermés de x est réduite au singleton $\{x\}$, par conséquent $X - U \cap (\cap_V \overline{V}(x)) = \emptyset$. Par compacité de F, il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_n$ de X tels que $X - U \cap \overline{V_1} \cdots \cap \cdots \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Mais alors $\overline{V_1} \cdots \cap \cdots \cap \overline{V_n} \cap F$ est un voisinage fermé de x contenu dans U, ce qui conclut.

Corollaire : tout ouvert d'un espace localement compact le reste, en particulier si X est compact, $X - \{x\}$ est localement compact.

Compactifié d'Alexandrov À faire. Si X est localement compact, on considère $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ muni de la topologie donnée par les ouverts de X et par les ouverts de la forme $X - K \cup \{\infty\}$, où K est un compact de X. Alors $\hat{X}$ est un compact, et si X n'est pas compact alors X est dense dans $\hat{X}$. Remarquons que si X n'est pas localement compact, on ne peut pas garantir la séparation de $\hat{X}$. Prenons $\hat{\mathbb{Q}}$, alors ∞ est inséparable de tout point : un ouvert autour d'un point $q \in \mathbb{Q}$ contient nécessairement un intervalle, or un compact de $\mathbb{Q}$ ne peut contenir un intervalle, donc tout ouvert contenant ∞ rencontre tout ouvert contenant q.

Divers Applications propres : application fermée (envoie les fermés sur les fermés) telle que l'image réciproque de tout point est compacte.

Si f est propre, alors l'image réciproque de tout compact est un compact. Si Y est localement compact, la réciproque est vraie : une application est propre si et seulement l'image réciproque de tout compact est un compact.

Preuve : d'une part, supposons f propre et K un compact de Y, montrons que $f^{-1}(K)$ est compact. Ici il est plus pratique d'utiliser la caractérisation avec les intersections finies de fermés. Soit F_i une famille de fermés de $f^{-1}(K)$, alors $f(F_i)$ est un fermé de K (car f est propre donc fermée). Si $\bigcap_{J \subset I} F_i \neq \emptyset$, comme $f(\bigcap_{J \subset I} F_i) \subset \bigcap_{J \subset I} f(F_i)$, c'est que l'intersection correspondante dans $K \subset Y$ est non vide, et on sait qu'il existe alors $y \in \bigcap_I f(F_i)$. Mais alors $f^{-1}(y)$ est un compact, dont la rencontre avec les $\bigcap_{J \subset I} F_i$ n'est pas vide (J finie), c'est par conséquent encore le cas pour la rencontre avec l'intersection totale, qui ne peut ainsi être vide.

Réciproquement, supposons cette fois que Y est localement compact, et soit f qui admet un compact pour image réciproque de tout compact, montrons que f est propre. D'abord, l'image réciproque de tout point est bien un compact, puisque Y, étant localement compact, est *a fortiori* séparé et qu'un singleton de Y est un compact (donc a son image réciproque compacte par hypothèse). Montrons alors que f est fermée : soit F un fermé de X et considérons $y \in \overline{f(F)}$. Tout voisinage compact de y rencontre $f(F)$, et son image réciproque est donc un compact rencontrant F. Prenons W_i un système fondamental de voisinages compacts de y, contenus dans un voisinage compact fixé W. Toute intersection finie des W_i est contenue dans $f^{-1}(W)$ (compact) et voit sa pré-image rencontrer F, c'est donc le cas pour l'intersection totale, et ainsi $f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset$, donc $y \in f(F)$.

Cas particulier : $f : E \longrightarrow F$ est une application continue entre espaces vectoriels normés de dimension finie, f est propre si et seulement si f "sort de tout compact à l'infini" : si x_n diverge en module, c'est aussi le cas de $f(x_n)$.

4 Topologie fonctionnelle

Définition : Convergence uniforme, topologie induite par la distance associée sur $F(X,Y)$ (avec Y métrique).

