

ASPECTS MICROSCOPIQUES DES SYSTÈMES À INTERACTION LOGARITHMIQUE

THOMAS LEBLÉ

TABLE DES MATIÈRES

L'énergie libre du log-gas à l'échelle microscopique	1
1. Présentation des systèmes, motivations	1
2. Aspects macroscopiques : un résumé	4
3. Échelle microscopique : objets limites	7
Étude des minimiseurs	17
4. L'énergie contrôle les fluctuations	18
5. Construction de processus	20
6. Énergie intrinsèque et énergie électrique	23
Le processus Sine-beta comme unique minimiseur de l'énergie libre	26
7. Convexité par déplacement	26
8. Idée de la preuve	28
9. Régularité du processus et de l'énergie libre en la température	32
Références	35

L'énergie libre du log-gas à l'échelle microscopique

1. PRÉSENTATION DES SYSTÈMES, MOTIVATIONS

1.1. **Le log-gas en dimension 1 et 2.** Dans toute la suite on notera d la dimension, avec $d = 1$ ou 2 . Soit $N \geq 1$, on note $X_N := (x_1, \dots, x_N)$ un N -uplet de positions dans l'espace euclidien \mathbb{R}^d . Soit μ_0 une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , admettant une densité continue et à support compact par rapport à la mesure de Lebesgue, on note K_0 son support.

On s'intéresse à une *énergie logarithmique* $X_N \mapsto H_N(X_N | \mu_0)$ définie par :

$$(1.1.1) \quad H_N(X_N | \mu_0) := \frac{1}{2} \iint_{x \neq y} -\log |x - y| \left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N d\mu_0 \right)^{\otimes 2} (x, y).$$

L'interprétation habituelle est que x_1, \dots, x_N représentent des *particules* ponctuelles de même charge $+1$ et que $-N\mu_0$ est une densité continue de charges négatives. La charge totale du système formé de $\{ N \text{ particules positives de masse } 1 + \text{densité négative de masse } N \}$ est nulle. Le terme $-\log |x - y|$ représente un *potentiel d'interaction* logarithmique entre une charge placée en x et une charge placée en y . Ce potentiel est *répulsif* entre charges de même signe, car deux charges de même signe placées très proches ont une grande contribution positive à l'énergie. En particulier, H_N prend la valeur $+\infty$ si et seulement si deux charges ponctuelles occupent la même position.

Remarque 1. En développant la forme quadratique $\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N d\mu_0 \right)^{\otimes 2} (x, y)$ on peut ré-écrire l'énergie sous la forme suivante :

$$H_N(X_N | \mu_0) := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} -\log |x_i - x_j| + \sum_{i=1}^N N \int \log |x_i - y| d\mu_0(y) + \frac{N^2}{2} \iint -\log |x - y| d\mu_0(x) d\mu_0(y).$$

Le premier terme correspond à l'interaction par paires des charges ponctuelles, le dernier terme est une constante qui ne dépend que de μ_0 , et le terme du milieu revient à appliquer une certaine fonction $x \mapsto \int \log |x - y| d\mu_0(y)$ (qui ne dépend que de μ_0) à chaque charge ponctuelle. En remplaçant cette fonction par une fonction V plus générale, on peut considérer une famille d'énergie logarithmique "à poids" :

$$(1.1.2) \quad H_N^V(X_N) := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} -\log |x_i - x_j| + \sum_{i=1}^N N \cdot V(x_i) + \text{constante},$$

la constante ne jouant en fait aucun rôle.

On travaille avec un paramètre positif β appelé *température inverse*, et on introduit une mesure de probabilité $\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}$ sur $(\mathbb{R}^d)^N$ de la façon suivante : $\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $dX_N := dx_1 \dots dx_N$ donnée par :

$$(1.1.3) \quad \frac{d\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}}{dX_N} := \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0}} \exp(-\beta H_N(X_N | \mu_0)) \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N},$$

où $Z_{N,\beta}^{\mu_0}$ est la constante de normalisation appropriée, à savoir :

$$(1.1.4) \quad Z_{N,\beta}^{\mu_0} := \int_{K_0^N} \exp(-\beta H_N(X_N | \mu_0)) dX_N.$$

Remarque 2. Les particules sont contraintes par définition à vivre dans le compact K_0 . Comme il y a N telles particules, on distingue d'ores et déjà deux échelles de longueur :

- (1) L'échelle macroscopique, ou globale, d'ordre 1, qui correspond à la distance maximale entre deux particules.
- (2) L'échelle microscopique ou locale, d'ordre $N^{-1/d}$, qui correspond à la distance typique entre deux particules voisines.

Notre étude se concentre sur les propriétés du système à l'échelle microscopique.

Remarque 3. Dans le cas plus général d'une interaction à poids, on poserait

$$(1.1.5) \quad \frac{d\mathbf{P}_{N,\beta}^V}{dX_N} := \frac{1}{Z_{N,\beta}^V} \exp(-\beta H_N^V(X_N)),$$

où $Z_{N,\beta}^V$ est, de nouveau, la constante de normalisation. Notons que dans cette situation, on n'impose plus aux particules de vivre dans un compact. En particulier, pour garantir la convergence de l'intégrale définissant $Z_{N,\beta}^V$ il faut supposer que V croît assez vite à l'infini, par exemple comme une puissance positive du module. On dit alors que V est un potentiel (fortement) confinant.

Dans la terminologie empruntée à la physique statistique, $\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}$ est la *mesure de Gibbs canonique* et $Z_{N,\beta}^{\mu_0}$ la *fonction de partition*, tandis que le terme exponentiel est parfois appelé *facteur de Boltzmann*. La donnée de μ_0 (ou de V), de N et de β permettent de parler des *log-gas* en dimension 1 ou 2, auxquels on pensera le plus souvent comme étant une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^N$, distribuée selon la mesure de Gibbs définie ci-dessus.

1.2. Motivations. On parlera ici de deux principales motivations pour l'étude des log-gas : la physique statistique à l'équilibre et la théorie des matrices aléatoires.

1.2.1. Physique statistique. Le log-gas en dimension 2 a été étudié dans la littérature physique sous divers noms : "two-dimensional log-gas", "two-dimensional Coulomb gas", "two-dimensional jellium", et le plus souvent en tant que "**2DOCP**" (two-dimensional one-component plasma). L'analyse de ces systèmes est intéressante car l'interaction logarithmique est (un peu) singulière en 0, et surtout possède un caractère dit à *longue portée* car $\nabla \log$ décroît lentement à l'infini. Bien sûr, $r \mapsto \frac{1}{r}$ n'est intégrable à l'infini ni dans \mathbb{R} ni dans \mathbb{R}^2 , mais la divergence est pire dans le deuxième cas (tandis qu'à l'inverse, la singularité en 0 est pire en dimension 1 qu'en dimension 2).

En dimension 2, le noyau logarithmique est solution de

$$-\Delta(-\log) = 2\pi\delta_0,$$

c'est à dire qu'il s'agit (à une constante multiplicative près) de la solution fondamentale du Laplacien, aussi appelé *noyau de Coulomb*, d'où le terme "gaz de Coulomb". En dimension $d = 1$, il s'agit du

noyau de $\Delta^{1/2}$, qui n'est plus un opérateur local. Les difficultés techniques sont donc différemment réparties entre $d = 1$ et $d = 2$.

1.2.2. Matrices aléatoires. La théorie des matrices aléatoires présente des liens avec les systèmes à interaction logarithmique, principalement en dimension 1, on parle de “one-dimensional log-gas”, ou de β -ensemble. Cela résulte de la coïncidence accidentelle entre la loi jointe des valeurs propres de certaines matrices aléatoires et la loi jointe des particules d'un log-gas. En particulier :

- Pour des matrices hermitiennes à coefficients gaussiens complexes, les valeurs propres sont distribuées comme la mesure de Gibbs d'un log-gas avec $\beta = 2$.
- Pour des matrices symétriques à coefficients gaussiens réels, les valeurs propres sont distribuées comme la mesure de Gibbs d'un log-gas avec $\beta = 1$.
- Pour des matrices auto-duales à coefficients gaussiens quaternioniques, les valeurs propres sont distribuées comme la mesure de Gibbs d'un log-gas avec $\beta = 4$.
- Pour $\beta > 0$ général, il existe un modèle matriciel dont les valeurs propres sont distribuées comme la mesure de Gibbs d'un log-gas à température inverse β , voir [DE02].

Il s'agit, dans tous ces cas, du modèle à poids (1.1.5) avec pour V un potentiel quadratique.

Pour la dimension 2, il y a essentiellement une seule correspondance de ce type, entre la loi des valeurs propres de matrices non-hermitiennes à coefficients gaussiens complexes et la mesure de Gibbs d'un 2DOCP avec $\beta = 2$. Il est bon de remarquer que cette fois, si on remplace les coefficients gaussiens complexes par leurs analogues réels, on n'obtient plus la mesure de Gibbs pour $\beta = 1$.

1.3. Questions. Le but de notre étude est de caractériser les comportements typiques et atypiques de ces systèmes de particules. Pour cela, on se fixe généralement une *observable*, c'est-à-dire une application $X_N \mapsto \mathcal{O}_N(X_N)$ à valeurs dans un certain espace topologique Obs et on considère la loi de la variable aléatoire $\mathcal{O}_N(X_N)$, autrement dit le poussé-en-avant de la mesure de Gibbs par l'application \mathcal{O}_N . On cherche alors à répondre à tout ou partie des questions suivantes :

- Y a-t-il une limite en loi quand $N \rightarrow \infty$? Peut-on décrire cette limite, au-delà de sa simple existence? En particulier, la limite est-elle solution d'un principe variationnel ayant une interprétation physique?
- Si la limite existe, peut-on comprendre les fluctuations autour de la limite? Établir des inégalités de concentration? À l'inverse, peut-on déterminer la loi des valeurs extrêmes?

Comme exemples naturels d'observables, mentionnons :

- La plus petite distance entre deux particules. Le module de la particule la plus éloignée de l'origine.
- La *mesure empirique* $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$, observable privilégiée à l'échelle macroscopique.
- La configuration locale vue de l'origine $\sum_{i=1}^N \delta_{N^{1/d}x_i}$.
- Pour φ une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}^d , la statistique linéaire $\sum_{i=1}^N \varphi(x_i)$. On s'intéresse parfois à des fonctions tests φ assez lisses, mais un cas crucial est celui où φ est l'indicatrice d'un domaine Ω , la statistique linéaire associée consistant alors à “compter les points” dans Ω .
- Plus généralement, si $\varphi \in C_{\text{pm}}^0(\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d)$ est une fonction de k variables on peut considérer la statistique à k points

$$(1.3.1) \quad \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_k \leq N} \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Dans une perspective légèrement différente, on peut chercher à calculer les fonctions de corrélations à k points ($k = 1, \dots, N$) qui correspondent aux marginales à k points de la mesure de Gibbs. Connaître ces fonctions donne accès à de nombreuses propriétés du système (on peut par exemple calculer l'espérance des statistiques à k points en termes des fonctions de corrélation), mais la tâche se révèle, en pratique, extrêmement difficile, même pour de petites valeurs de k .

1.4. Quelques repères historiques.

1.4.1. Log-gas et matrices aléatoires. Le lien entre valeurs propres des matrices aléatoires et particules d'un gaz est mis en évidence dans les travaux de Wigner et Dyson (et Ginibre pour le cas de la dimension 2) au début des années 1960, on parle alors de la *log-gas analogy*. En 1995 l'article [BdMPS95] de Boutet de Monvel-Pastur-Shcherbina parle explicitement d'une *approche de mécanique statistique* pour l'étude des matrices aléatoires, et à utiliser l'intuition physique sous-jacente afin d'établir des résultats à l'échelle macroscopique. Bien entendu, on peut (ré-)interpréter nombre de travaux en

matrices aléatoires avec un vocabulaire et un point de vue physiques. Dans les années 2010, les travaux [SS12, SS15a, SS15b] de Sandier-Serfaty, trouvant leur origine dans l'étude de systèmes de vortex (en physique mathématique de la matière condensée) introduisent des outils adaptés à un traitement rigoureux et systématique de ces systèmes à l'échelle microscopique. Dans le monde des matrices aléatoires, l'étude microscopique a été menée depuis des décennies, culminant avec la preuve de *l'universalité* des statistiques locales (travaux de Tao-Vu, Bourgade-Erdős-Yau). Il est intéressant de noter que, si l'on cherche plutôt ici à appliquer une intuition physique à des problèmes de matrices aléatoires, réciproquement certaines méthodes développées dans le cadre de l'étude des valeurs propres aléatoires ont été importées avec succès dans le monde des log-gas, par exemple dans [BEY14] pour montrer l'universalité du comportement microscopique. Pour une présentation détaillée des liens entre ces deux sujets, l'ouvrage monumental [For10] fait référence.

1.4.2. Étude du 2DOCP dans la littérature physique. Dans la littérature physique (ainsi que certaines publications de chimie), les systèmes dits “de Coulomb” sont surtout étudiés dans le cas physiquement réaliste de la dimension 3, où l'interaction logarithmique $-\log|x-y|$ est remplacée par la “vraie” interaction de Coulomb $\frac{1}{|x-y|}$. C'est un système si naturel à considérer qu'il est difficile de dater son étude, à titre historique on peut mentionner les travaux de Debye-Hückel en 1923. L'intérêt pour le cas du 2DOCP se développe à la fin des années 1970 avec une série de travaux, tantôt numériques et tantôt théoriques, parmi lesquels on peut mentionner [AJ81] (voir [CL21] pour une liste commentée de références). La question centrale est celle de l'existence d'une transition de phase, que le consensus s'accorde à situer autour de $\beta \approx 140$, mais dont la nature exacte reste sujet à débat. L'intérêt pour cette question vient du fait qu'en dimension 2, un résultat théorique (le théorème de Mermin-Wagner) affirme que, sous certaines hypothèses techniques, il est impossible d'observer un ordre cristallin à longue portée, or les simulations numériques indiquent l'apparition d'une phase solide à température assez basse ($\frac{1}{\beta} < \frac{1}{140}$). L'étude mathématique de cette question reste pour le moment hors de portée.

