L'entropie topologique

Un système dynamique modélise l'évolution, régie par des lois, d'un ensemble d'états, par exemple l'évolution dans le temps d'une population animale (l'ensemble des états étant alors le nombre d'individus, et les lois les diverses contraintes biologiques). On appellera ici *système dynamique* la donnée d'un ensemble X d'états, muni d'une distance d telle que (X, d) soit un espace métrique compact, et d'une fonction $T : X \to X$ continue. L'évolution d'un élément $x \in X$ est alors naturellement représentée par l'orbite de x sous T : $\{T^n(x), n \geq 0\}$. La notion d'entropie topologique, introduite en 1965, fournit un invariant topologique qui permet de caractériser une partie de la complexité d'un tel système. Après la définition et la mention des principales propriétés de l'entropie, on étudiera un résultat permettant son calcul dans certains cas particuliers : l'entropie de systèmes dynamiques réels monotones par morceaux peut être déterminée par à une comparaison symbolique portant sur les itinéraires des points critiques.

1 Qu'est ce que l'entropie topologique d'un système dynamique ?

1.1 Définition

L'entropie topologique par les ensembles (n, ϵ)-couvrants et séparés Cette définition est due à Bowen. Pour $n \geq 1$, on introduit la distance associée aux n premières itérées de T :

$$d_n(x, y) = \max_{i=0..n-1} d(T^i(x), T^i(y)) \tag{1}$$

et, pour tout $\epsilon > 0$, on dit que :

1. $S \subset X$ est (n, ϵ)-séparé si tous les éléments distincts de S sont espacés d'au moins ϵ pour d_n. On pose $s(n, \epsilon)$ le cardinal maximal d'un tel ensemble. Par compacité de X, cette valeur est finie.
2. $S \subset X$ est (n, ϵ)-couvrant si tout élément de X est à une distance strictement inférieure à ϵ d'un point de S pour d_n (autrement dit $\cup_{x \in S} B'_n(x, \epsilon) = X$). On pose $r(n, \epsilon)$ le cardinal minimal d'un tel ensemble.

La fonction $s(n, \epsilon)$ (resp. $r(n, \epsilon)$) est croissante (resp. décroissante) en ϵ, et on dispose de l'inégalité :

$$r(n, 2\epsilon) \geq s(n, \epsilon) \geq r(n, \epsilon) \tag{2}$$

On vérifie alors que l'entropie de T coïncide avec la limite commune suivante :

$$h(T) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon) \tag{3}$$

1.2 Commentaires

Cette définition de l'entropie permet de se la représenter : elle mesure à la fois la vitesse (exponentielle) à laquelle la fonction T sépare les orbites des points (croissance du nombre de points (n, ϵ) séparés) et la vitesse à laquelle le système est dispersé (croissance du nombre de points nécessaires à "couvrir" le système). Les applications 1-lipschitziennes ont une entropie nulle puisque, à ϵ fixé, un ensemble $(1, \epsilon)$-couvrant est (n, ϵ)-couvrant pour tout $n \geq 1$. En revanche, une dilatation de l'espace peut se traduire par une entropie positive, comme le montre l'exemple du doublement de l'angle sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui a une entropie $\log 2$. Si l'on suppose que le compact se "recouvre facilement" (c'est à dire que le cardinal d'un recouvrement par des boules de rayon au plus ϵ ne croît pas trop vite par rapport à ϵ) on peut majorer l'entropie d'une fonction lipschitzienne en constante $\times$ rapport de lipschitz, signe que l'hypothèse "lipschitzienne" permet de contrôler l'entropie (en particulier les fonctions C^1 sur un segment de $\mathbb{R}$ ont une entropie finie).

1.3 Propriétés utiles de l'entropie

Nous présentons maintenant quelques propriétés associées à l'entropie topologique qui facilitent son calcul.

Invariance par conjugaison L'entropie fut introduite comme un invariant par homéomorphisme des systèmes dynamiques. On a en effet, si $T_2 \circ f = f \circ T_1$, où f est un homéomorphisme de X_1 vers X_2 :

$$h(T_1) = h(T_2) \tag{4}$$

En particulier, remplacer la distance par une distance équivalente ne change pas l'entropie d'un système. Dans le cas où f n'est que surjective, seule l'inégalité $h(T_1) \geq h(T_2)$ reste valable, mais si l'on suppose également que le nombre d'antécédents par f est borné sur X_2 (f est "presque injective"), alors l'égalité demeure.