Si Y est complet, alors $F(X,Y)$ est complet pour la distance uniforme. Stabilité des applications continues par convergence uniforme : si $z \mapsto f_z \in C(X,Y)$ converge uniformément vers f quand z tend vers a, alors f est continue. Ainsi $C(X,Y)$ est fermé pour la distance uniforme (prendre une suite dans l'exemple précédent) et est complet si Y est complet. Théorème d'interversion des limites (quand l'espace d'arrivée est complet).

Si E est un Banach sur un "corps valué non discret", et X un espace topologique, alors $\mathcal{C}_b(X,E)$ (espace des applications continues bornées de X dans E) est un espace de Banach (muni de la norme uniforme), et même une algèbre de Banach pour la multiplication point par point.

Définition : Convergence simple : si X est un ensemble et Y un espace topologique, on munit l'ensemble des applications de X dans Y de la topologie de la convergence simple : c'est simplement la topologie produit sur Y^X. Rappels de la topologie produit :

- Si Y est séparé, il en est de même de Y^X : si $f(x) \neq g(x)$, (choisir U et V deux ouverts séparant $f(x)$ et $g(x)$, considérer les ouverts élémentaires associés qui séparent f et g).
- Si X est indénombrable et si Y possède au moins deux points, un résultat déjà vu stipule que la topologie produit n'est pas métrisable, et qu'il en est donc ainsi de la convergence simple.

Premier Théorème de Dini Soit X un espace compact et f_n une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers f continue. Alors la convergence est uniforme.

Preuve : on utilise le théorème des fermés emboîtés dans un compact : soit $\epsilon > 0$ et $F_n = \{x \in X, d(f_n(x), f(x)) \ \geq \epsilon\}$. Par continuité des f_n et de f, F_n est un fermé de X, et la suite des fermés est décroissante car la suite f_n est monotone et converge simplement vers f. Comme $\cap F_n = \emptyset$, c'est que l'un des F_n est vide, ce qui conclut.

Remarque : Si X n'est pas compact, prendre $X = \mathbb{R}$ et f_n un escalier belge affine : il y a convergence décroissante simple vers 0, mais pas convergence uniforme.

Définition : Topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{F}(X,Y)$. Si Y est supposé métrique, c'est la topologie de "convergence uniforme sur tout compact". Si X est localement compact, la convergence pour la topologie compacte-ouverte d'une suite de fonction continue entraîne que la limite est continue. Si X est dénombrable à l'infini (il existe une suite de compacts qui recouvrent X), cette topologie est métrisable (prendre $2^{-n}\times$ la convergence uniforme sur K_n) et si Y est complet, alors $\mathcal{C}(X,Y)$ muni de la distance associée est complet.

Définition : Continuité uniforme : transforme les suites de Cauchy en les suites de Cauchy. Module de continuité uniforme. Théorème de Heine : si X et Y sont deux espaces métriques, avec X compact, toute application continue sur X est uniformément continue.

Remarque sur la curryfication : si X est un espace topologique, Y un espace topologique compact, E un Banach, alors l'opération de curryfication :

$$\Phi : \mathcal{C}_b(X \times Y, E) \longrightarrow \mathcal{C}_b(X, \mathcal{C}(Y,E))$$

est un "isomorphisme linéaire isométrique".

Théorème de prolongement Soit X et Y deux espaces métriques, avec Y complet, et A dense dans X. Une application uniformément continue de A dans Y se prolonge de façon unique en une application continue g de X dans Y, avec g uniformément continue (et même module de continuité que f ...).

Cela s'écrit bien avec le module de continuité uniforme $w_f(h) = \sup\{d(f(x), f(y), d(x,y) < h\}$. En effet, si $d(x,y) < h$, il existe deux points de A x' et y' tels que $d(x',y') < h$ et $d(g(x), g(x')) + d(g(y), g(y')) < \epsilon$ (ce pour un $\epsilon > 0$ fixé), donc $d(g(x), g(y)) \leq w_f(h) + \epsilon$ ce qui conclut en faisant tendre ϵ vers 0. (Sachant qu'une application est uniformément continue si et seulement si son module de continuité uniforme est continu en 0, i.e. tend vers 0 en 0).

Complété d'un espace métrique C'est essentiellement la même démonstration que pour le théorème d'Arens-Fells (qui stipule que tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé), sauf qu'au lieu de restreindre l'espace ambiant on considère l'adhérence de l'image (qui est complète comme fermé d'un espace de Banach) qui forme le complété de X.