1.5. Un point technique. Pour $\beta = 1, 2, 4$, en dimension $d = 1$, et pour $\beta = 2$ en dimension $d = 2$, c'est-à-dire dans les cas qui présentent un lien privilégié avec la théorie des matrices aléatoires, il existe des outils techniques spécifiques qui réduisent certaines questions importantes à des calculs (au moins en principe, ces calculs pouvant se révéler très délicats). En particulier, pour $\beta = 2$ en dimension $d = 1$ ou 2, le système est dit *déterminantal*, c'est-à-dire que les fonctions de corrélations à k points s'expriment comme un déterminant $k \times k$ faisant intervenir un certain noyau explicite. Plus généralement, en dimension 1, certaines méthodes (polynômes orthogonaux, modèles matriciels, ...) offrent une multiplicité d'angles d'attaque. Notre approche, qui s'inscrit dans la lignée des travaux de Sandier-Serfaty, privilégie le point de vue “ β arbitraire” et l'intuition physique sous-jacente. On cherche également à mener, autant que possible, les études pour $d = 1$ et $d = 2$ en parallèle, avec l'idée de pouvoir adapter certains outils à des interactions plus générales, en dimension quelconque.

2. ASPECTS MACROSCOPIQUES : UN RÉSUMÉ

2.1. Fonctionnelle d'énergie à l'échelle globale. Dans cette section, on mentionne les principaux résultats concernant l'étude des log-gas à l'échelle *macroscopique*. L'observable est ici la *mesure empirique* définie par :

$$(2.1.1) \quad \mu_N^{\text{emp}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i},$$

qui est une mesure de probabilités sur \mathbb{R}^d . On note $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de probabilités sur \mathbb{R}^d , muni de la topologie faible. C'est un espace polonais, et une distance particulièrement maniable qui métrise la topologie est la distance de 1-Wasserstein

$$\text{dist}(\mu, \mu') := \sup_{f, \|\nabla f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(d\mu - d\mu') \right|.$$

Au vu du problème considéré, il est naturel de distinguer dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ un nombre dénombrable de composantes qui correspondent aux mesures qui peuvent s'écrire comme une somme de N masses de Dirac, pour $N \geq 1$.

L'énergie $H_N(X_N | \mu_0)$ s'exprime facilement comme une fonction de la mesure empirique :

$$H_N(X_N | \mu_0) = N^2 \iint_{x \neq y} -\log|x-y| (d\mu_N^{\text{emp}} - d\mu_0)^{\otimes 2}(x, y)$$

On introduit la fonctionnelle $\mu \mapsto \mathcal{I}(\mu|\mu_0) := \iint_{x \neq y} -\log|x-y| (d\mu - d\mu_0)^{\otimes 2}(x, y)$, et on vérifie que \mathcal{I} est semi-continue inférieurement, à valeurs dans $[0, +\infty]$, avec $\mathcal{I}(\mu|\mu_0) = 0$ si et seulement si $\mu = \mu_0$. De plus on sait déjà que μ_0 a une densité continue, par conséquent si c'est aussi le cas pour μ alors la restriction à $\{x \neq y\}$ est sans effet sur la valeur de l'intégrale. On a

$$\mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0) = N^2 \mathcal{I}(\mu_N^{\text{emp}}|\mu_0),$$

il s'ensuit que $\min \mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0) \geq 0$, mais comme μ_N^{emp} est toujours une somme de masses de Dirac, elle ne peut être égale à μ_0 si bien que $\min \mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0)$ est strictement positif. On voit qu'il y a là un problème d'approximation de la mesure continue μ_0 par une mesure discrète, et on est amené à chercher une majoration raisonnable de $\min \mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0)$.

Lemme 1. *On a $\min \mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0) = O(N \log N)$. De plus, on peut trouver $C, c > 0$ et une configuration X_N° de points vérifiant la propriété suivante : toute configuration X_N qui satisfait $\|X_N^\circ - X_N\|_\infty \leq \frac{c}{N^{1/d}}$ est telle que $\mathbf{H}_N(X_N|\mu_0) \leq CN \log N$.*

Démonstration. Esquisons la preuve en dimension 1 : soit $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la fonction cumulative de μ_0 et soit G^{-1} un inverse à droite pour G . Posons $x_i^\circ = G^{-1}(i/N)$ pour $i = 0, \dots, N-1$. Comme la densité de μ_0 est bornée, deux points successifs sont distants d'au moins $\frac{c}{N}$, avec c qui ne dépend que de μ_0 . On découpe K_0 en N intervalles qui contiennent chacun exactement un point et reçoivent une masse $1/N$ de μ_0 . Une comparaison somme-intégrale montre alors que l'énergie $\mathbf{H}_N(X_N^\circ|\mu_0)$ est majorée par $CN \log N$, avec C qui ne dépend que de μ_0 , et que c'est encore le cas si on perturbe tous les points de X_N° d'une distance $\frac{c}{10N}$.

La preuve est similaire en dimension 2, le placement des points peut se faire en considérant d'abord la première marginale de μ_0 , puis en considérant un second transport le long de chaque tranche verticale dans l'esprit du réarrangement de Knothe-Rosenblatt. \square

2.2. Fonction de partition et bornes a priori sur l'énergie. On en tire une première conséquence pour la fonction de partition :

Corollaire 1.

$$(2.2.1) \quad \mathbf{Z}_{N,\beta}^{\mu_0} \geq \exp(-C(\beta, \mu_0)N \log N).$$

Démonstration. L'intégrande étant positive, on peut clairement écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{N,\beta}^{\mu_0} &= \int_{K_0^N} \exp(-\beta \mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0)) d\mathbf{X}_N \\ &\geq \int_{\{\|\mathbf{X}_N - X_N^\circ\|_\infty \leq \frac{c}{N^{1/d}}\}} \exp(-\beta \mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0)) \mathbf{1}_{\mathbf{X}_N \in K_0^N} d\mathbf{X}_N \\ &\geq \exp(-\beta CN \log N) \left(\frac{c}{N^{1/d}}\right)^{dN} \geq \exp(-C(\beta, \mu_0)N \log N). \end{aligned}$$

\square

Obtenir une telle *minoration* de la fonction de partition est une étape cruciale, qui permet d'obtenir des inégalités de concentration sur l'énergie, par exemple de la forme suivante :

Corollaire 2. *On a $\mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0) \leq N^{1+\frac{1}{100}}$ avec probabilité $1 - \exp\left(-\frac{\beta}{2}N^{1+\frac{1}{100}}\right)$, pour N assez grand.*

Démonstration. On écrit simplement que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{Z}_{N,\beta}^{\mu_0}} \int_{\{\mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0) > N^{1+\frac{1}{100}}\}} \exp(-\beta \mathbf{H}_N(\mathbf{X}_N|\mu_0)) \mathbf{1}_{\mathbf{X}_N \in K_0^N} d\mathbf{X}_N \\ \leq |K_0|^N \exp\left(-\beta N^{1+\frac{1}{100}} + C(\beta, \mu_0)N \log N\right) \\ = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{1}{100}} + C(\beta, \mu_0)N \log N + N \log |K_0|\right). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'observer que $-\beta N^{1+\frac{1}{100}} + C(\beta, \mu_0)N \log N + N \log |K_0|$ est majoré par $-\frac{\beta}{2}N^{1+\frac{1}{100}}$ pour N assez grand. \square

On n'a pas cherché ici à optimiser la formulation du résultat, mais cela suffit déjà à constater que $\mathcal{I}(\mu_N^{\text{emp}}|\mu_0) = N^{-2}\mathbf{H}_N(X_N|\mu_0) \rightarrow 0$ presque sûrement¹ quand $N \rightarrow \infty$, ce qui implique² la convergence faible de μ_N^{emp} vers μ_0 , presque sûrement.

2.3. Gamma-convergence en famille et principe de grandes déviations. On a donc montré avec le Lemme 1 que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \min \mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0) = 0 = \min \mathcal{I}(\cdot|\mu_0)$. On peut retrouver ce résultat comme conséquence d'un résultat plus général de Gamma-convergence.

Proposition 1. *La fonctionnelle $\frac{1}{N^2}\mathbf{H}_N(\cdot|\mu_0)$ converge vers la fonctionnelle $\mathcal{I}(\cdot|\mu_0)$ au sens de la Gamma-convergence. Cela signifie deux choses :*

- (1) *Si $\mu_N \rightarrow \mu$, alors $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2}\mathbf{H}_N(\mu_N|\mu_0) \geq \mathcal{I}(\mu|\mu_0)$ (la "T-lim inf").*
- (2) *Pour μ fixé, on peut trouver $\mu_N \rightarrow \mu$ tel que $\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2}\mathbf{H}_N(\mu_N|\mu_0) \leq \mathcal{I}(\mu|\mu_0)$ (la "T-lim sup").*

La preuve est faite, par exemple, dans [Ser15, Chapter 2]. La première partie repose essentiellement sur un argument de convergence dominée, avec les manipulations qui s'imposent pour tenir compte de la singularité du noyau en 0. La seconde partie, en revanche, réclame la construction (plus ou moins explicite) d'une *recovery sequence* $\{\mu_N\}_{N \geq 1}$ pour chaque μ donné, comme ce qu'on a esquissé plus haut dans le cas $\mu = \mu_0$.

Voyons quel type d'information on peut déduire de la Gamma-convergence. Fixons μ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et demandons-nous quelle est la probabilité d'observer μ_N^{emp} près de μ . Pour être précis, on fixe $\varepsilon > 0$ et on regarde la probabilité d'observer μ_N^{emp} dans une boule $B(\mu, \varepsilon)$ au sens (par exemple) de la distance de Wasserstein mentionnée plus haut. C'est donné par :

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}(\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0}} \int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \exp(-\beta \mathbf{H}_N(X_N|\mu_0)) \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N.$$

On a $\mathbf{H}_N(X_N|\mu_0) = N^2 \mathcal{I}(\mu_N^{\text{emp}}|\mu_0)$ et par semi-continuité inférieure, si $\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)$ on voit que

$$\mathbf{H}_N(X_N|\mu_0) \geq N^2 (\mathcal{I}(\mu|\mu_0) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)).$$

On peut donc majorer la probabilité considérée de la façon suivante :

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}(\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)) \leq \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0}} \exp(-\beta N^2 (\mathcal{I}(\mu|\mu_0) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1))) \int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N.$$

La dernière intégrale a une interprétation probabiliste : tirons N points au hasard selon la loi uniforme sur K_0 , quelle est la probabilité que leur mesure empirique soit dans $B(\mu, \varepsilon)$? C'est, à une constante $|K_0|^N$ de normalisation près, la quantité

$$\int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N.$$

Bien entendu, la loi des grands nombres que la mesure empirique d'un N -échantillon de N points indépendants et uniformes dans K_0 devrait ressembler à la mesure uniforme sur K_0 , le fait de ressembler à autre chose est une (grande) *déviations*. Ces questions sont bien comprises, et le théorème de Sanov indique que

Théorème 1 (Sanov).

$$(2.3.1) \quad \int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N = \exp(-N (\text{Ent}(\mu|dx) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)) + N \log |K_0|),$$

où $\mu \mapsto \text{Ent}(\mu|dx)$ est la fonctionnelle *d'entropie relative* par rapport à la mesure de Lebesgue, définie par :

$$(2.3.2) \quad \text{Ent}(\mu|dx) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{d\mu}{dx} \right) \log \left(\frac{d\mu}{dx} \right) dx,$$

si μ est absolument continue et $+\infty$ sinon. L'entropie relative est une fonctionnelle semi-continue inférieurement, à valeurs dans $[0, +\infty]$.

1. Pour la mesure produit $\bigotimes_{N=1}^{+\infty} \mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}$, par le lemme de Borel-Cantelli.

2. En combinant le fait que toute suite de mesures de probabilité à support dans K_0 est tendue avec la semi-continuité inférieure de \mathcal{I} .

Finalement, on obtient une *majoration* de la probabilité de l'événement $\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}$ par la quantité suivante :

$$(2.3.3) \quad \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0} \exp(-N \log |K_0|)} \exp(-\beta N^2 \mathcal{I}(\mu|\mu_0) - N \text{Ent}(\mu|dx) + N^2 o_\varepsilon(1) + N o_\varepsilon(1)).$$

Omettons un instant de remarquer que les deux termes d'énergie et d'entropie ont des ordres différents, et posons-nous la question de l'inégalité inverse. Comment peut-on minorer la probabilité du même événement ? On en revient à la formule

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}(\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0}} \int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \exp(-\beta H_N(X_N|\mu_0)) \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N.$$

Le théorème de Sanov nous donne une estimée sur le volume $\int_{\{\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N$, mais parmi les configurations qui contribuent à ce volume, c'est-à-dire les N -uplets X_N dont la mesure empirique est ε -proche de μ , il est vain d'espérer que l'énergie $H_N(X_N|\mu_0)$ soit majorée par $N^2(\mathcal{I}(\mu|\mu_0) + o_\varepsilon(1))$, ou même majorée par quoi que ce soit, il suffit pour s'en convaincre d'imaginer un N -uplet dont la mesure empirique épouse presque parfaitement la densité de μ , puis de le doubler en un $2N$ -uplet où chaque point apparaît deux fois. La mesure empirique reste à la même distance de μ , mais l'énergie logarithmique est infinie. Certes, la seconde partie de la proposition 1 nous garantit l'existence d'une *recovery sequence*, c'est-à-dire qu'on pourra trouver au moins un N -uplet X_N tel que $\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, o_N(1))$ et qui satisfait $\mathcal{I}(\mu_N^{\text{emp}}|\mu_0) \leq \mathcal{I}(\mu|\mu_0) + o_N(1)$, mais la contribution de ce seul élément à l'intégrale est nulle. On voit qu'il faut donc améliorer le résultat de Γ -lim inf et construire non pas une seule *recovery sequence* mais une *famille* $\mathcal{A}_N^{\text{recov}}$ de N -uplets qui vérifient :

— Les mesures empiriques sont uniformément proches de μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{X_N \in \mathcal{A}_N^{\text{recov}}} \text{dist}(\mu_N^{\text{emp}}, \mu) = 0.$$

— Les énergies logarithmiques sont uniformément proches de celle de μ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{X_N \in \mathcal{A}_N^{\text{recov}}} (\mathcal{I}(\mu_N^{\text{emp}}|\mu_0) - \mathcal{I}(\mu|\mu_0)) = 0.$$

On veut de plus une minoration non-triviale du volume de $\mathcal{A}_N^{\text{recov}}$, qui entraînera une minoration intéressante de $\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}(\mu_N^{\text{emp}} \in B(\mu, \varepsilon))$. Idéalement, on aimerait trouver autant (à l'échelle logarithmique) de N -uplets dans $\mathcal{A}_N^{\text{recov}}$ que de N -uplets dont les mesures empiriques sont proches de μ , c'est-à-dire :

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{X_N \in \mathcal{A}_N^{\text{recov}}} dX_N \geq \exp(-N(\text{Ent}(\mu|dx) + o_{\varepsilon \rightarrow 0}(1)) + N \log |K_0|),$$

ce qui demande un contrôle fin du volume. Dans le cas présent, en revenant à (2.3.3) et en ouvrant cette fois les yeux, on s'aperçoit que le volume joue un rôle négligeable par rapport à l'énergie, et qu'il suffit pour obtenir l'inégalité inverse correspondante de construire une famille telle que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{X_N \in \mathcal{A}_N^{\text{recov}}} dX_N \geq \exp(-o(N^2)),$$

ce qui peut être établi par une construction à la main, dans l'esprit du Lemme 1. On obtient en fait une famille dont le volume est minoré par $\exp(-CN \log N)$, ce qui convient.