Entropie d'une itérée Si $n \geq 1$, on peut relier l'entropie de T à l'entropie de l'itérée n-ième via le théorème d'Abramov : $h(T^m) = mh(T)$. Une entropie non nulle d'une itérée entraîne donc une entropie non nulle de T, donc de toute itérée de T.

Simplification dans le cas des systèmes dilatants On peut restreindre le calcul de l'entropie à un certain $\epsilon > 0$ dans la définition, si ϵ est suffisamment petit pour permettre de distinguer toutes les orbites. On dit que T est ϵ-dilatante si pour tout couple de points distincts (x, y), on a $\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), T^n(y)) \geq \epsilon$. Dans ce cas, on a

$$h(T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon) \tag{5}$$

Si l'on peut expliciter l'entropie de quelques cas particuliers, les définitions ne semblent cependant pas permettre de calcul, même approché, dans le cas général.

2 Entropie topologique de systèmes dynamiques particuliers

On s'intéresse désormais à une classe précise de systèmes dynamiques : ceux définis sur un segment de $\mathbb{R}$, et monotones par morceaux. D'autres formules donnent, dans ce cadre, des définitions supplémentaires de l'entropie topologique, qui permettent la mise en œuvre d'un calcul informatique approché. On utilise ici des résultats exposés par les concepteurs de la *kneading theory* dans [4].

2.1 Fonctions monotones par morceaux sur $[0, 1]$

Notons $I = [0, 1]$. Une fonction continue $f : I \to I$ est *monotone par morceaux* si I peut s'écrire comme réunion finie de segments sur lesquels f est monotone (au sens large). Soit $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_m)$ une suite de $m+1$ signes alternés. On appelle *fonction m-modale de forme σ* une fonction monotone par morceaux $f : I \to I$ à qui l'on associe la suite des points $0 = c_0 < c_1 \ldots < c_{m+1} = b$ telle que f est monotone sur chaque segment $[c_i, c_{i+1}]$, croissante si $\sigma_i = +1$ et décroissante sinon. Le nombre m, si il est minimal, est appelé la *modalité* de f, on parlera en particulier des fonctions *unimodales* quand $m = 1$, *i.e.* qu'il n'y a que deux intervalles de monotonie. Les points c_i $(1 \leq i \leq m)$ sont appelés *points critiques* de f, et les $v_i = f(c_i)$ sont les *valeurs critiques*.

Symbolique Soit f monotone par morceaux et m-modale, de forme σ. On écrit $I = I_0 \cup C_1 \cup I_1 \ldots \cup C_m \cup I_m$ où les $C_j = c_j$ sont les points critiques et $I_0 = [0, c_1[$, $I_m =]c_m, 1]$, et I_j désigne l'intervalle $]c_j, c_j + 1[$, et on considère $\mathbf{U}$ l'ensemble des $2m + 1$ symboles I_j et C_j, que l'on munit d'un ordre "naturel" : l'ordre de la droite réelle. On définit alors *l'adresse* d'un point $x \in I$ comme étant l'unique symbole $\mathbf{A}(x)$ de $\mathbf{U}$ tel que $x \in \mathbf{A}(x)$ (notons que A est croissante) et son *itinéraire* comme la suite des adresses de ses itérées par f, à savoir $\mathbf{I}(x) = (\mathbf{A}(x), \mathbf{A}(f(x)), \ldots) \in \mathbf{U}^{\mathbb{N}}$.

Ordre sur les itinéraires Définissons un ordre $<$ sur $\mathbf{U}^{\mathbb{N}}$ par : $(A_0, A_1, \ldots) < (B_0, B_1, \ldots)$ lorsque, si k désigne le plus petit indice où les suites diffèrent, $A_k < B_k$ et le produit $\epsilon(A_0) \times \ldots \times \epsilon(A_{k-1})$ vaut $+1$ ou bien $A_k > B_k$ et ce produit vaut -1 (ϵ désigne ici la fonction qui à un intervalle I_j associe $+1$ ou -1 selon la monotonie de f ($\epsilon(I_j) = \sigma_j$) et à un point critique associe 0). La valeur du produit $\epsilon(A_0) \times \ldots \times \epsilon(A_{k-1})$ représente ainsi la monotonie de f^k. Cet ordre est partiel, car il n'est pas défini lorsque les deux itinéraires rencontrent des points critiques, ce qui peut advenir lorsque l'on compare deux suites provenant de fonctions différentes mais de même forme. Néanmoins, si l'on se limite à une seule fonction, la définition de l'ordre ne tombe en défaut que pour deux itinéraires identiques, et on a même