Semi-continuité Soit X un espace topologique et f une application à valeurs dans la droite réelle étendue. f est dite semi-continue inférieurement en un point $x_0 \in X$ si pour tout λ inférieur à $f(x_0)$, f est localement au-dessus de λ. La fonction f est ainsi localement au-dessus de toutes les droites horizontales inférieures à sa valeur en x_0. Cela revient à dire que $\liminf f(x) \leq f(x_0)$ en x_0.

La semi-continuité est stable par plus d'opérations que la continuité :

1. Somme, maximum, minimum, produit (dans le cas positif)
2. Le sup d'une famille de fonction semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement !

La propriété 2. est nouvelle : il est faux de dire que le sup d'une famille de fonctions continues est continue. On obtient de plus le semi-résultat :

Soit X un espace topologique compact non vide et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application sci. Alors f atteint sa borne inférieure sur X.

4.1 Équicontinuité - Approximation uniforme

4.1.1 Équicontinuité

Soit X un espace topologique. On connaît les compacts des espaces vectoriels normés de dimension finie : ce sont les fermés bornés, mais qu'en est-il en dimension infinie, par exemple pour $E = \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$: quels en sont les compacts ? On sait qu'un compact est un précompact complet (dans le cadre d'un espace ambiant métrique, ce qui est le cas ici), et que les parties complètes d'un espace complet en sont les fermés. Notre question revient donc à : quels sont les parties précompacts de E ?

Si A est une partie précompacte, soit $x_0 \in X$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, soit η_n (on peut remplacer les η par des voisinages de x_0 dans le cas d'un espace topologique général) donné par la continuité en x_0 de la fonction f_n située au centre de la boule (d'indice n) de rayon ϵ telle que $\bigcup B(f_n, \epsilon) \supset A$. Comme les η_n sont en nombre fini, choisir $\eta = \min \eta_n$ garantit que :

$$\forall f \in A, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow (d(f(x), f(x_0)) \leq 3\epsilon$$

On est amené à définir la notion d'équicontinuité. Soit X un espace topologique, Y un espace métrique, une partie $A \subset \mathcal{C}(X,Y)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists U,\ \forall f,\ \forall x,\ x \in U \Longrightarrow d(f(x), f(x_0))$$

On a montré qu'une partie précompacte de E était nécessairement bornée et équicontinue. Remarquons qu'en supposant X compact, on même "uniformément équicontinue". Remarquons un cas simple qui se traite facilement : soit f_n une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f. Alors la partie $u(\mathbb{N}) \cup \{f\}$ est compacte, et on montre facilement son équicontinuité se ramenant à f par inégalité triangulaire.

Théorème d'Arzela-Ascoli Soit X un espace topologique compact et Y un espace métrique. Soit $A \subset \mathcal{C}(X,Y)$ une famille :

1. Équicontinue sur X
2. Telle que pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in A\}$ est d'adhérence compacte (i.e. son adhérence est contenue dans un compact, c'est le cas par exemple si $Y = \mathbb{K}$ et si la famille est bornée).

Alors A est précompacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ (pour la topologie métrisable de la convergence uniforme).

Preuve : Pour montrer que A est précompacte, on montre que de toute suite d'éléments de A on peut extraire une suite de Cauchy : soit f_n une suite d'éléments de A. On commence par construire la suite extraite sur une partie dénombrable, puis on utilise l'équicontinuité et la compacité pour se ramener (pour ϵ fixé) à une partie finie, ce qui permet d'étendre facilement la construction à X entier. Soit x_n une partie dénombrable dense.

Pour tout n, la suite $(f_k(x_n))_k$ est à valeurs dans un compact. Par le procédé d'extraction diagonal, il existe $\Psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f_{\Psi(k)}(x_n)$ converge pour tout n, et soit en particulier de Cauchy. Quitte à réindexer, supposons f_n de Cauchy.