3. ÉCHELLE MICROSCOPIQUE : OBJETS LIMITES

3.1. Le processus empirique. On a appris précédemment que la mesure empirique des particules, objet global, converge faiblement vers μ_0 (presque sûrement). Prenons par exemple $d = 2$, et pour μ_0 la mesure uniforme sur $[0, 1]^2$, dans ce cas les points x_1, \dots, x_N vont typiquement s'arranger de manière à créer une densité uniforme dans le carré. Ce résultat ne *dépend pas* de β (seule la vitesse de concentration de μ_N^{emp} autour de μ_0 varie, linéairement, avec β). Néanmoins, il existe de nombreuses manières pour N points dans $[0, 1]^2$ de s'arranger à l'échelle microscopique tout en garantissant que la densité macroscopique soit presque uniforme. On peut penser à deux extrêmes : "l'ordre", correspondant à des points répartis sur un réseau de pas $\frac{1}{\sqrt{N}}$, et le "désordre", correspondant à une réalisation typique d'un processus de Bernoulli, c'est-à-dire N points jetés uniformément au hasard sur le carré.

L'étude de l'échelle microscopique est motivée par une observation expérimentale : quand $\beta \gg 1$ les particules d'un 2DOCP *vues à l'échelle microscopique* semblent s'arranger de façon rigide, tandis

que pour $\beta \ll 1$ leur comportement semble poissonien. Expliciter et dans la mesure du possible comprendre cette dépendance devient alors notre objectif. Pour accéder à l'échelle locale $N^{-1/d}$, il nous faut appliquer une homothétie de rapport $N^{1/d}$. On note

$$x'_1 = N^{1/d}x_1, \dots, x'_N = N^{1/d}x_N, \quad X'_N = (x'_1, \dots, x'_N), \quad K_0' = N^{1/d}K_0,$$

et μ_0' le poussé en avant de μ_0 par $x \mapsto N^{1/d}$. La mesure μ_0' a pour support K_0' et masse N .

La définition de l'observable *microscopique* va demander un peu de travail. Au N -uplet de points X'_N vus à l'échelle locale on peut associer la mesure purement atomique

$$(3.1.1) \quad \mathcal{C}_{N, \bar{0}} := \sum_{i=1}^N \delta_{x'_i},$$

à valeurs dans l'espace **Config** des *configurations de points* dans \mathbb{R}^d . Formellement, **Config** est un sous-ensemble des mesures de Radon, ce qui signifie en particulier que les configurations sont toujours *localement finies*, et **Config** admet une partition naturelle de la forme

$$\mathbf{Config} = \bigsqcup_{N \geq 1} \mathbf{Config}_N \sqcup \mathbf{Config}_\infty,$$

où l'on distingue les configurations à N points ($N \geq 1$) et les configurations infinies. La topologie sur **Config** est héritée de la topologie dite *vague* sur les mesures de Radon, c'est la topologie initiale pour les statistiques linéaires de fonctions continues à support compact, c'est-à-dire la plus petite topologie sur **Config** telle que

$$\mathcal{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mathcal{C}(x)$$

soit continue pour chaque fonction³ test $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 2. *Muni de cette topologie, **Config** est un espace polonais : métrisable, séparable, complet. Pour toute suite croissante $\{C_n\}_{n \geq 1}$ de réels positifs, l'ensemble des configurations \mathcal{C} telles que le nombre de points de \mathcal{C} dans⁴ \square_n est borné par C_n pour tout $n \geq 1$ est une partie compacte de **Config**.*

Démonstration. Les résultats généraux sur les configurations de points (et leur versant aléatoire) peuvent se trouver dans [DVJ03]. Le résultat de compacité est simplement une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass appliqué dans chaque boîte \square_N , qui assure l'existence à extraction près de suites de configurations locales convergentes, combiné avec un procédé d'extraction diagonale pour produire une suite de configurations *globales*. \square

Il est important de constater que la topologie sur **Config** est de nature *locale*, au sens où deux configurations peuvent être arbitrairement proches et néanmoins différer complètement sur le complémentaire d'une boule. L'avantage de cette topologie est qu'elle permet, par exemple, de donner un sens au fait qu'une suite de configurations finies de points peut converger vers une configuration limite infinie. En revanche, on s'aperçoit que la donnée de $\mathcal{C}_{N, \bar{0}}$ comme en (3.1.1) est une information fragile : connaître $\mathcal{C}_{N, \bar{0}}$ à une petite erreur près (au sens de la topologie de **Config**) ne donne qu'une information partielle sur le N -uplet de points sous-jacent. Pour être plus précis : si on fixe $\mathcal{C} \in \mathbf{Config}$ et qu'on dispose de l'information $\mathcal{C}_{N, \bar{0}} \in B(\mathcal{C}, \varepsilon)$ pour ε très petit mais fixé, alors on peut affirmer que les configurations $\mathcal{C}_{N, \bar{0}}$ et \mathcal{C} se ressemblent beaucoup *dans une grande boîte fixée* (qui dépend de ε), mais on ne peut rien inférer concernant la position des points en-dehors de cette boîte. Cela est dû au fait que $\mathcal{C}_{N, \bar{0}}$ encode le système vu à l'échelle microscopique *près d'un point particulier*, puisqu'on a implicitement appliqué une homothétie *de centre* 0. Afin de compléter notre observable, on introduit pour chaque $\bar{x} \in K_0$ la configuration microscopique *vue près de \bar{x}* comme étant

$$(3.1.2) \quad \mathcal{C}_{N, \bar{x}} := \sum_{i=1}^N \delta_{N^{1/d}(x_i - \bar{x})},$$

et on forme ensuite le *champ empirique*⁵ $\mathbf{P}_N^{\text{emp}}$ de la manière suivante :

$$(3.1.3) \quad \mathbf{P}_N^{\text{emp}} := \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} \delta_{\mathcal{C}_{N, \bar{x}}} d\bar{x}.$$

3. On peut se limiter à la famille des fonctions tests lisses à support compact, qui engendrent la même topologie initiale.

4. Ici et dans la suite on note $\square_r := [-r, r]^d$ pour $r > 0$.

5. En anglais *empirical field*.

Le champ empirique est une observable à valeurs dans l'espace $\mathcal{P}(\text{Config})$ des lois de configurations aléatoires. Il admet une interprétation probabiliste qui peut être éclairante : fixons X_N et tirons \bar{x} au hasard, uniformément dans K_0 , puis *zoomons* d'un facteur $N^{1/d}$ autour de \bar{x} , alors P_N^{emp} est la loi de la configuration microscopique obtenue. Il est bon d'insister sur le fait que P_N^{emp} est une observable, et qu'on s'intéresse en fait à la loi de P_N^{emp} quand X_N est distribuée selon la mesure de Gibbs du log-gas. Dans la définition de P_N^{emp} , on a négligé une information, à savoir le centre de l'homothétie, que l'on peut en fait inclure dans une observable augmentée : le champ empirique *étiqueté*

$$(3.1.4) \quad \bar{P}_N^{\text{emp}} := \frac{1}{|K_0|} \int_{K_0} \delta_{(\bar{x}, \mathcal{C}_{N, \bar{x}})} d\bar{x},$$

à valeurs dans $\mathcal{P}(K_0 \times \text{Config})$, avec une première marginale qui est simplement la mesure uniforme sur K_0 . On choisit \bar{P}_N^{emp} comme observable microscopique, et on cherche à en caractériser le comportement typique quand $N \rightarrow \infty$.

Les champs empiriques sont des objets classiques dans l'étude mathématique de la mécanique statistique, ils permettent d'encoder *l'information microscopique moyenne*. Ils possèdent notamment une bonne propriété de stationnarité : tout point limite de P_N^{emp} pour la topologie faible sur $\mathcal{P}(\text{Config})$ est un processus ponctuel *stationnaire*, c'est-à-dire invariant en loi sous l'action de \mathbb{R}^d sur Config par translations.

À partir de maintenant, afin d'alléger les formules, on supposera que $|K_0| = 1$.

3.2. Entropie relative spécifique. On note Π la loi du processus de Poisson d'intensité 1 sur \mathbb{R}^d .

Lemme 3. *Soit P un processus ponctuel stationnaire. La limite suivante existe :*

$$(3.2.1) \quad \mathcal{E}(P) := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\square_R|} \text{Ent}(P_{\square_R} | \Pi_{\square_R}),$$

et de plus on a l'identité

$$(3.2.2) \quad \mathcal{E}(P) = \sup_{R > 0} \frac{1}{|\square_R|} \text{Ent}(P_{\square_R} | \Pi_{\square_R}).$$

Démonstration. On utilise la représentation suivante de l'entropie relative sous forme variationnelle : si μ, ν sont deux mesures de probabilité sur le même espace mesurable X on a l'égalité

$$\text{Ent}(\mu | \nu) = \sup \{ \mathbf{E}_\mu[f] - \log \mathbf{E}_\nu[e^f], \quad f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable bornée} \}.$$

On en déduit aisément que $R \mapsto \text{Ent}(P_{\square_R} | \Pi_{\square_R})$ est une fonction croissante, et même que l'entropie est additive au sens où

$$\text{Ent}(P_{A \cup B} | \Pi_{A \cup B}) = \text{Ent}(P_A | \Pi_A) + \text{Ent}(P_B | \Pi_B).$$

En dimension 1, en utilisant le caractère stationnaire de P et Π il s'ensuit que la fonction $R \mapsto \text{Ent}(P_{\square_R} | \Pi_{\square_R})$ est sur-additive, ce qui garantit l'existence de la limite (3.2.1) et l'identité (3.2.2) d'après un lemme classique de Fekete. Le cas de la dimension 2 nécessite une adaptation élémentaire de la preuve. \square

La caractérisation de \mathcal{E} à l'aide d'une borne supérieure comme en (3.2.2) permet en outre de conclure que l'entropie relative spécifique est semi-continue inférieurement sur PP_{stat} , prend des valeurs positives ou nulles et ne s'annule que si $P = \Pi$.

3.3. Énergie logarithmique en volume infini. Définir l'analogie de l'énergie (1.1.1) en volume infini, c'est-à-dire quand, formellement, $N = +\infty$ est une tâche délicate. On utilisera ici le formalisme des champs électriques, mis en places par Sandier-Serfaty pour définir leur *énergie renormalisée*. Crucial en volume infini, ce formalisme provient en fait d'une ré-écriture de l'énergie à N fini.

3.3.1. Ré-écriture de l'énergie en volume fini. Commençons par exprimer H_N en fonction des quantités adaptées à l'échelle microscopique, on obtient après un changement de variable $x'_i = N^{1/d} x_i$, l'identité :

$$(3.3.1) \quad H_N(X_N | \mu_0) = F_N(X'_N | \mu'_0) - \frac{N \log N}{d},$$

où $F_N(X'_N | \mu'_0)$ est l'énergie d'interaction logarithmique à l'échelle locale

$$(3.3.2) \quad F_N(X'_N | \mu'_0) := \frac{1}{2} \iint_{x \neq y} -\log |x - y| \left(\sum_{i=1}^N \delta_{x'_i} - d\mu'_0 \right) (x) \left(\sum_{i=1}^N \delta_{x'_i} - d\mu'_0 \right) (y).$$

Pour simplifier l'écriture, on utilisera la notation $M_N := \sum_{i=1}^N \delta_{x'_i} - \mu_{0'}$, il s'agit d'une mesure signée de masse totale nulle et de support compact K_0' (dont le diamètre est $O(N^{1/d})$). On introduit deux objets ayant un sens physique naturel :

— Le *potentiel électrostatique* Pot. Il s'agit d'un champ scalaire défini par

$$(3.3.3) \quad \text{Pot}(z) := \int_{K_0'} -\log |z - x| dM_N(x),$$

qui correspond physiquement au champ généré par la distribution de charges M_N .

— Le *champ électrique* $E = \nabla \text{Pot}$. Il s'agit d'un champ de vecteurs qui dérive⁶ du potentiel Pot, et admet l'expression

$$(3.3.4) \quad E(z) := \int_{K_0'} -\nabla_z \log |z - x| dM_N(x).$$

Remarque 4. Ici et dans toute la suite, on traite Pot et E comme des champs définis sur \mathbb{R}^2 et ce même dans le cas où l'on étudie un log-gas unidimensionnel.

Lemme 4. Le champ électrique E est dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour $1 \leq p < 2$, mais manque d'être dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ au voisinage de chaque charge ponctuelle. De plus, $|E(z)| \leq \frac{C(N, \mu_0)}{|z|^2}$ pour $|z| \rightarrow \infty$, avec une constante C qui dépend de N, μ_0 mais pas de la position des charges ponctuelles au sein de K_0 .

Démonstration. Il est facile de voir que E est en fait continue sur le complémentaire des charges ponctuelles, et diverge comme $\frac{1}{|z-x'_i|}$ près de chacune, ce qui dicte son appartenance à $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour $p < 2$ mais pas pour $p = 2$. Pour l'intégrabilité à l'infini, il faut observer que si $|z|$ est grand devant la taille du système, un simple développement de Taylor au premier ordre $\nabla_z \log |z - x| = \frac{z}{|z|^2} + O(|x|) \frac{1}{|z|^2}$ entraîne que

$$E(z) = \left(\int_{K_0'} dM_N(x) \right) \times \frac{z}{|z|^2} + \left(\int_{K_0'} O(|x|) dM_N(x) \right) \frac{1}{|z|^2}.$$

Le facteur devant $\frac{z}{|z|^2}$ correspond à la charge totale (signée) du système, qui est nulle, tandis que le second est majoré par la taille du système ($O(N^{1/d})$) fois la charge totale (en valeur absolue ou variation totale) de $2N$. \square

La remarque suivante est à la fois simple et fondamentale.