$$x \leq y \Rightarrow \mathbf{I}(x) \leq \mathbf{I}(y) \tag{6}$$

Kneading-Data et critères d'admissibilité d'un itinéraire On se limite dans ce paragraphe à des fonctions *ancrées*, laissant stable $\{0, 1\}$ (ce n'est en réalité pas restrictif dans le cadre de notre étude), et on pose $K_0 = \mathbf{I}(f(0))$, $K_{m+1} = \mathbf{I}(f(1))$. On introduit des itinéraires privilégiés : ceux des valeurs critiques, qui structurent en partie, du fait de la monotonie, le comportement de la fonction. Ainsi la suite $\mathbf{K}(f)$ des $K_j = \mathbf{I}(f(c_j))$, associée à la forme σ de f, forment la *kneading data* de f. On obtient alors des critères d'admissibilité d'un itinéraire par comparaison avec les *suites de kneading* : si l'itinéraire rencontre un point critique c_j, il doit s'identifier à K_j à partir de ce rang, et plus généralement l'inégalité 6 permet de donner des conditions nécessaires à la réalisation d'un itinéraire. Ces conditions ne sont pas suffisantes pour des suites infinies, mais on dispose du résultat suivant (en tronquant les *suites de kneading* considérées au rang convenable) :

Proposition 2.1 (Réalisation d'un itinéraire fini). *Soit $(I_{\alpha_1}, \ldots, I_{\alpha_k})$ une suite finie d'éléments (non critiques) de $\mathbf{U}$. Il existe x un point de I dont l'orbite sous f débute ainsi, si et seulement si, pour tout $1 \leq j \leq k$, la condition suivante est respectée :*
- *Si $\sigma_{\alpha_j} = +1$ alors $K_{\alpha_j} \leq (I_{\alpha_{j+1}}, I_{\alpha_{j+2}}, \ldots, I_{\alpha_k}) \leq K_{\alpha_j+1}$*
- *Si $\sigma_{\alpha_j} = -1$ alors $K_{\alpha_j+1} \leq (I_{\alpha_{j+1}}, I_{\alpha_{j+2}}, \ldots, I_{\alpha_k}) \leq K_{\alpha_j}$*

Une telle suite est appelée admissible.

Liens avec l'entropie topologique Pour une fonction f monotone par morceaux, on note c_n la modalité de f^n (le nombre *minimal* d'intervalles de monotonie) et V la variation totale de f (réalisée en prenant une subdivision en accord avec la monotonie). On établit les égalités suivantes :

$$h(f) = \limsup \frac{1}{n} \log c_n = \limsup \frac{1}{n} \log V(f^n) \tag{7}$$

Cette égalité "surprenante" permet de calculer directement l'entropie de fonctions dont la monotonie évolue simplement. On utilisera par la suite la famille des fonctions *tente* f_s pour $0 \leq s \leq 2$, qui sont unimodales :

$$f_s(x) = \begin{cases} s \times x = 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ s \times (1 - x) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pour ces fonctions, on remarque que h, vue comme fonction de s est continue (et même monotone) :
- Si $s \leq 1$, f_s envoie $[0, 1]$ dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On en déduit l'expression de f_s^n pour $n \geq 2$: $f_s^n(x) = s^n x$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f_s^n(x) = s^n(1 - x)$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Le nombre d'intervalles de monotonie reste alors constant, et on a $h(f_s) = 0$

– Si $s \geq 1$, f_s étant affine par morceaux de pente $\pm s^n$, on a sur $[0,1]$: $V(f_s^n) = s^n$ donc $h(f_s) = \log s$

Mais on peut également utiliser la première égalité pour montrer le lien suivant entre la *Kneading-theory* et l'entropie topologique. Rappelons que les itinéraires admissibles sont entièrement déterminés par $\mathbf{K}(f)$ d'après 2.1, et introduisons un ordre sur les les *kneading data* : $\mathbf{K}(f) \ll \mathbf{K}(g)$ lorsque pour tout $1 \leq i \leq m$, si $\sigma_i = +1$ alors $K_i(g) \leq K_i(f)$ et inversement si $\sigma_i = -1$.