On cherche maintenant à montrer que f_k elle-même est de Cauchy : pour cela il faut réduire l'étude à un nombre fini de points x_n : soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, l'équicontinuité de A en x assure l'existence d'un voisinage U_x de x sur lequel $f \in A$ s'écarte d'au plus ϵ. Extrayons du recouvrement $\{U_x\}$ un recouvrement fini (par compacité de X), puis par densité des x_n considérons uniquement, pour chaque U_x du nouveau recouvrement fini, un élément $x_n \in U_x$. Pour chacun de ces x_n, considérons le nombre N_n tel que $\forall l, m \geq N_n, d(f_l(x_n), f_m(x_n)) < \epsilon$ (la suite étant de Cauchy), soit $N = \max N_n$. On a :

$$\forall x \in X, \forall m, n \geq N, d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f_m(x')) + d(f_n(x), f_n(x')) + d(f_m(x'), f_n(x')) \leq 3\epsilon$$

Donc f_n est uniformément de Cauchy, ce qui était le résultat escompté. On en conclut, si Y est de plus supposé complet, que les parties compactes de $\mathcal{C}(X,Y)$ sont les parties vérifiant 1., 2. et qui sont de plus fermées.

Le "vrai" théorème s'énonce ainsi :

[Théorème d'Arzela-Ascoli] Soit X un espace topologique séparé et Y un espace métrique. Si A est une partie de $\mathcal{C}(X,Y)$:

1. Équicontinue
2. Telle que pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in A\}$ est d'adhérence compacte (i.e. son adhérence est contenue dans un compact, c'est le cas par exemple si $Y = \mathbb{K}$ et si la famille est bornée).

Alors A est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ pour la topologie compacte-ouverte.

4.1.2 Approximation uniforme

Lemme Il existe une suite de fonctions polynomiales P_n qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.

Preuve :

- Soit on utilise la méthode des Babyloniens, qui extrayaient la racine carrée par récurrence : $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$. [Remarque : on cherche $f(t)$ dont $\sqrt{x}$ soit un point fixe attractif : on peut choisir $f(t) = t + a(x - t^2)$ avec a bien choisi, par exemple tel que $|f'(t)| < 1$ sur l'intervalle considéré. Si l'on se fixe $[0, 1]$ comme intervalle, $a = \frac{1}{2}$ convient et permet de ne pas sortir de l'intervalle.] Il faut utiliser le théorème de Dini pour conclure à la convergence uniforme.
- Soit on triche et on considère le développement en série entière de $\sqrt{1 - (1 - t)} = \sqrt{t}$ tronqué à l'ordre n.

Cela permet d'approcher uniformément $t \mapsto |t|$ sur $[0, 1]$.

Ensembles réticulés On appelle un ensemble réticulé un espace partiellement ordonné $(X, <)$ telle que deux éléments de X possèdent toujours un infimum et un supremum dans X. Le théorème suivant est la clef de la démonstration :

Soit X un espace métrique compact, A une partie réticulée de $C^0(X, \mathbb{R})$ et $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ telle que pour tout couple de points $(x, y) \in K^2$, f est interpolée en x et y par une fonction de A. Alors f est dans l'adhérence de A.

Preuve : on remarque par récurrence que si A est réticulée, toute partie finie de A admet un supremum et un infimum dans A. Fixons $\epsilon > 0$.

- Soit $x \in X$ fixé, pour tout $y \in X$ il existe une fonction $g_{xy} \in A$ telle que (par continuité des éléments de A) $g_{xy}(t) \leq f(t) + \epsilon$ sur un voisinage ouvert V_{xy} de y. Recouvrons X par un nombre fini de V_{xy} (associé à un nombre fini de fonctions g_{xy}) et considérons l'infimum de ces fonctions (qui reste dans A) noté g_x. On a pour tout $t \in X$, $g_x(t) \leq f(t) + \epsilon$, et on a de plus $g_x(x) = f(x)$ (car c'est le cas pour toutes les fonctions g_{xy}).
- Dans un second temps, comme g_x est continue (puisque dans A), on a $g_x \geq f(x) - \epsilon$ sur un voisinage ouvert V_x de x. Recouvrons X par un nombre fini de V_x (associé à un nombre fini de fonctions g_x) et considérons le supremum de ces fonctions, noté g. On vérifie que $||g - f||_\infty < \epsilon$, ce qui conclut.