Proposition 2. Le champ électrique E satisfait, au sens des distributions :

$$-\text{div } E = 2\pi M_N.$$

Cette identité ne pose aucun problème (au sens des distributions) pour le log-gas en dimension 2. En dimension 1, il faut penser qu'on a plongé la droite réelle (et le système vivant dessus) dans \mathbb{R}^2 , en particulier la mesure $\mu_{0'}$ qui a une densité continue sur \mathbb{R} devient $\mu_{0'} \delta_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ qui est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Cela découle du fait que noyau logarithmique résout

$$-\text{div } \nabla (-\log |x|) = 2\pi \delta_{x=0}$$

dans \mathbb{R}^2 , et de la définition (3.3.4) du champ électrique. \square

On définit maintenant une procédure de troncature du potentiel et du champ électrique, qui permettra de gérer la divergence de ces quantités près de chaque charge. Définissons d'abord la fonction "plus proche voisin" PPV : $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, \frac{1}{4}]$ par

$$(3.3.5) \quad \text{PPV}(x) = \frac{1}{4} \min(\min\{|x'_i - x|, i = 1, \dots, N, x'_i \neq x\}, 1).$$

Si $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ est un N -uplet de nombres strictement positifs, tels que $\eta_i \leq \text{PPV}(x'_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, N$, on note

$$(3.3.6) \quad \text{Pot}_{\vec{\eta}}(z) = \begin{cases} \text{Pot}(z) & \text{si } |z - x'_i| \geq \eta_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \\ \text{Pot}(z) + \log |z - x'_i| - \log |\eta_i| & \text{si } |z - x'_i| \leq \eta_i \text{ pour un certain } i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

6. Notons cependant qu'ici on prend $E = \nabla \text{Pot}$ et non $E = -\nabla \text{Pot}$ comme en physique. En pratique, cela ne change rien.

Vu la condition $\eta_i \leq \text{PPV}(x'_i)$ et la définition de PPV, le deuxième cas de (3.3.6) se réalise pour *au plus* un indice i , ce qui garantit la bonne définition de $\text{Pot}_{\bar{\eta}}$. On peut ré-écrire $\text{Pot}_{\bar{\eta}}$ de manière concise sous la forme

$$\text{Pot}_{\bar{\eta}}(z) = \text{Pot}(z) - \sum_{i=1}^N (\log \eta_i - \log |z - x'_i|)_+$$

où $(a)_+ := \max(a, 0)$ désigne la “partie positive” d’un réel a . On définit ensuite $\mathbf{E}_{\bar{\eta}} = \nabla \text{Pot}_{\bar{\eta}}$, qui correspond à la troncature du champ électrique. Un calcul donne alors

$$-\frac{1}{2\pi} \text{div } \mathbf{E}_{\bar{\eta}} = \sum_{i=1}^N \delta_{x'_i}^{(\eta)} - \mu_0',$$

où $\delta_{x'_i}^{(\eta)}$ est une mesure de masse 1 sur le cercle de centre x'_i et de rayon η . L’effet de la troncature sur les charges consiste en effet à les étaler (*smearing out*) et à passer d’une charge ponctuelle située en x'_i à une distribution de charge répartie sur un sous-ensemble de dimension 1, ici le cercle $\partial B(x'_i, \eta)$. À un choix plus lisse de troncature correspondrait un étalement sur un petit disque centré en x'_i . Le détail de la procédure troncature importe peu, tant que l’on obtient *une distribution radiale* de charges centré en x'_i . On peut en effet mettre à profit le théorème de Newton, qui stipule que le potentiel électrostatique engendré par une distribution radiale de charges centrée en coïncide, hors du support de la distribution, avec le potentiel engendré par une charge ponctuelle située au centre de la distribution et de charge égale à la charge totale.

Proposition 3. *L’identité suivante est vérifiée :*

$$(3.3.7) \quad F_N(X'_N | \mu_0') = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{E}_{\bar{\eta}}|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^N \log \eta_i \right) + \sum_{i=1}^N \int_{|x-x'_i| \leq \eta_i} \log \left(\frac{x-x'_i}{\eta_i} \right) d\mu_0'(x).$$

Démonstration. Il s’agit essentiellement d’une intégration par parties. Si on omet la contrainte $x \neq y$ dans (3.3.2) il vient

$$(3.3.8) \quad F_N(X'_N | \mu_0') = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} -\text{div } \mathbf{E}(z) \text{Pot}(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{E}|^2,$$

ce qui n’a pas cependant pas de sens car \mathbf{E} n’est, on l’a vu, pas dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Écrivons plutôt que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{E}_{\bar{\eta}}|^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} -\Delta \text{Pot}_{\bar{\eta}}(z) \text{Pot}_{\bar{\eta}}(z) \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} -\log |x-y| \left(\sum_{i=1}^N \delta_{x'_i}^{(\eta_i)} - d\mu_0' \right) (x) \left(\delta_{x'_i}^{(\eta_i)} - d\mu_0' \right) (y). \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, le théorème de Newton donne l’égalité suivante

$$\iint -\log |x-y| \delta_{x'_i}^{(\eta_i)}(x) \delta_{x'_j}^{(\eta_j)}(y) = \iint -\log |x-y| \delta_{x'_i}(x) \delta_{x'_j}(y) = -\log |x'_i - x'_j|,$$

et pour les mêmes raisons on a

$$\begin{aligned} \int \int_{|y-x'_i| \geq \eta_i} -\log |x-y| \delta_{x'_i}^{(\eta_i)}(x) d\mu_0' &= \int \int_{|y-x'_i| \geq \eta_i} -\log |x-y| \delta_{x'_i}(x) d\mu_0'(y) \\ &= \int_{|y-x'_i| \geq \eta_i} -\log |x'_i - y| d\mu_0'(y). \end{aligned}$$

Pour établir (3.3.7) il faut donc d’une part calculer les N termes d’auto-interactions entre charges étalées $\iint -\log |x-y| \delta_{x'_i}^{(\eta_i)}(x) \delta_{x'_i}^{(\eta_i)}(y)$, qui sont chacun d’ordre $\log \eta_i$, et retrancher leur contribution car ils n’apparaissent pas dans la définition de $F_N(X'_N | \mu_0')$, et d’autre part comparer explicitement autour de chaque x'_i les interactions entre la densité continue μ_0' et la charge ponctuelle étalée ou non, ce qui donne le dernier terme dans (3.3.7). \square

La ré-écriture de l’énergie en termes des champs a été introduite dans les travaux de Sandier-Serfaty cités plus hauts, et adaptée dans [RS16, PS17], avec des troncatures à *distance fixe*, c’est-à-dire que $\eta_i = \eta$ est le même pour chaque particule, on ajoute le terme de *renormalisation* en $\log \eta$ pour chaque particule ponctuelle et on fait $\eta \rightarrow 0$ à la fin des calculs. Cette procédure de renormalisation elle-même

était inspirée de [BBH⁺94]. Le fait de travailler avec des troncatures définies en fonction de la distance au plus proche voisin offre certains avantages techniques, mis à profit dans [LSZ17] afin d'importer les méthodes de [GP77]. Bien entendu, le fait d'étaler les charges et d'écrire l'énergie électrique avec la norme L^2 du champ est une idée ancienne et naturelle.

3.3.2. Le formalisme des champs électriques. Dans la suite, on appellera *champ électrique* tout champ de vecteurs dans $\bigcap_{p \in [1,2)} L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel qu'il existe une configuration \mathcal{C} dans Config et une mesure de Radon μ sur \mathbb{R}^d pour lesquelles on a l'identité, au sens des distributions

$$(3.3.9) \quad -\operatorname{div} \mathbf{E} = 2\pi (\mathcal{C} - \mu).$$

L'espace des champs électriques est noté Elec . Si (3.3.9) est satisfaite, on dit que \mathbf{E} est compatible avec (\mathcal{C}, μ) et on note $\mathbf{E} \in \text{Elec}(\mathcal{C}, \mu)$. Dans ce cas on parlera de la configuration \mathcal{C} et de la mesure μ sous-jacentes, il est facile de vérifier que tout champ électrique est compatible avec *au plus* un tel couple. Si l'on connaît μ , on retrouve \mathcal{C} en calculant

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mu,$$

expression que l'on rencontrera par la suite.

On étend la fonction "plus proche voisin" (3.3.5) de façon naturelle au cas d'une configuration de points quelconque. Si \mathbf{E} est compatible avec \mathcal{C} , et si $\{\eta_p\}_{p \in \mathcal{C}}$ est une famille de réels positifs indexée par les points de \mathcal{C} vérifiant $\eta_p \leq \text{PPV}(p)$ pour chaque point $p \in \mathcal{C}$, on note

$$(3.3.10) \quad \mathbf{E}_{\vec{\eta}}(z) := \mathbf{E}(z) - \sum_{p \in \mathcal{C}} \nabla (\log \eta_p - \log |z - p|)_+.$$

3.3.3. Énergie logarithmique d'un processus ponctuel étiqueté stationnaire. Soit $\bar{\mathbb{P}}$ un processus ponctuel étiqueté stationnaire. Soit $\bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}}$ une mesure de probabilité sur $K_0 \times \text{Elec}$. On dit que $\bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}}$ est compatible avec $(\bar{\mathbb{P}}, \mu_0)$ si le poussé en avant de $\bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}}$ par

$$(\bar{x}, \mathbf{E}) \mapsto \left(\bar{x}, -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mu_0(\bar{x}) dx \right)$$

coïncide avec $\bar{\mathbb{P}}$. On définit ensuite l'énergie logarithmique de $\bar{\mathbb{P}}$ (en dimension $d = 2$) comme la quantité suivante :

$$(3.3.11) \quad \bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}}|\mu_0) := \inf \left\{ \frac{1}{|\square_1|} \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\int_{\square_1} |\mathbf{E}_{\vec{\eta}}|^2 + 2\pi \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \square_1} \log \eta_p \right) + \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \square_1} \int_{|x-p| \leq \eta_p} \log \left(\frac{x-p}{\eta_p} \right) \mu_0(\bar{x}) dx \right], \right. \\ \left. \bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}} \text{ compatible avec } (\bar{\mathbb{P}}, \mu_0) \right\},$$

où l'on impose que les troncatures $\{\eta_p\}_{p \in \mathcal{C}}$ du champ électrique utilisées soient telles que ⁷

$$\eta_p \leq \min \left(\text{PPV}(p), \frac{1}{4} \operatorname{dist}(p, \partial \square_1) \right).$$

La définition (3.3.11) imite la formule (3.3.7) et permet de définir une énergie logarithmique pour des configurations de points *en passant par les champs*. L'idée est que au-dessus de chaque point $\bar{x} \in K_0$ "vit" un processus ponctuel stationnaire d'intensité $\mu_0(\bar{x}) dx$, et que chaque réalisation \mathcal{C} de ce processus vient avec un champ électrique \mathbf{E} qui est compatible avec $(\mathcal{C}, \mu_0(\bar{x}) dx)$. Afin d'obtenir une quantité finie, on considère une énergie (électrique) *par unité de volume*, ce qui correspond à ne n'intégrer la densité électrique que dans $|\square_1|$ (en divisant par le volume). On pourrait remplacer $|\square_1|$ par $|\square_R|$ pour $R > 1$ arbitraire. On peut montrer que $\bar{\mathcal{W}}$ est semi-continue inférieurement sur l'espace des processus ponctuels étiquetés *stationnaires*, et que ses ensembles de sous-niveau sont compacts.

7. On a ajouté la contrainte $\eta_p \leq \operatorname{dist}(p, \partial \square_1)$ afin d'éviter que certaines charges, une fois étalées sur un cercle de rayon η_p autour de $p \in \mathcal{C}$, ne rencontrent le bord $\partial \square_1$.

Pour $d = 1$, il faut garder à l'esprit qu'on a plongé le système de dimension 1 dans \mathbb{R}^2 , en particulier on voit le potentiel et le champ électrique comme des champs sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mais le système de charges n'est invariant que par translations le long de la première coordonnée. On doit donc remplacer

$$\int_{[-1,1]^2} |\mathbf{E}_{\vec{\eta}}|^2 \text{ par } \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}} |\mathbf{E}_{\vec{\eta}}|^2.$$

De même, en dimension 1, les mesures de Radon μ sous-jacentes aux champs électriques sont supportées sur la droite réelle, et on devrait en fait écrire $-\operatorname{div} \mathbf{E} = 2\pi (\mathcal{C} - \mu \delta_{\mathbb{R} \times \{0\}})$.

Remarque 5. *En volume infini, il est délicat de définir le “vrai” champ électrique correspondant à une configuration donnée, c'est pourquoi on considère d'abord tous les champs compatibles, puis on sélectionne celui d'énergie minimale. On peut vérifier que cette procédure est compatible avec la situation en volume infini, en effet, parmi tous les champs électriques compatibles avec un système fini (X_N, μ_0') celui d'énergie minimale est l'unique champ de vecteurs gradient, à savoir le “vrai” champ électrique défini plus haut. On rencontrera encore dans la suite cette propriété de minimalité de l'énergie du vrai champ, qui mathématiquement correspond à une projection orthogonale dans L^2_{loc} .*

3.4. Connexion entre volume fini et volume infini.

Proposition 4. *Soit $\{X_N\}_N$ une suite de N -uplets, supposons $\sup_N \frac{1}{N} F_N(X'_N | \mu_0') < +\infty$. Alors il existe un processus ponctuel étiqueté stationnaire $\bar{\mathbb{P}}$ tel que $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$, et de plus on a une inégalité de Γ -limite (inférieure) :*

$$(3.4.1) \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F_N(X'_N | \mu_0') \geq \bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0).$$

Démonstration. La tension de la suite $\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}\}_N$ dans $\mathcal{P}(K_0 \times \text{Config})$ vient gratuitement du fait que X_N est une suite de N -uplets, ce qui implique que pour $n \geq 1$ arbitraire on a une borne sur le nombre moyen de points dans \square_n , à savoir :

$$\mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}} \left[\int_{\square_n} d\mathcal{C} \right] \leq |\square_n|.$$

L'inégalité de Markov permet d'écrire, pour $\varepsilon > 0$,

$$\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \left[\left\{ \int_{\square_n} d\mathcal{C} \geq \frac{1}{\varepsilon} n^2 |\square_n| \right\} \right] \leq \frac{\varepsilon}{n^2}$$

si bien que $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$ donne une masse $\geq 1 - \varepsilon$ aux configurations qui ont au plus $\frac{1}{\varepsilon} n^2 |\square_n|$ points dans \square_n pour tout $n \geq 1$, or on sait par le Lemme 2 qu'elles forment une partie compacte de Config .