Proposition 2.2 (Kneading data et entropie topologique)**.** *L'entropie topologique d'une fonction m-modale est déterminée par sa* kneading data*. Plus précisément :*

1. *En notant $A(f,k)$ le nombre d'itinéraires admissibles de longueur k pour f, on a :*

$$h(f) = \lim \frac{1}{n} \log(A(f,k)) \tag{8}$$

2. *Pour f et g deux fonctions* m-modales *de même forme, si $\mathbf{K}(f) \ll \mathbf{K}(g)$ alors $h(f) \leq h(g)$*

La première propriété exprime bien le lien direct entre *kneading data* et entropie topologique, et admet pour conséquence la deuxième propriété, car si $\mathbf{K}(f) \ll \mathbf{K}(g)$, la définition de l'ordre entraîne que tout itinéraire admissible au sens de 2.1 pour f l'est pour g.

3 Calcul effectif de l'entropie topologique

3.1 Algorithme adapté aux fonctions unimodales

On s'intéresse ici au calcul approché effectif de l'entropie topologique dans un cas simple : celui des fonctions unimodales, en s'appuyant sur le résultat théorique précédent. On présente un algorithme fondé sur la comparaison de *kneading data* avec des fonctions d'entropie connue (les fonctions *tente*), simple à implémenter.

Notations On définit comme précédemment l'itinéraire de c (point critique de T) comme le mot infini : $K(T) = K_1K_2\ldots$ ($K_n(T)$ désigne les N premiers caractères) où $K_i = \begin{cases} D & \text{si} \quad T^i(c) > c \\ C & \text{si} \quad T^i(c) = c \\ G & \text{si} \quad T^i(c) < c \end{cases}$

L'idée de l'algorithme est alors d'encadrer $K(T)$ par les itinéraires de fonctions "tente", dont l'entropie est connue, afin d'approcher $h(T)$ avec une précision arbitraire (quoique limitée par la précision du calcul informatique). Un tel encadrement est possible car l'entropie d'une fonction m-modale est majorée par $\log m$. Ici $h(T) \leq \log 2$, donc on peut trouver une fonction "tente" f_r telle que $h(T) \leq h(f_r)$.

Algorithme "théorique" On se fixe T une fonction unimodale de point critique c ainsi qu'une précision $\epsilon > 0$. Pour tout réel $1 \leq x \leq 2$ et tout entier $n \geq 1$, on notera $K_n(r)$ le mot $K_n(f_r)$ associé à la fonction "tente" f_r de pente r.

Étape 1 : Trouver un $M \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{M} < \frac{\epsilon}{2}$. Poser $\delta = \frac{1}{M}$.

Étape 2 : Trouver N le plus petit entier tels que les M mots $K_N(1), K_N(1+\delta), \ldots, K_N(1+M\delta) = K_N(2)$ soient distincts.

Étape 3 : Calculer $K_N(T)$

Étape 4 : Trouver R le plus grand entier tel que $K_N(1+R\delta) < K_N(f)$

Étape 5 : Renvoyer $h(T) = \log(1+(R+1)\delta)$

Commentaire L'étape 2 permet de déterminer le rang N garantissant l'efficacité de l'étape 4. Cette dernière repose en effet sur l'inégalité recherchée : $K_N(1+R\delta) < K_N(T) < K_N(1+(R+2)\delta)$, entraînant $\log(1+R\delta) \leq h(T) \leq \log(1+(R+2)\delta)$, ce qui garantit :

$$|h(T) - \log(1+(R+1)\delta)| \leq \log(1+\frac{2\delta}{1+R\delta}) \leq 2\delta < \epsilon \tag{9}$$

Si l'étape 2 n'est pas réalisée, on risque d'avoir par exemple $K_N(1+(R-1)\delta) < K_N(1+R\delta) = K_N(T) = K_N(1+(R+1)\delta) < K_N(1+(R+2)\delta)$ ce qui ne permet pas de conclure avec précision.