Théorème de Stone-Weierstrass Soit X un espace topologique compact et A une sous-algèbre unitaire séparante de $C^0(X, \mathbb{R})$. Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$. (Version moderne : soit X un espace topologique, toute sous-algèbre unitaire séparante de $C^0(X, \mathbb{R})$ est dense pour la topologie compacte-ouverte).

Preuve : Montrons plutôt que $B = \overline{A}$ est dense. Comme B est fermée (et que l'adhérence d'une sous-algèbre est une sous-algèbre), B est stable par valeur absolue (puisque d'après le lemme, la valeur absolue d'une fonction est la limite d'un polynôme en cette fonction, qui reste dans B si B est une algèbre), et par conséquent B est réticulée (puisque $\inf f, g$ et $\sup f, g$ s'expriment en fonction de f, g, et de la valeur absolue de leur différence, qui sont tous des éléments de B). Il suffit de voir que l'hypothèse A séparante garantit que B interpole toute fonction en deux points quelconques pour conclure.

Cas complexe, cas polynomial, cas des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ On vérifie que $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas une limite uniforme sur S^1 de polynômes, car $\int_{S^1} P(e^{it})e^{it} = 0$ tandis que $\int_{S^1} f(e^{it})e^{it} = 0$. Il faut rajouter que A est une sous-algèbre unitaire de $C^0(X, \mathbb{C})$ stable par conjugaison.

L'utilisation la plus courante du théorème est : soit $X \in \mathbb{R}^p$ un compact, l'ensemble des fonctions polynomiales (de p variables) est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Pour étudier les fonctions continues et 2π-périodiques, il faut se ramener à un compact, par le lemme suivant :

Un théorème de relèvement de l'angle Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, posons pour tout $z = e^{it} \in S^1$, $\varphi(z) = f(e^{it})$ (qui ne dépend pas de l'argument considéré). Vérifions que φ est continue : soit $u_n \longrightarrow z$, ainsi $\frac{u_n}{z} \longrightarrow 1$, écrivons le e^{it_n} avec $t_n \in [-\pi, \pi[$, et comme $\sin \frac{u_n}{z} \longrightarrow 0$, on a $\sin(t_n) \longrightarrow 0$, donc $t_n \longrightarrow 0$. Ainsi $\varphi(u_n) = f(t_n + t) \longrightarrow f(t) = \varphi(z)$.

Autres applications

- Séparabilité de $\mathbb{C}(X, \mathbb{K})$ (pour X métrisable, à base dénombrable d'ouverts, et pour la topologie compacte-ouverte). Considérer les fonctions distance au complémentaire d'un ouvert de la base, puis l'algèbre unitaire qu'elles engendrent et qui est séparante (considérer ensuite un sous-ensemble dénombrable dense de cette algèbre)
- Si X est un espace métrique dénombrable à l'infini, alors l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact est séparable (pour la norme uniforme). Considérer le résultat précédent, se restreindre à une suite exhaustive de compacte (via un théorème de séparation d'Urysohn) et conclure.
- Si X, Y sont deux espaces compacts, l'ensemble des applications à variables séparées ($\sum f_i(x)g_i(y)$) est dense dans $C(X, Y)$ pour la convergence uniforme.

4.2 Théorie de Baire

Définitions Soit X un espace topologique. Une partie A de X sera qualifiée de rare lorsqu'elle est contenue dans un fermé d'intérieur vide, et de maigre lorsqu'elle est contenues dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Le complémentaire d'une partie maigre est qualifié de résiduel. Un espace vérifie la propriété de Baire lorsque ses parties maigres sont toutes d'intérieur vide (i.e. une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide), ou encore lorsque ses parties résiduelles sont toutes denses (i.e. l'intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense).

Théorème de Baire Les espaces localement compact, les ouverts des espaces métriques complets, sont des espaces de Baire.

Lemme des fermés emboîtés dans les espaces complets Soit X un espace complet et F_n une suite décroissante de fermés non vides. Si F_0 est borné et si le diamètre de F_n tend vers 0, alors l'intersection des F_n est non vide et réduite à un singleton.