On donne une idée de la preuve de (3.4.1) pour $d = 2$ en faisant comme si l'identité (3.3.8) était correcte. Par Fubini, on peut écrire

$$(3.4.2) \quad \frac{1}{N} F_N(X'_N | \mu_0') \stackrel{??}{=} \frac{1}{N} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{E}|^2 \geq \frac{1}{N} \int_{K_0'} \left(\int_{\vec{x}' + \square_1} |\mathbf{E}|^2 \right) d\vec{x}' = \frac{1}{4\pi} \int_{K_0} \left(\int_{\vec{x}' + \square_1} |\mathbf{E}|^2 \right) d\vec{x},$$

après un changement de variable. Soit maintenant $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}$ l'élément de $\mathcal{P}(K_0 \times L^2_{\text{loc}})$ défini par

$$\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}} := \int_{K_0} \delta_{(\vec{x}, \mathbf{E}(\cdot - \vec{x}'))} d\vec{x},$$

alors d'une part $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}$ est compatible avec $(\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}, \mu_0')$ au sens où le poussé en avant

$$(3.4.3) \quad \left((\vec{x}, \mathbf{E}) \mapsto \left(\vec{x}, -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mu_0'(\vec{x}' + \cdot) \right) \right) \# \bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}} = \bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$$

et de plus on peut ré-écrire la dernière expression de (3.4.2) sous la forme

$$\int_{K_0} \left(\int_{\vec{x}' + \square_1} |\mathbf{E}|^2 \right) d\vec{x} = \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}} \left[\int_{\square_1} |\mathbf{E}|^2 \right],$$

et par hypothèse cette quantité est bornée. En fait plus généralement on a, par le même argument de Fubini :

$$\frac{1}{N} F_N(X'_N | \mu_0') \stackrel{??}{\geq} \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{|\square_R|} \int_{\square_R} |\mathbf{E}|^2 \right],$$

et on en déduit que $\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}\}_N$ est tendue. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, l'inégalité de Markov assure que

$$\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}} \left[\left\{ \int_{\square_n} |\mathbf{E}|^2 \leq \frac{n^{100}}{\varepsilon} |\square_n| \right\} \right] \geq 1 - C\varepsilon \frac{1}{n^{100}},$$

pour une certaine constante C indépendante de ε , et par conséquent une *union bound* naïve donne

$$\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}} \left[\bigcap_{n \geq 1} \left\{ \int_{\square_n} |\mathbf{E}|^2 \leq \frac{n^{100}}{\varepsilon} |\square_n| \right\} \right] \geq 1 - C\varepsilon,$$

or $\bigcap_{n \geq 1} \left\{ \int_{\square_n} |\mathbf{E}|^2 \leq \frac{n^{100}}{\varepsilon} |\square_n| \right\}$ est une partie compacte de $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (pour la topologie faible).

Soit $\bar{\mathbb{P}}_\infty^{\text{elec}} \in \mathcal{P}(K_0 \times L_{\text{loc}}^2)$ tel que $\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}\}_N$ converge vers $\bar{\mathbb{P}}_\infty^{\text{elec}}$ à extraction près, il faut d'abord vérifier que $\bar{\mathbb{P}}_\infty^{\text{elec}}$ est compatible avec $(\bar{\mathbb{P}}, \mu_0)$. On s'appuie sur l'observation suivante : si μ est fixée, l'application $\mathbf{E} \mapsto \frac{1}{2\pi} \text{div } \mathbf{E} + \mu$ (qui associe à un champ électrique \mathbf{E} compatible avec (\mathcal{C}, μ) la configuration \mathcal{C} sous-jacente) est continue. Par définition de la topologie initiale sur Config , il suffit de vérifier que

$$\mathbf{E} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d \left(-\frac{1}{2\pi} \text{div } \mathbf{E} + \mu \right) (x)$$

est continue pour la topologie faible sur L_{loc}^2 , pour toute fonction test φ lisse à support compact, ce qui se voit directement. Plus généralement l'application

$$f : (\bar{x}, \mathbf{E}) \mapsto -\frac{1}{2\pi} \text{div } \mathbf{E} + \mu_0(\bar{x}) dx$$

est continue de $K_0 \times \text{Elec}$ vers l'espace des mesures de Radon munie de la topologie vague. En notant

$$f_N : (\bar{x}, \mathbf{E}) \mapsto f(\bar{x}, \mathbf{E}) + (\mu_0'(\bar{x} + \cdot) - \mu_0(\bar{x}) dx),$$

on voit en comparant avec (3.4.3) que $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$ est le poussé en avant de $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}$ par $(\bar{x}, \mathbf{E}) \mapsto (\bar{x}, f_N)$. Comme la densité μ_0 est continue, la mesure $\mu_0'(\bar{x}' + \cdot) - \mu_0(\bar{x}) dx$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$ uniformément pour $\bar{x} \in K_0$, si bien qu'en passant à la limite on trouve que le poussé en avant de $\bar{\mathbb{P}}_\infty^{\text{elec}}$ par $(\bar{x}, \mathbf{E}) \mapsto (\bar{x}, f)$ redonne bien $\bar{\mathbb{P}}$.

Enfin, comme la norme est semi-continue inférieurement pour la convergence faible, le lemme de Fatou nous permet d'écrire :

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{|\square_R|} \int_{\square_R} |\mathbf{E}|^2 \right] \geq \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}_\infty^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{|\square_R|} \int_{\square_R} |\mathbf{E}|^2 \right],$$

et ce pour $R > 0$ arbitraire, en particulier pour $R = 1$, ce qui donne

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} F_N(X'_N | \mu_0') \stackrel{??}{\geq} \inf \left\{ \frac{1}{|\square_1|} \mathbf{E}_{\bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\square_1} |\mathbf{E}|^2 \right], \bar{\mathbb{P}}^{\text{elec}} \text{ compatible avec } (\bar{\mathbb{P}}, \mu_0) \right\} \stackrel{??}{=} \overline{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0),$$

et on en déduit (3.4.1). \square

3.5. Application : principe de grandes déviations à l'échelle microscopique. Posons-nous maintenant la question : soit $\bar{\mathbb{P}}$ un processus ponctuel stationnaire étiqueté, quelle est la probabilité d'observer $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$ près de $\bar{\mathbb{P}}$? Pour être précis, on fixe encore $\varepsilon > 0$ et on cherche à estimer la probabilité d'observer $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$ dans la boule $B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)$ au sens d'une certaine distance métrisant la topologie sur $K_0 \times \text{Config}$. En utilisant la définition de $\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0}$, l'identité (3.3.1) et un changement de variable il vient (on rappelle que, par commodité, on a supposé $|K_0| = 1$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0} \left(\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon) \right) &= \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0}} \int_{\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)\}} \exp(-\beta \mathbf{H}_N(X_N | \mu_0)) \mathbf{1}_{X_N \in K_0^N} dX_N \\ &= \frac{1}{Z_{N,\beta}^{\mu_0} e^{-\frac{\beta}{2d} N \log N}} \int_{\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)\}} \exp(-\beta F_N(X'_N | \mu_0')) \mathbf{1}_{X'_N \in (K_0')^N} \frac{dX'_N}{|K_0'|^N}. \end{aligned}$$

On notera désormais $K_{N,\beta}^{\mu_0}$ la fonction de partition adaptée à l'échelle microscopique, à savoir la constante de normalisation

$$K_{N,\beta}^{\mu_0} := Z_{N,\beta}^{\mu_0} e^{-\frac{\beta}{2d} N \log N} = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \exp(-\beta F_N(X'_N | \mu_0')) \mathbf{1}_{X'_N \in (K_0')^N} \frac{dX'_N}{|K_0'|^N}.$$

Au vu de la proposition 4 on peut écrire que sur l'événement $\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)\}$ on a

$$F_N(X'_N | \mu_0') \geq N (\bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0) + o_\varepsilon(1)),$$

si bien qu'on peut majorer la probabilité considérée par

(3.5.1)

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0} \left(\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon) \right) \leq \frac{1}{K_{N,\beta}^{\mu_0}} \exp(-N\beta\bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0) + No_\varepsilon(1)) \int_{\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X'_N \in (K_0')^N} \frac{dX'_N}{|K_0'|^N}.$$

Comme précédemment, le terme “sans interaction” admet une interprétation probabiliste naturelle : si on tire N points uniformément et indépendamment dans K_0 et qu'on forme leur champ empirique $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}}$, quelle est la probabilité d'avoir $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)$? À l'échelle microscopique et en omettant les étiquettes, cela revient à demander : si on réalise un processus de Bernoulli à N points dans K_0' et qu'on moyenne la configuration obtenue en centrant autour de chaque point dans K_0' , quelle est la probabilité de ressembler à un certain processus ponctuel stationnaire fixé? Comme les points sont tirés indépendamment et uniformément, on obtient typiquement quelque chose qui ressemble à un processus de Poisson, et tout événement qui consiste à ressembler à autre chose qu'à Π est une *grande déviation*. On dispose en fait d'un résultat analogue au théorème de Sanov cité plus haut. Le théorème de Sanov est un résultat de grandes déviations pour les *mesures empiriques*, tandis qu'on a maintenant besoin de connaître les grandes déviations pour les *champs empiriques*.

Théorème 2 (Grandes déviations pour les champs empiriques).

$$(3.5.2) \quad \int_{\{\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)\}} \mathbf{1}_{X'_N \in (K_0')^N} \frac{dX'_N}{|K_0'|^N} = \exp(-N(\bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbb{P}}) + o_\varepsilon(1))),$$

où l'entropie relative spécifique étiquetée $\bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbb{P}})$ n'est rien d'autre que l'entropie relative spécifique \mathcal{E} définie plus haut, appliquée au processus ponctuel obtenu en “oubliant” les étiquettes, c'est-à-dire formellement au poussé en avant de $\bar{\mathbb{P}}$ par la seconde projection $(\bar{x}, \mathcal{C}) \mapsto \mathcal{C}$.

Ce résultat de grandes déviations se trouve par exemple dans [GZ93], avec des adaptations techniques faites dans l'appendice de [LS17]. En combinant (3.5.1) et (3.5.2) il vient

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0} \left(\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon) \right) \leq \frac{1}{K_{N,\beta}^{\mu_0}} \exp(-N(\beta\bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0) + \bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbb{P}})) + No_\varepsilon(1)).$$

Comme on l'a vu plus haut en étudiant l'observable macroscopique, obtenir une borne inférieure correspondante suppose de non seulement pouvoir montrer un résultat de Γ -limite *supérieure*, c'est-à-dire l'existence d'une *recovery sequence*, mais de savoir produire *toute une famille* de configurations X'_N telles que $\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon)$ et pour lesquelles l'énergie $\frac{1}{N}F_N(X'_N | \mu_0')$ est bornée supérieurement par $\bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0)$ à une petite erreur uniforme près.

Dans le cas de l'échelle macroscopique, l'énergie était d'ordre N^2 et la contribution du volume, via l'entropie relative, était seulement d'ordre N à l'échelle exponentielle, la seule contrainte sur le volume de la famille à produire était donc qu'il soit $\exp(-o(N^2))$ afin de rester négligeable. À l'échelle microscopique, en revanche, on voit que l'énergie et l'entropie jouent au même ordre $O(N)$. Il faut donc exhiber une famille de volume $\exp(-N(\bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbb{P}}) + o_\varepsilon(1)))$. On présentera plus bas les difficultés inhérentes à la construction de *recovery sequences* “en familles” assez grosses, et les outils techniques (écranage + régularisation) pour y parvenir. Observons pour l'instant qu'on a fait apparaître la fonctionnelle

$$\bar{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0}(\bar{\mathbb{P}}) := \beta\bar{\mathcal{W}}(\bar{\mathbb{P}} | \mu_0) + \bar{\mathcal{E}}(\bar{\mathbb{P}}),$$

et qu'il paraît raisonnable de croire que pour $\varepsilon \ll 1$ on a

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0} \left(\bar{\mathbb{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbb{P}}, \varepsilon) \right) \approx \frac{1}{K_{N,\beta}^{\mu_0}} \exp(-N\bar{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0}(\bar{\mathbb{P}})).$$

On peut alors se convaincre, en faisant un recouvrement par des petites boules et en utilisant le fait qu'une somme d'exponentielles se comporte comme celle de plus grand exposant, que la fonction de partition $K_{N,\beta}^{\mu_0}$ doit valoir

$$K_{N,\beta}^{\mu_0} \approx \exp(-N \inf \bar{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0}),$$

si bien qu'on obtient un principe de grandes déviations pour le champ empirique des log-gas, à savoir

Théorème 3 ([LS17]).

$$(3.5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbf{P}_{N,\beta}^{\mu_0} \left(\bar{\mathbf{P}}_N^{\text{emp}} \in B(\bar{\mathbf{P}}, \varepsilon) \right) = - \left(\bar{\mathcal{F}}_{\beta}^{\mu_0}(\bar{\mathbf{P}}) - \min \bar{\mathcal{F}}_{\beta}^{\mu_0} \right).$$

La principale conséquence que l'on peut en tirer est que le comportement microscopique moyen, tel qu'encodé par l'observable "champ empirique étiqueté", *se concentre autour des (quasi)-minimiseurs de $\bar{\mathcal{F}}_{\beta}^{\mu_0}$* avec très grande probabilité. Cela nous invite donc à étudier $\bar{\mathcal{F}}_{\beta}^{\mu_0}$, appelée par la suite *la fonctionnelle d'énergie libre du log-gas*, ses ensembles de sous-niveaux et, si possible, ses minimiseurs. On a d'ores et déjà mis en évidence, dans l'expression même de l'énergie libre, une dépendance non triviale en la température.