Le défaut de cet algorithme réside principalement dans cette étape, qui nécessite de comparer M séquences un (potentiellement) grand nombre de fois à chaque utilisation (ou du moins à chaque fois que ϵ varie). On préfère étudier empiriquement le nombre N assurant une bonne précision, c'est à dire une bonne séparation des différents itinéraires, puis procéder par dichotomie pour chercher la fonction "tente" d'entropie proche de $h(T)$.

Adaptation : recherche par dichotomie On se fixe toujours T une fonction unimodale de point critique c, ainsi qu'une précision $\epsilon > 0$. Ici, on choisit également une précision N qui remplace la recherche réalisée à l'étape 2 du précédent algorithme. Pour procéder par dichotomie, on introduit deux variables de pente s_1 et s_2. Initialement $s_1 = 1$ et $s_2 = 2$.

Étape 1 : Calculer $K_N(f)$

Étape 2 : Poser $s = \frac{s_1+s_2}{2}$, calculer $K_N(s)$

Étape 3 : Si $K_N(s) = K_N(f)$ ou si $\frac{s_2-s_1}{2} \leq \epsilon$ alors renvoyer $h(T) = \log s$. Sinon, étape 4.

Étape 4 : Si $K_N(s) < K_N(f)$ alors remplacer s_1 par s et garder s_2. Si $K_N(f) < K_N(s)$ alors remplacer s_2 par s et garder s_1. Recommencer l'étape 2.

Commentaire L'invariant de boucle est qu'en entrant à l'étape 3, on a toujours $\log s_1 \leq h(T) \leq \log s_2$. Si $s_2 - s_1 \leq \epsilon$ on obtient bien $h(T) \leq \log(1+\frac{s_2-s_1}{s_1}) \leq \epsilon$. Le choix de la précision N peut entraîner des erreurs lorsque le premier cas de sortie de boucle est vérifié : $K_N(T) = K_N(s)$: si N est trop petit la précision est faible. Pour déterminer ce choix, on peut mesurer empiriquement la précision obtenue en fonction du nombre de termes considérés dans le mot $K(T)$.
On présente en annexe quelques résultats obtenus avec cet algorithme.

3.2 Conclusion

Un tel algorithme, simple à implémenter, ne s'applique qu'aux fonctions unimodales. Pour des *modalités* plus grandes il est envisageable de l'étendre : les auteurs proposent d'ailleurs un algorithme adapté aux fonctions bimodales dans [6] (les fonctions *tente* sont remplacées par des fonctions analogues ayant trois intervalles de monotonie) mais il peut se produire que les comparaisons entre itinéraires échouent. Une approche différente, développée par exemple dans [7], consiste à se ramener au cas où la fonction monotone par morceaux envoie, selon une partition convenable de $I = [0,1]$, chaque intervalle sur une union d'autres intervalles : la fonction est alors interprétée comme un graphe orienté (les sommets étant les intervalles I_j et les arêtes la traduction de $I_j \subset f(I_k)$), et on peut relier l'entropie au rayon spectral de la matrice d'incidence. Cette approche plus générale nous a semblé généralement retenue pour calculer l'entropie, tant comme résultat théorique que comme résultat pratique.
Le tracé de l'entropie topologique permet de fournir un support visuel pour des études théoriques, portant par exemple sur la connexité des courbes isentropiques pour des familles à un ou deux paramètres de fonctions monotones par morceaux.

Références

[1] Katok, Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Press University 1995

[2] Pierre Berger et Emmanuel Chemla, *Entropie topologique*, Exposé de maîtrise, FIFMA 2002

[3] Pollicot *Dynamical Systems and Ergodic Theory* Cambridge University Press 1998

[4] Milnor, Tresser *On Entropy and Monotonicity for Real Cubic Maps*, arXiv : math/9809096

[5] Block, Keesling, Li, Peterson *An improved algorithm for computing topological entropy*, Journal of Statistical Physics vol. 55, 1989, p.929

[6] Block, Keesling *Computing the topological entropy of maps of the interval with three monotone pieces*, Journal of Statistical Physics vol. 66, 1992, p. 755

[7] Balmforth, Spiegel *The topological entropy of one-dimensional maps : approximations and bounds*, arXiv : chao-dyn/9309003v1