Preuve : construire une suite de Cauchy en prenant un point dans chaque F_n.

Preuve du théorème de Baire Cas des espaces localement compacts : exhiber une valeur d'adhérence. Cas des espaces complets : On considère une intersection dénombrable d'ouverts denses, et on montre que cette intersection rencontre chaque ouvert en utilisant le lemme des fermés emboîtés.

Extensions Un espace localement de Baire est un espace de Baire, un résiduel d'un espace de Baire est un espace de Baire, un ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire.

Remarque : en revanche, un fermé d'un espace de Baire n'est pas forcément un espace de Baire. On connaît un espace qui n'est pas de Baire : $\mathbb{Q}$, car l'union des singletons (fermés d'intérieur vide) n'est pas d'intérieur vide (de la même manière, un singleton de $\mathbb{R}$ est un fermé d'intérieur vide, donc une union dénombrable de singletons reste d'intérieur vide, ainsi $\mathbb{R}$ ne peut être dénombrable. Mais attention $\mathbb{Z}$ est un espace métrique dénombrable et de Baire (pour cause, il est complet), car les singletons ne sont pas d'intérieur vide). Plongeons $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}^2$, qui lui est de Baire : on obtient un résiduel d'un espace de Baire (à savoir $\mathbb{R}^2 - \{0\} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, la partie manquante étant contenue dans une droite qui est bien d'intérieur vide pour la topologie de $\mathbb{R}^2$) qui est donc de Baire, mais l'image de $\mathbb{Q}$, homéomorphe à $\mathbb{Q}$, en est un fermé.

L'image continue ouverte surjective d'un espace de Baire est un espace de Baire.

Soit X un espace de Baire et F_n une suite de fermés, avec $\cup F_n = X$. Nécessairement, l'un des F_n au moins est d'intérieur non vide (sinon ce serait le cas de X, ce qui est absurde), donc $\cup \mathring{F_n} \neq \emptyset$. On a même franchement mieux. Notons G_n la frontière de F_n : le fermé G_n est d'intérieur vide, il en va donc de même de l'union des G_n, par conséquent l'union des $\mathring{F_n}$, qui contient le complémentaire de l'union des G_n, est un ouvert dense.

$$\bigcup_n F_n = X \Longrightarrow \overline{\left(\bigcup_n \mathring{F_n} \right)} = X$$

Applications On se demande s'il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue uniquement sur $\mathbb{Q}$.

La remarque suivante s'impose : pour un espace métrique X et pour $f : X \longrightarrow Y$ (Y à base dénombrable d'ouverts), l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ouverts de X. Si A est l'ensemble des points de continuité de f et U_n une base dénombrable d'ouverts, on a :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X, f(x) \in U_n \Longrightarrow \exists r > 0, f(B(x,r)) \subset U_n\}$$

Et A s'écrit bien comme intersection dénombrable d'ouverts (question : qu'en est-il si on abaisse les hypothèses sur X ? sur Y ?).

Ainsi, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est continue exactement sur $\mathbb{Q}$, les rationnels seraient une intersection d'ouverts (nécessairement denses). Mais alors :

$$\mathbb{Q} = \bigcap_n O_n \Longrightarrow \mathring{\mathbb{Q}} = \bigcap_n \left(\mathring{O_n} \; = O_n \right) \Longrightarrow \emptyset = \mathbb{Q}$$

En revanche, on peut construire une fonction discontinue exactement en les rationnels (soit par une sommation, soit en prenant $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ et $f = 0$ sur les irrationnels).

Limite simple de fonctions continues Soit X et Y deux espaces métriques, X supposé de Baire, et soit f_n une suite de fonctions continues convergeant simplement vers f, soit A l'ensemble des points de continuité de f. Alors A est une partie résiduelle.