Étude des minimiseurs

Notre étude des log-gas à l'échelle microscopique a mis en avant le rôle joué par une fonctionnelle d'énergie libre $\overline{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0}$, définie au niveau des processus ponctuels stationnaires *étiquetés*. Une observation liée aux propriétés particulières de l'interaction logarithmique révèle qu'il suffit en fait d'étudier les processus ponctuels stationnaires sans étiquette, ce qui allège un peu le formalisme.

Pour m un réel positif, et P un processus ponctuel stationnaire, notons $\mathcal{W}(P|m)$ la quantité

$$\mathcal{W}(P|m) := \inf \left\{ \frac{1}{|\square_1|} \mathbf{E}_{P^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\int_{\square_1} |E_{\vec{\eta}}|^2 + 2\pi \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \square_1} \log \eta_p \right) + m \sum_{p \in \mathcal{C} \cap \square_1} \int_{|x-p| \leq \eta_p} \log \left(\frac{x-p}{\eta_p} \right) dx \right], \right. \\ \left. P^{\text{elec}} \text{ compatible avec } (P, m dx) \right\},$$

avec la notion naturelle de compatibilité : un processus électrique $P^{\text{elec}} \in \mathcal{P}(\text{Elec})$ est compatible avec $(P, m dx)$ si son poussé en avant par

$$E \mapsto -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} E + m dx$$

coïncide avec P . Si m n'est pas précisé on le prend égal à 1, c'est-à-dire qu'on écrira $\mathcal{W}(P) = \mathcal{W}(P|1)$. L'énergie logarithmique d'un processus étiqueté peut se décomposer comme :

$$\overline{\mathcal{W}}(\overline{P}|\mu_0) = \int_{K_0} \mathcal{W}(P^{\overline{x}}|\mu_0(\overline{x})) d\overline{x},$$

où $P^{\overline{x}}$ est le processus vivant dans la fibre au-dessus de \overline{x} , c'est-à-dire la désintégration de \overline{P} par rapport à la variable dans K_0 . En fait, c'est aussi le cas pour l'autre composante de notre énergie libre, à savoir l'entropie relative spécifique, qui admet la décomposition :

$$\overline{\mathcal{E}}(\overline{P}) = \int_{K_0} \mathcal{E}(P^{\overline{x}}) d\overline{x}.$$

Pour comprendre les minimiseurs de $\beta \overline{\mathcal{W}} + \overline{\mathcal{E}}$ il suffit donc de comprendre les minimiseurs de $\mathcal{W}(\cdot|m) + \mathcal{E}$ pour chaque $m > 0$. Le résultat suivant montre qu'ils ne dépendent de m que par une mise à l'échelle.

Lemme 5. *Pour $m > 0$, notons σ_m l'application $\mathcal{P}(\text{Config}) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Config})$ qui pousse en avant par $\mathcal{C} \mapsto m^{1/d} \mathcal{C}$. C'est une bijection qui divise l'intensité des processus par m . En particulier, si P est d'intensité m , alors $\sigma_m P$ est d'intensité 1 et on a les identités*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(P|m) &= m \left(\mathcal{W}(\sigma_m P|1) - \frac{1}{d} m \log m \right) \\ \mathcal{E}(P) &= m \mathcal{E}(\sigma_m P) + 1 - m + m \log m. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans les deux cas, il s'agit essentiellement d'un changement de variable. Pour \mathcal{W} , on utilise que $-\log |\lambda(x-y)| = -\log |\lambda| - \log |x-y|$, et le fait que la dépendance en la densité soit si simple est spécifique au cas de l'interaction logarithmique. \square

En particulier, en notant $\mathcal{F}_\beta = \beta \mathcal{W} + \mathcal{E}$ (fonctionnelle pour les processus d'intensité 1), on a :

$$\min \{ \beta \mathcal{W}(P|m) + \mathcal{E}(P), P \text{ d'intensité } m \} = m \min \mathcal{F}_\beta + 1 - m + \left(1 - \frac{\beta}{d} \right) m \log m.$$

et les minimiseurs de la quantité de droite correspondent à l'image par σ_m des minimiseurs de la quantité de gauche. Cela entraîne deux choses :

(1) La fonction de partition $K_{N,\beta}^{\mu_0}$ admet l'expression suivante au premier ordre en N

$$\begin{aligned} \log K_{N,\beta}^{\mu_0} &= -N \min \overline{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0} = -N \int_{K_0} \left(\mu_0(\overline{x}) \min \mathcal{F}_\beta + 1 - \mu_0(\overline{x}) + \left(1 - \frac{\beta}{d} \right) \mu_0(\overline{x}) \log \mu_0(\overline{x}) \right) d\overline{x} \\ &= -N \min \mathcal{F}_\beta + N \left(1 - \frac{\beta}{d} \right) \int \mu_0 \log \mu_0. \end{aligned}$$

- (2) Comprendre les minimiseurs de l'énergie libre étiquetée $\overline{\mathcal{F}}_\beta^{\mu_0}$ revient, à une mise à l'échelle près, à comprendre les minimiseurs de \mathcal{F}_β . La seule dépendance en μ_0 apparaît via ce *scaling*. On peut voir là une forme d'universalité du comportement microscopique, ou du moins du principe variationnel associé.

On va maintenant se concentrer sur l'étude de \mathcal{F}_β , fonctionnelle d'énergie libre définie au niveau des processus stationnaires d'intensité 1.

4. L'ÉNERGIE CONTRÔLE LES FLUCTUATIONS

Dans cette section, on montre comment obtenir des bornes (en moyenne) sur les *fluctuations de statistiques linéaires*, c'est-à-dire les quantités du type $\int \varphi(x) (d\mathcal{C}(x) - dx)$ où φ est une fonction test, en fonction de l'énergie d'un processus. Pour simplifier la présentation, on omettra le rôle de la singularité en 0 et des opérations de troncature nécessaires pour la maîtriser. On prétendra ici que l'énergie est donnée par la norme L^2 du champ électrique, c'est-à-dire que

$$\mathcal{W}(\mathbf{P}) \stackrel{??}{=} \inf \left\{ \frac{1}{|\square_R|} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^{\text{elec}}} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\square_R} |\mathbf{E}|^2 \right], \mathbf{P}^{\text{elec}} \text{ compatible avec } \mathbf{P} \right\},$$

Si \mathcal{C} est une configuration, on note \mathbf{M} la mesure signée $\mathcal{C} - dx$. Un champ \mathbf{E} est compatible avec (\mathcal{C}, dx) lorsque $-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$ coïncide avec \mathbf{M} . La mesure \mathbf{M} encode les "fluctuations" au sens où les particules ponctuelles occupent, en moyenne, uniformément l'espace, mais pour une configuration donnée ne peuvent évidemment coïncider exactement avec la mesure diffuse dx . On notera $\langle \varphi, \mathbf{M} \rangle := \int \varphi(x) d\mathbf{M}(x)$, les fluctuations de la statistique linéaire associée à la fonction test φ .

4.1. Fonctions tests lisses.

Proposition 5. *Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. On peut borner les fluctuations par l'énergie dans $L^2(\mathbf{P})$*

$$(4.1.1) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[|\langle \varphi, \mathbf{M} \rangle|^2 \right] \leq C |\varphi|_{C^1}^2 \operatorname{supp} \varphi^2 (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.}).$$

Démonstration. Si \mathbf{E} est un champ électrique compatible avec (\mathcal{C}, dx) on écrit en intégrant par parties :

$$\langle \varphi, \mathbf{M} \rangle = \int \varphi(x) d\mathbf{M}(x) = - \int \varphi(x) \frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int \nabla \varphi(x) \mathbf{E}.$$

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz avant de prendre l'espérance sous \mathbf{P} :

$$(4.1.2) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[|\langle \varphi, \mathbf{M} \rangle|^2 \right] \leq C \|\varphi\|_{H^1}^2 \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left[\int_{|\operatorname{supp} \varphi|} |\mathbf{E}|^2 \right].$$

L'énergie électrique par unité de volume étant donnée par $\mathcal{W}(\mathbf{P})$, on obtient le résultat voulu. \square

4.2. Estimées de discrédance. Si $\varphi = \mathbf{1}_{B(0,R)}$ est l'indicatrice d'une boule, alors $\langle \varphi, \mathbf{M} \rangle$ correspond à la différence entre le nombre de points de \mathcal{C} dans la boule et le volume d -dimensionnel de la boule. Cette quantité s'appelle la discrédance, on la note Discr_R . Par stationnarité on a $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R] = 0$, mais donner une estimée optimale de la variance de Discr_R (*number variance*) sous \mathbf{P} est un problème délicat.

Proposition 6. *On obtient les estimées de discrédance suivantes :*

- *Dimension 2 : si \mathbf{P} est d'énergie finie, alors $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R^2] \leq CR^2 (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.})$, en particulier $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R^2] = O(R^2)$.*
- *Dimension 1 : si \mathbf{P} est d'énergie finie, alors $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R^2] \leq CR (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.})$, et de plus $\mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R^2] = o(R)$.*

Les bornes $O(R^d)$ sont démontrées dans [LS17], ainsi que la propriété $\liminf_R \frac{1}{R} \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [\operatorname{Discr}_R^2] = 0$ en dimension 1. Le fait qu'on puisse en fait remplacer la \liminf par une limite est observé dans [EHL18] et se révèle un ingrédient crucial de certaines preuves.

Démonstration. Pour étudier les discrédances, on s'appuie sur l'identité (3.3.9) et une intégration par parties

$$\int_{\square_R} d\mathcal{C} - dx = \int_{\square_R} -\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \square_R} \mathbf{E} \cdot \vec{n},$$

où \vec{n} est un vecteur normal à $\partial\Box_R$. On peut alors appliquer Cauchy-Schwarz pour faire apparaître la norme L^2 du champ :

$$\text{Discr}_R \leq CR^{1/2} \int_{\partial\Box_R} |\mathbf{E}|^2 = CR \frac{1}{|\partial\Box_R|} \int_{\partial\Box_R} |\mathbf{E}|^2$$

Comme l'énergie électrique par unité de volume est contrôlée par $\mathcal{W}(\mathbf{P})$, on obtient bien

$$\mathbf{E}_P [|\text{Discr}_R|^2] \leq CR^2 (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.}).$$

En dimension 1, il faut ensuite tenir compte du fait que le système n'est pas invariant le long de l'axe additionnel (la seconde coordonnée dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et qu'on a en fait pour $T > 0$ arbitraire et à une constante multiplicative près

$$\text{Discr}_R = \int_{\partial([-R,R] \times [-T,T])} \mathbf{E} \cdot \vec{n} = \int_{\{-R,R\} \times [-T,T]} \mathbf{E} \cdot \vec{n} + \int_{[-R,R] \times \{-T,T\}} \mathbf{E} \cdot \vec{n}.$$

Les termes faisant intervenir $-R$ ou R , $-T$ ou T sont traités de la même façon. Appliquant Cauchy-Schwarz, on voit qu'on peut majorer $\mathbf{E}_P [|\text{Discr}_R|^2]$ par

$$T \mathbf{E}_P \left[\int_{\{-R\} \times [-T,T]} |\mathbf{E}|^2 \right] + R \mathbf{E}_P \left[\int_{[-R,R] \times \{T\}} |\mathbf{E}|^2 \right]$$

La stationnarité le long de la première coordonnée garantit que

$$\mathbf{E}_P \left[\int_{\{-R\} \times [-T,T]} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq \frac{1}{|\Box_1|} \mathbf{E}_P \left[\int_{\Box_1 \times \mathbb{R}} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq C (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.}),$$

et par un argument de moyenne, on pourrait prendre $T \in (R, 2R)$ tel que

$$\mathbf{E}_P \left[\int_{[-R,R] \times \{T\}} |\mathbf{E}|^2 \right] = R \mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times \{T\}} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq \frac{1}{R} \times R \mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times \mathbb{R}} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq C (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.}),$$

ce qui donne la borne $\mathbf{E}_P [|\text{Discr}_R|^2] \leq C (\mathcal{W}(\mathbf{P}) + \text{const.}) R$ mentionnée plus haut. Pour obtenir un contrôle en $o(R)$, il faut faire un meilleur choix de T en fonction de R .

Lemme 6. *Il existe une fonction $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ telle que $1 \ll f(x) \ll x$ quand $x \rightarrow \infty$, et qui vérifie*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times \{f(x)\}} |\mathbf{E}|^2 \right] = 0$$

Démonstration. Notons $\text{Tail}(x)$ la quantité

$$\text{Tail}(x) := \mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times [x, +\infty)} |\mathbf{E}|^2 \right].$$

La fonction Tail est continue, positive, décroissante et tend vers zéro en l'infini. Si l'on considère la fonction $u \mapsto \frac{u}{\sqrt{\text{Tail}(u)}}$, elle est continue, croissante, tend vers l'infini en l'infini et on peut donc toujours résoudre l'équation

$$\frac{u}{\sqrt{\text{Tail}(u)}} = x.$$

Par un argument de moyenne, on peut choisir une valeur $f(x) \in (u, 2u)$ tel que

$$\mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times \{f(x)\}} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq \frac{1}{u} \text{Tail}(u).$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien

$$x \mathbf{E}_P \left[\int_{[-1,1] \times \{f(x)\}} |\mathbf{E}|^2 \right] \leq \frac{x}{u} \text{Tail}(u) = \sqrt{\text{Tail}(u)} = o_x(1).$$

□

Prendre $T = f(R)$ dans le calcul précédent donne l'amélioration voulue. Notons cependant que le $o(R)$ obtenu n'est pas quantitatif, et que sa dépendance en \mathbf{P} est très implicite. □

La dernière partie de la preuve peut s'exprimer en disant que si P est stationnaire d'énergie électrique finie, alors P est *hyperuniforme* (ou *super-homogène*, au sens où la variance du nombre de points dans une grande boîte croît beaucoup moins vite que le volume de cette boîte. On ne sait pas si cette propriété est encore vraie en dimension 2, en particulier montrer l'hyperuniformité des minimiseurs de l'énergie libre (qui sont forcément d'énergie finie) est une question ouverte.

5. CONSTRUCTION DE PROCESSUS

5.1. La procédure d'écrantage. De deux champs électriques E_1, E_2 compatibles avec deux configurations locales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ situées dans deux boîtes K_1, K_2 adjacentes, on ne peut pas en général former un champ électrique compatible avec la configuration globale $\mathcal{C}^{\text{glob}} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. En effet, si les composantes normales respectives des champs ne coïncident pas le long de $\partial K_1 \cap \partial K_2$, le champ "recollé" $E^{\text{glob}} := E_1 \mathbf{1}_{K_1} + E_2 \mathbf{1}_{K_2}$ ne vérifie pas

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} E^{\text{glob}} = \mathcal{C}^{\text{glob}} - dx \text{ dans } K_1 \cup K_2,$$

même si cette équation est bien vérifiée dans (l'intérieur de) K_1 et K_2 séparément. Il y a un problème au bord, la non-coïncidence des composantes normales créant une composante supplémentaire de $\operatorname{div} E^{\text{glob}}$ sur $\partial K_1 \cap \partial K_2$.

La clef technique pour l'étude microscopique est la possibilité de manipuler les champs électriques de manière à les rendre nuls au bord d'un domaine fixé, en ne perturbant que très peu la configuration sous-jacente et en n'augmentant que très peu l'énergie. Cette procédure dite *d'écrantage* a été introduite par Sandier-Serfaty, et adaptée dans des travaux successifs. Nous la présentons ici dans un contexte idéalisé, et en dimension $d = 2$, afin d'en mettre en avant le principe directeur.

On note \odot_R le disque de rayon R .

Proposition 7 (Procédure d'écrantage). *Soit R tel que $|\odot_R|$ soit un entier, soit $\varepsilon = 10^{-6}$, notons $R' = R(1 - \varepsilon)$.*

- *Soit \mathcal{C} une configuration de points dans \odot_R . On suppose que les points de \mathcal{C} sont tous séparés d'une distance au moins $\frac{1}{2}$ et sont tous à distance au moins $\frac{1}{2}$ de $\partial \odot_{R'}$.*
- *Soit E un champ électrique compatible vérifiant*

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} E = \mathcal{C} - dx \text{ dans } \odot_R.$$

On suppose que l'énergie électrique est bien contrôlée, au sens où⁸

$$(5.1.1) \quad \int_{\partial \odot_{R'}} |E|^2 \leq 10^2 R.$$

Alors il existe une configuration \mathcal{C}^{scr} dans \odot_R et un champ électrique E^{scr} compatible avec \mathcal{C}^{scr} , tels que :

- (1) E^{scr} est écranté, au sens où $E^{\text{scr}} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial \odot_R$.
- (2) E^{scr} coïncide avec E dans $\odot_{R'}$.
- (3) \mathcal{C}^{scr} a exactement R^2 points (c'est une conséquence du premier item).
- (4) \mathcal{C}^{scr} coïncide avec \mathcal{C} dans $\odot_{R'}$ (c'est une conséquence du deuxième item).
- (5) L'énergie de E^{scr} vérifie :

$$(5.1.2) \quad \int_{\odot_R} |E_{\vec{\eta}}^{\text{scr}}|^2 \leq \int_{\odot_R} |E_{\vec{\eta}}|^2 + 10^2 C \varepsilon R^2,$$

avec C une constante universelle.

Démonstration. Notons Ext la couronne définie par $\text{Ext} := \odot_R \setminus \odot_{R'}$.

Première étape : découpage du bord: La première étape consiste à découper la couronne Ext en $\frac{2\pi}{2\pi\varepsilon} = 10^6$ secteurs $\{H_i\}_{i \in I}$ d'angle au centre de mesure $2\pi\varepsilon$. Quitte à perturber chaque angle au centre par moins que $\varepsilon/5$, on peut garantir que chaque quantité du type

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial H_i \cap \partial \odot_{R'}} E \cdot n + |H_i|$$

8. Comme on a fait l'hypothèse que les charges étaient éloignées de la bordure $\partial \odot_R$, il n'y a pas besoin d'y tronquer le champ.

est un entier. En effet, si l'on augmente (resp. diminue) l'angle au centre d'un secteur H_i d'une quantité $\varepsilon/5$, on augmente (resp. diminue) son volume $|H_i|$ par une quantité d'ordre $R^2\varepsilon^2$ tandis que la contribution du champ normal n'a varié que d'au plus l'intégrale de $|E|$ sur un arc de cercle \mathcal{A} de rayon R sous-tendu par un angle au centre $\varepsilon/5$ (et dont la longueur d'arc est donc d'ordre $R\varepsilon$) que l'on peut majorer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathcal{A}} |E| \leq C(R\varepsilon)^{1/2} \left(\int_{\partial\odot_R} |E|^2 \right)^{1/2} \leq 10CR\varepsilon^{1/2} \ll \varepsilon^2 R^2.$$

On applique ensuite un argument de valeurs intermédiaires pour perturber chaque secteur successivement (par exemple en tournant dans le sens trigonométrique), et on remarque que la condition globale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\text{Ext} \cap \partial\odot_{R'}} E \cdot n + |\text{Ext}| \text{ est un entier}$$

est vérifiée, ce qui assure que l'on peut s'arrêter après avoir perturbé tous les secteurs sauf un.

Maintenant, pour chaque H_i , on note m_i la quantité

$$m_i = \frac{1}{|H_i|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial H_i \cap \partial\odot_R} E \cdot n + |H_i| \right)$$

On a garanti par construction le fait que $m_i|H_i|$ soit un entier. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse faite sur l'énergie du champ E le long du bord, on voit que

$$|m_i - 1| \leq 10C \frac{1}{\varepsilon^2 R^2} (\varepsilon R)^{1/2} R^{1/2} \leq 10C \frac{1}{\varepsilon^{3/2} R}$$

En particulier comme $\varepsilon^{3/2} R \gg 1$ on a

$$|m_i - 1| < \frac{1}{2}.$$

On découpe de manière naturelle chaque secteur H_i en petits sous-secteurs $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I_i}$, dont l'aire est égale à $\frac{1}{m_i}$, et les côtés et les rayons intérieurs et extérieurs sont tous d'ordre 1.

Deuxième étape : définition des champs: Soit $E^{(1,i)}$ le champ gradient solution de

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} E^{(1,i)} = (m_i - 1) dx,$$

avec pour conditions au bord :

$$E^{(1,i)} \cdot \vec{n} = \begin{cases} -E \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial H_i \cap \partial\odot_{R'} \\ 0 & \text{sur le reste du bord.} \end{cases}$$

Cette équation admet une solution parce que la charge totale $(m_i - 1) \times |H_i|$ et la circulation du champ au bord du domaine coïncident par construction et définition de m_i . Une estimée elliptique permet de contrôler l'énergie de $E^{(1,i)}$ par

$$\int_{H_i} |E^{(1,i)}|^2 \leq C \times \varepsilon R \times \int_{\partial H_i \cap \partial\odot_{R'}} |E|^2$$

Dans chaque petit secteur R_α on place une masse de Dirac en un point p_α situé au centre du secteur, et on définit $E^{(2,\alpha)}$ comme le champ gradient solution de

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} E^{(2,\alpha)} = \delta_{p_\alpha} - m_i$$

avec condition de Neumann nulle au bord (ce qui est possible car la charge totale est nulle). La solution n'est pas dans L^2 (pour les mêmes raisons que précédemment : la singularité près de p_α n'est pas de carré intégrable), il faut donc une fois encore effectuer une troncature du champ. L'énergie du champ (tronqué) est d'ordre 1.

Troisième étape : construction de la solution: On choisit alors pour configuration \mathcal{C}^{scr} la configuration \mathcal{C} que l'on restreint à $\odot_{R'}$ et à laquelle on ajoute tous les points p_α placés à l'étape précédente. Pour le champ E^{scr} , on recolle la restriction de E à $\odot_{R'}$ et la somme des tous les champs construits précédemment. On a bien, par construction, conservé \mathcal{C} et E à l'intérieur du domaine, et écranté E^{scr} sur le bord extérieur de \odot_R . On vérifie ensuite que E^{scr}

est compatible avec \mathcal{C}^{scr} . La dernière chose à faire est de contrôler l'énergie de \mathbf{E}^{scr} . La somme des énergies des champs $\mathbf{E}^{(1,i)}$ est bornée par

$$\sum_{i \in I} \int_{H_i} |\mathbf{E}^{(1,i)}|^2 \leq C \times \varepsilon R \times \sum_{i \in I} \int_{\partial H_i \cap \partial \odot_{R'}} |\mathbf{E}|^2 \leq C \times \varepsilon 10^2 R^2,$$

et la somme des énergies dues aux champs de type $\mathbf{E}^{(2,\alpha)}$ est contrôlée par le nombre de secteurs R_α , qui est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 R^2$. On peut donc majorer l'énergie additionnelle par $C(10^2 + 1)\varepsilon R^2$ comme annoncé. \square

5.2. Application 1 : construction d'une recovery sequence pour l'énergie logarithmique en volume infini. Soit \mathbf{P} un processus ponctuel stationnaire. Fixons $K_0 = [0, 1]^2$ et $\mu_0 = \mathbf{1}_{K_0} dx$. On a appris précédemment que si \mathbf{X}_N est une suite de N -uplets dont le champ empirique $\mathbf{P}_N^{\text{emp}}$ converge vers \mathbf{P} , alors la Γ -lim inf suivante est vraie :

$$(5.2.1) \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{F}_N(\mathbf{X}'_N | \mu_0') \geq \mathcal{W}(\mathbf{P}, 1).$$

La preuve consistait essentiellement à écrire $\mathbf{F}_N(\mathbf{X}'_N | \mu_0')$ comme la norme L^2 d'un certain champ électrique, à introduire le processus électrique naturellement associé à ce champ, à voir que ce processus admettait une limite faible dans $\mathcal{P}(\text{Elec})$, puis à appliquer le lemme de Fatou qui garantit que la norme L^2 est semi-continue inférieurement pour la topologie faible sur les champs électriques. On avait alors construit un processus électrique limite compatible avec $(\mathbf{P}, 1)$ et dont l'énergie était bornée par la lim inf dans (5.2.1). Le résultat en découlait par définition de \mathcal{W} .

On cherche maintenant à construire des *recovery sequences*, des exemples où l'inégalité inverse est vraie, c'est-à-dire des \mathbf{X}_N tels que $\mathbf{P}_N^{\text{emp}}$ converge vers \mathbf{P} et qui vérifient de plus

$$(5.2.2) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{F}_N(\mathbf{X}'_N | \mu_0') \leq \mathcal{W}(\mathbf{P}, 1).$$

Il y a deux difficultés à cela :

- (1) La singularité de l'interaction : en un mot, il faut faire attention à bien séparer les points de \mathbf{X}_N .
- (2) La nature à longue portée (globale) de l'interaction logarithmique, et la nature locale de la topologie sur Config (et par conséquent sur $\mathcal{P}(\text{Config})$). Garantir que $\mathbf{P}_N^{\text{emp}}$ ressemble à \mathbf{P} est une tâche locale, mais le calcul de \mathbf{F}_N est, a priori, un calcul global.

Proposition 8. *Il existe au moins une recovery sequence, c'est-à-dire qu'on peut trouver une configuration $\mathcal{C}^{\text{glob}}$ à N points dont le champ empirique est égale à $\mathbf{P} + o_N(1)$ et dont l'énergie \mathbf{F}_N est bornée asymptotiquement par $N(\mathcal{W}(\mathbf{P}, 1) + o_N(1))$.*

Démonstration. On donne les grandes lignes de la preuve.

Travaillons en coordonnées zoomées et partitionnons $[0, \sqrt{N}]^2$ en carrés $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{N/R^2}$ de côté $1 \ll R \ll \sqrt{N}$. Soit $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{N/R^2}$ un échantillon de \mathbf{P} . On place la configuration \mathcal{C}_1 dans le carré \mathcal{C}_1 , la configuration \mathcal{C}_2 dans le carré \mathcal{C}_2 etc. On obtient ainsi une configuration finie dans K_0' .

Par la loi des grands nombres, la moyenne $\frac{1}{N/R^2} \sum_{i=1}^{N/R^2} \delta_{\mathcal{C}_i}$ ressemble à \mathbf{P} . Cette moyenne est une sorte de champ empirique discret associé à la configuration finie. On peut vérifier que le champ empirique est également proche de \mathbf{P} . Néanmoins, deux constats s'imposent :

- (1) Rien ne garantit que la configuration ait exactement N points au total.
- (2) Le calcul de l'énergie logarithmique pour cette configuration finie n'est pas évident du tout.

On va régler ces deux problèmes d'un coup en appliquant la procédure d'écrantage.

Comme \mathbf{P} est d'énergie finie (faute de quoi il n'y a rien à faire), il existe $\mathbf{P}^{\text{elec}} \in \mathcal{P}(\text{Elec})$ compatible avec $(\mathbf{P}, 1)$ qui réalise l'infimum dans la définition de $\mathcal{W}(\mathbf{P}, 1)$. En particulier, l'espérance sous \mathbf{P}^{elec} de l'énergie électrique dans un carré de côté R est égale à $R^2 \mathcal{W}(\mathbf{P})$. Dans chaque carré \mathcal{C}_i on associe à \mathcal{C}_i un champ \mathbf{E}_i compatible d'énergie minimale. La somme des énergies de ces champs est comparable à $\frac{N}{R^2} \times R^2 \mathcal{W}(\mathbf{P})$ par la loi des grands nombres. Puis, (sous réserve de vérifier que les hypothèses sont vérifiées dans une grande proportion des carrés) on applique la procédure d'écrantage à chaque $(\mathcal{C}_i, \mathbf{E}_i)$. On obtient des nouvelles configurations $\mathcal{C}_i^{\text{scr}}$ et de nouveaux champs $\mathbf{E}_i^{\text{scr}}$. Comme les champs sont, par construction, écrantés, on peut définir un champ global $\mathbf{E}^{\text{glob}} := \sum_{i=1}^{N/R^2} \mathbf{E}_i^{\text{scr}}$ qui est compatible

avec la configuration globale $\mathcal{C}^{\text{glob}} := \sum_{i=1}^{N/R^2} \mathcal{C}_i^{\text{scr}}$ (qui a exactement N points), et dont l'énergie est donnée par la somme des énergies de chaque E_i^{scr} . Or la procédure d'écrantage garantit que l'énergie de E_i^{scr} est presque égale à celle de E_i (à un ajout négligeable près). On a donc obtenu un champ *global* E^{glob} dont l'énergie est contrôlée par $N\mathcal{W}(P)$. Il reste à vérifier que cela donne bien une borne sur F_N . Enfin, comme la procédure d'écrantage ne change que peu les configurations (dans une couronne étroite près du bord), le champ empirique n'a été que peu modifié et celui de $\mathcal{C}^{\text{glob}}$ ressemble toujours à P . \square

Comme on l'a observé dans le cas macroscopique, les questions de physique statistique demandent en fait de savoir construire *un volume* de telles configurations. On trouve dans [SS15b] la première preuve de cette Γ -lim inf, avec justification de l'existence d'une famille de volume $\exp(-O(N \log N))$. On peut même construire une famille ayant le volume optimal $\exp(-N\mathcal{E}(P) + o(N))$, ce qui est démontré dans [LS17] et se révèle nécessaire afin d'obtenir le principe de grandes déviations énoncé plus haut.