Preuve : on aimerait introduire, par habitude, $G_n = \{x, \forall m \geq n, |f_n(x) - f(x)| \;\leq \epsilon\}$ mais G_n n'a pas de raison d'être fermé, on poserait alors $F_n = \overline{G_n}$ pour obtenir des fermés... La bonne manière ici est de considérer $F_n(\epsilon) = \{x, \forall p \geq n, \forall q \geq n, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon\}$ qui est un fermé. Comme $\cup F_n(\epsilon) = X$, on sait que $\Omega(\epsilon) = \cup \mathring{F_n}(\epsilon)$ est un ouvert dense de X. Mais si $x \in \Omega(\epsilon)$, on a $B(x, \eta) \subset F_n(\epsilon)$ pour un certain entier n et un certain $\eta > 0$, et pour tout $y \in B(x,\eta)$, on peut estimer $|f(x) - f(y)|$ par $|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \geq 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(y)| \geq 3\epsilon$ pour y assez proche de x. On a donc, pour $x \in \bigcap \Omega(2^{-k})$ (qui est dense comme intersection dénombrable d'ouverts denses) l'identité $Osc_x(f) = 0$, ce qui est équivalent à $x \in A$, et A contient ainsi un ouvert dense, donc est résiduelle.

En guise d'application, on notera qu'une dérivée est continue presque partout au sens de Baire.

5 Analyse fonctionnelle

5.1 Différentes formes du théorème de Hahn-Banach

5.1.1 Forme analytique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-additive vérifiant $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour $\lambda > 0$. Si f est une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel F de E et dominée par p sur F, on peut étendre f en une forme linéaire définie sur E tout entier, et toujours dominée par p.

Preuve : on utilise le lemme de Zorn, pour cela on vérifie que toute partie inductive de l'ensemble des couples $(D(\varphi), \varphi)$ (où $D(\varphi)$ désigne le domaine de définition de la forme linéaire φ prolongeant f et dominée par p) est majorée. On considère donc un élément maximal g de cet ensemble, et on montre que $D(g) = E$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on considère x_0 hors du domaine de définition : il s'agit d'étendre g à la droite vectorielle engendrée par x_0, sous la forme $h'(x + \lambda x_0) = h(x) + \lambda h'(x_0)$: tout revient à choisir la bonne valeur pour $\alpha = h'(x_0)$. La contrainte réside dans la domination recherchée, on doit en effet avoir :

$$\forall x \in D(g),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ h(x) + \lambda\alpha \leq p(x + \lambda x_0)$$

On remarque qu'il suffit d'avoir cette domination pour $\lambda = \pm 1$, en écrivant ensuite que $h(x + \lambda x_0) = \lambda h(\frac{x}{\lambda} + x_0)$.

On est donc invité à poser $\alpha = \inf p(x + x_0) - h(x)$ où l'infimum est pris sur $D(g)$. Par sous-additivité de p, on a $p(x + x_0) - h(x) \geq p(x) - h(x) - p(-x_0)$ donc α est fini.

Conséquences Un bon choix de p donne :

1. Pour toute forme linéaire f définie sur F sous-espace vectoriel de E, il existe un prolongement de f à E tout entier qui conserve la norme de f. (Prendre $p(x) = ||f||_F ||x||_E$).
2. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une forme linéaire f de norme $||f||_{E'} = ||x||_E$ et telle que $||f(x)|| = ||x||^2$. (Utiliser 1. avec $f(x) = ||x||_E$ sur la droite vectorielle engendrée par x.)
3. En conclusion, la norme d'un vecteur de E coïncide avec le supremum des valeurs prises en ce vecteur par les formes linéaires de la boule unité de E', et ce supremum est atteint.

5.1.2 Forme géométrique

Lemme sur le noyau des formes linéaires On rappelle que le noyau d'une forme linéaire sur E est toujours de codimension 1. Si la forme linéaire est continue, son noyau est bien évidemment fermé. On se pose la question de la réciproque.

Norme adaptée à un sous-espace vectoriel fermé Soit E un espace vectoriel normé. Une famille (E_i) de sous-espaces vectoriels de E est dite en somme topologique lorsque E est la somme directe des E_i et que la projection sur chacun d'entre eux parallèlement à la somme des autres est continue. Si E_1 et E_2 sont en somme topologique, il est clair que les deux sont fermés (comme noyau de la projection continue parallèlement à eux-mêmes), mais la réciproque est fausse dans le cas général, et vraie si l'un des deux est de dimension finie.

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E (evn), et considérons l'application à valeurs positives $\nu(x) = d(x, E_1)$. On remarque que ν est sous-additive et homogène, donc une semi-norme, et qu'elle est dominée par la norme ambiante. Si E_1 est fermé, et si E_2 a une intersection triviale avec E_1, alors la restriction de ν à E_2 est une norme dominée par $|.|$. Si de plus E_2 est de dimension finie, l'équivalence des normes garantit que $\nu(x) \leq |x| \leq K\nu(x)$ pour un certain $K > 0$.

Soit alors E_1 un sous-espace vectoriel fermé et de codimension finie, soit E_2 un supplémentaire de E_1, soit p la projection sur E_2 parallèlement à E_1. On a pour tout $x \in E$:

$$|p(x)| \leq K\nu(p(x)) = Kd(p(x), E_1) \leq K|p(x) - (p - \mathrm{Id}_E)(x)| = K|x|$$

ce qui garantit que p est continue. La projection sur E_1 parallèlement à E_2 étant donnée par $\mathrm{Id} - p$, E_1 et E_2 sont bien en somme topologique.

Lemme dans le cas des espaces vectoriels normés Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) : son noyau est donc de codimension finie. Si u est continue, $\ker u$ est fermé, et réciproquement si $\ker u$ est fermé, comme il est de codimension finie, on sait d'après ce qui précède qu'il est en somme topologique avec chacun de ses supplémentaires. Soit E_2 un supplémentaire de $\ker u$, $\widetilde{u}$ l'isomorphisme entre u_2 et $\mathrm{Im} u$ (continu car E_2 est de dimension finie), et p la projection (continue) sur E_2 parallèlement à E_1. Alors $u = \widetilde{u} \circ p$ est continu.

Une forme linéaire étant en particulier de rang fini, elle est continue si et seulement si son noyau est un hyperplan fermé.

Si φ est continue, on a même pour tout x : $|\varphi(x)| = ||\varphi||d(x, \ker\varphi)$. Preuve : par double inégalité. D'une part on a $\varphi(x) = \varphi(x - u + u)$ pour tout $u \in \ker\varphi$, donc $|\varphi(x)| \leq ||\varphi|||x - u|$, et finalement en passant à l'inf, on a $|\varphi(x)| \leq ||\varphi||d(x, \ker\varphi)$. D'autre part, soit v non nul tel que $|\varphi(v)| = ||\varphi(v)|||v|$. Cette égalité est encore vraie en tout point de la droite vectorielle engendrée par v, qui ne peut en outre rencontrer $\ker\varphi$ qu'en 0. On en conclut qu'il existe v' sur cette droite vérifiant $\varphi(v') = \varphi(x)$ et $|\varphi(v')| = ||\varphi|||v'|$. Mais alors $|\varphi(x)| = ||\varphi|||x - u|$ où $u = x - v' \in \ker\varphi$, et par conséquent $|\varphi(x)| \geq ||\varphi||d(x, \ker\varphi)$.

Cela laisse penser que si φ n'est pas continue, on doit avoir $d(x, \ker\varphi) = 0$ partout, afin de garder une valeur finie pour $|\varphi(x)|$ malgré la divergence $||\varphi|| = +\infty$. En effet, soit $x \in E$ hors du noyau de φ. Pour tout $M > 0$, il existe $v \in E$, non nul et vérifiant $|\varphi(v)| \geq M|v|$. Cette identité est encore vérifiée en tout point de la droite vectorielle engendrée par v, qui ne peut en outre rencontrer $\ker\varphi$ qu'en 0. On en conclut qu'il existe v' sur cette droite vérifiant $\varphi(v') = \varphi(x)$ et $|\varphi(v')| > M|v'|$. Mais alors $|\varphi(x)| \geq M|x - u|$ où $u = x - v' \in \ker\varphi$, et par conséquent $|\varphi(x)| \geq Md(x, \ker\varphi)$, et ce pour tout $M > 0$, donc $d(x, \ker\varphi) = 0$.

Lemme dans le cas général des espaces vectoriels topologiques