6. ÉNERGIE INTRINSÈQUE ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

L'énergie $P \mapsto \mathcal{W}(P)$ associée à un processus ponctuel *en passant par les champs* est donc "la bonne énergie", puisqu'elle est connectée à la *vraie* énergie F_N par une Γ -limite. Sa définition est néanmoins extrêmement peu explicite. On introduit alors une autre énergie, appelée "énergie intrinsèque", et qui possède une expression explicite en termes de la fonction de corrélation à deux points du processus P , et on relie ces deux notions.

6.0.1. *Définition de l'énergie intrinsèque.* Soit P un processus ponctuel stationnaire d'intensité 1. On définit l'énergie intrinsèque de P et on note $\mathcal{W}^{\text{int}}(P)$ la quantité suivante

$$(6.0.1) \quad \mathcal{W}^{\text{int}}(P) := \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|\square_R|} \mathbf{E}_P \left[\iint_{x \neq y, \square_R \times \square_R} -\log |x - y| (d\mathcal{C}(x) - dx) (d\mathcal{C}(y) - dy) \right].$$

Théorème 4. *Supposons que la fonction de corrélation à deux points de P vérifie une hypothèse de décroissance rapide des corrélations, par exemple*

$$(6.0.2) \quad (\rho_2 - 1)(v) = O(|v|^{-4}),$$

et que l'on dispose d'une estimée de discrédance du type

$$\mathbf{E}_P [\text{Discr}_R^2] = O(R^{d-\varepsilon}).$$

Alors d'une part $\mathcal{W}^{\text{int}}(P)$ admet l'expression

$$(6.0.3) \quad \mathcal{W}^{\text{int}}(P) := \int_{\mathbb{R}^d} -\log |v| (\rho_2 - 1)(|v|) dv,$$

et d'autre part on a l'inégalité "électrique-intrinsèque"

$$(6.0.4) \quad \mathcal{W}(P) \leq \mathcal{W}^{\text{int}}(P).$$

Démonstration. Par définition de la fonction de corrélation, on peut écrire $\mathcal{W}^{\text{int}}(P)$ sous la forme

$$\mathcal{W}^{\text{int}}(P) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|\square_R|} \iint_{x \neq y, \square_R \times \square_R} -\log |x - y| (\rho_2(x, y) - 1) dx dy.$$

Comme P est stationnaire, on a $\rho_2(x, y) = \rho_2(|x - y|)$ et une application du théorème de Fubini donne

$$\mathcal{W}^{\text{int}}(P) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|\square_R|} \int_{\square_{2R}} -\log |v| (\rho_2(v) - 1) \prod_{i=1}^d (2R - |v_i|) dv,$$

où v_i sont les d coordonnées de v dans \mathbb{R}^d . Si $\rho_2 - 1$ tend vers 0 assez vite⁹, on trouve bien comme annoncé, par convergence dominée :

$$\mathcal{W}^{\text{int}}(P) := \int_{\mathbb{R}^d} -\log |v| (\rho_2 - 1)(|v|) dv.$$

Pour connecter \mathcal{W} et \mathcal{W}^{int} , l'idéal serait d'arriver à produire un processus électrique P^{elec} compatible avec P et dont l'énergie moyenne soit majorée par $\mathcal{W}^{\text{int}}(P)$. On va mettre en pratique cette idée, en construisant en fait une suite de processus.

9. Sans cette hypothèse de décroissance, l'expression de \mathcal{W}^{int} est moins simple, mais toujours explicite en termes de ρ_2 .

Soit $R > 0$ très grand, fixé et soit \mathcal{C}_R une réalisation du processus P dans \square_R . Il existe toujours un champ électrique compatible avec \mathcal{C} dans \square_R , donné par le *champ électrique local*, auquel on peut penser comme étant le “vrai” champ engendré par le système de charges dans \square_R , à savoir

$$(6.0.5) \quad E^{\text{loc},R}(z) := \nabla \text{Pot}^{\text{loc},R}(z) := \int_{\square_R} -\nabla_z \log |z - x| (d\mathcal{C}_R - dx).$$

Dans la suite, on oublie une fois encore les problèmes liés à la troncature du champ. Pour $S > R$ on écrit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\square_R} |E^{\text{loc},R}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\square_S} |E^{\text{loc},R}|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\square_S} -\text{div} E^{\text{loc},R} \text{Pot}^{\text{loc},R} + \int_{\partial \square_S} \text{Pot}^{\text{loc},R} E^{\text{loc},R} \cdot \vec{n} \right),$$

en utilisant une intégration par parties. Le premier terme dans le membre de droite correspond simplement aux interactions dans \square_R et le second est un terme d’erreur que l’on peut contrôler au premier ordre en disant que pour z loin de \square_R on a $\text{Pot}^{\text{loc},R} \approx \text{Discr}_R \log |z|$ et $E^{\text{loc},R} \approx \text{Discr}_R \frac{z}{|z|^2}$.

On obtient, en prenant $S = R^4$ (par exemple)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\square_R} |E^{\text{loc},R}|^2 \leq \iint_{x \neq y, \square_R \times \square_R} -\log |x - y| (d\mathcal{C}(x) - dx) (d\mathcal{C}(y) - dy) + \text{Discr}_R^2 O(\log R).$$

En prenant l’espérance sous P , on voit donc que

$$\mathbf{E}_P \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\square_R} |E^{\text{loc},R}|^2 \right] \leq |\square_R| \mathbf{E}_P \left[\frac{1}{|\square_R|} \iint_{x \neq y, \square_R \times \square_R} -\log |x - y| (d\mathcal{C}(x) - dx) (d\mathcal{C}(y) - dy) \right] + \mathbf{E}_P [\text{Discr}_R^2] O(\log R).$$

Notre hypothèse sur la discrédance nous permet de négliger le dernier terme¹⁰.

Il apparaît que l’énergie électrique moyenne du champ local est contrôlée par l’énergie intrinsèque. Pour l’instant, ce n’est cependant qu’une considération locale (dans \square_R) et pas globale (l’énergie d’un champ compatible avec \mathcal{C} dans \mathbb{R}^d tout entier). On peut pallier ce manque en deux étapes :

- (1) Appliquer la procédure d’écrantage dans \square_R . On change \mathcal{C}_R et $E^{\text{loc},R}$ en $\mathcal{C}_R^{\text{scr}}$ et E_R^{scr} au prix d’une petite modification sur la configuration, le champ et l’énergie électrique. Comme \mathcal{C}_R est la réalisation aléatoire de P , le résultat $\mathcal{C}_R^{\text{scr}}$ est encore une variable aléatoire.
- (2) On réalise un pavage de \mathbb{R}^d par des translatsés de \square_R , et on colle dans chaque cellule une copie indépendante de $\mathcal{C}_R^{\text{scr}}$. Chacune vient accompagnée d’un champ électrique compatible E_R^{scr} , et ces champs se recollent bien sur le bord de deux cellules adjacentes car ils sont, par construction, écrantés. On obtient ainsi une configuration globale aléatoire et un champ global compatible.
- (3) On rend le processus stationnaire en moyennant sur les translations dans \square_R .

On obtient alors un processus stationnaire \tilde{P}_R qui vérifie :

- (1) \tilde{P}_R ressemble à P dans \square_T pour $1 \ll T \ll R$.
- (2) \tilde{P}_R est stationnaire, d’intensité 1 et $\mathcal{W}(\tilde{P}_R) \leq \mathcal{W}^{\text{int}}(P) + o_R(1)$.

En prenant $R \rightarrow \infty$ on obtient une suite de processus stationnaires qui convergent vers P et dont l’énergie (électrique) est majorée asymptotiquement par $\mathcal{W}^{\text{int}}(P)$, or \mathcal{W} est semi-continue inférieurement sur l’espace des processus ponctuels stationnaires. Cela conclut la preuve de l’inégalité électrique-intrinsèque. \square

L’énergie intrinsèque et son lien avec la “vraie” énergie a été étudiée dans [Leb16], inspirée par l’approche de Borodin-Serfaty dans [BS13].

6.1. Application 2 : étude des minimiseurs de l’énergie libre à haute température. Quand $\beta \rightarrow 0$, le problème de minimisation de $\beta\mathcal{W} + \mathcal{E}$ revient formellement à minimiser \mathcal{E} , or l’entropie relative spécifique atteint son minimum uniquement en le processus de Poisson lui-même. On s’attend donc à ce que les minimiseurs de \mathcal{F}_β ressemblent à un processus de Poisson quand $\beta \rightarrow 0$. C’est effectivement le cas, comme énoncé dans le résultat suivant.

Théorème 5 ([Leb16]). *Soit $\{P_\beta\}_{\beta>0}$ une famille de minimiseurs de $\mathcal{F}_\beta = \beta\mathcal{W} + \mathcal{E}$. Quand $\beta \rightarrow 0$ on a $P_\beta \rightarrow \Pi$.*

10. Sans cette hypothèse, il faut tenir compte dans la définition de \mathcal{W}^{int} d’un terme d’erreur lié à la discrédance.

Démonstration. On commence par montrer que $\mathcal{E}(P_\beta)$ tend vers 0 quand $\beta \rightarrow 0$. Pour cela, il suffit de construire des processus candidats qui sont d'énergie finie et dont l'entropie relative spécifique tend vers 0. On va les chercher sous la forme d'approximations du processus de Poisson (on ne sait pas si le processus de Poisson lui-même est d'énergie finie pour $d = 2$, et on sait qu'il est d'énergie infinie pour $d = 1$, donc on ne peut pas le prendre comme candidat).

Soit M un grand entier, on fait un pavage de \mathbb{R}^d par des translats de \square_R et on place dans chaque cellule une copie indépendante d'un processus de Bernoulli à $|\square_M|$ points, puis on moyenne sur les translations dans \square_M afin d'obtenir un processus ponctuel stationnaire que l'on note \hat{P}_M . La fonction de corrélation à deux points de \hat{P}_M peut se calculer explicitement, il nous suffit d'observer que $\rho_2 - 1$ est bornée à support compact, ce qui entraîne que $\mathcal{W}^{\text{int}}(\hat{P}_M) < +\infty$. De plus \hat{P}_M vérifie l'estimée $\mathbf{E}_{\hat{P}_M}[\text{Discr}_R] = O(R^{d-1})$, nous sommes donc en position d'appliquer l'inégalité électrique-intrinsèque et de garantir que

$$\mathcal{W}(\hat{P}_M) < +\infty.$$

L'entropie relative d'un processus de Bernoulli à $|\square_M|$ points dans \square_M par rapport au processus de Poisson d'intensité 1 dans \square_M est $o(|\square_M|)$, en effet le premier processus est égal au second conditionné au fait qu'il y ait $|\square_M|$ points dans \square_M , et on a donc

$$\begin{aligned} & \text{Ent}[\text{Bernoulli à } |\square_M| \text{ points dans } \square_M \mid \text{Poisson d'intensité 1 dans } \square_M] \\ &= -\log \mathbf{E}_{\text{Poisson d'intensité 1 dans } \square_M} [|\square_M| \text{ points dans } \square_M] = O(\log M) = o(|\square_M|), \end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{1}{|\square_M|} \text{Ent}[\text{Bernoulli à } |\square_M| \text{ points dans } \square_M \mid \text{Poisson d'intensité 1 dans } \square_M] = o_M(1),$$

et plus généralement on vérifie que $\mathcal{E}(\hat{P}_M) = o_M(1)$.

L'existence de tels processus candidats implique que les *minimiseurs* de \mathcal{F}_β doivent vérifier

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{E}(P_\beta) = 0.$$

On conclut alors en appliquant une version de l'inégalité de Pinsker adaptée au volume infini.

Lemme 7 (Inégalité de Pinsker spécifique). *Soit P un processus ponctuel stationnaire. On a*

$$(6.1.1) \quad \sup_{R>0} \frac{|P_{\square_R} - \Pi_{\square_R}|_{TV}}{\sqrt{|\square_R|}} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{E}(P)}.$$

Démonstration. L'inégalité de Pinsker classique affirme qu'on peut majorer la distance en variation totale de μ à ν en fonction de l'entropie relative spécifique de μ par rapport à ν

$$|\mu - \nu|_{TV} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \text{Ent}(\mu|\nu)}.$$

On en déduit naturellement que

$$|P_{\square_R} - \Pi_{\square_R}|_{TV} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \text{Ent}(P_{\square_R}|\Pi_{\square_R})},$$

et donc que

$$\frac{|P_{\square_R} - \Pi_{\square_R}|_{TV}}{\sqrt{|\square_R|}} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\text{Ent}(P_{\square_R}|\Pi_{\square_R})}{|\square_R|}}.$$

En prenant le sup des deux côtés et en utilisant la caractérisation (3.2.2) de l'entropie relative spécifique, on en déduit le résultat. \square

\square

On peut également s'intéresser à la limite $\beta \rightarrow \infty$ du problème de minimisation de l'énergie libre. Il semble qu'alors il faille principalement minimiser l'énergie \mathcal{W} . En dimension 1, l'unique minimiseur de \mathcal{W} (parmi les processus ponctuels stationnaires) est le "réseau stationnaire", c'est-à-dire une configuration de points toujours égale à une copie de \mathbb{Z} avec un choix aléatoire de l'origine du réseau uniforme dans $[0, 1)$. En dimension 2, on s'attend à ce que l'unique minimiseur soit un "réseau triangulaire stationnaire" mais la preuve de cette "conjecture de cristallisation" est un problème ouvert majeur, voir [BL15] pour un exposé de la situation.

Le processus Sine-beta comme unique minimiseur de l'énergie libre

En dimension 1, le lien étroit entre les log-gas et certains modèles de matrices aléatoires en permet une étude approfondie. On dispose notamment du résultat suivant :

Théorème 6 ([VV09, KS09]). *Soit $\mathcal{C}_{N,\bar{x}} := \sum_{i=1}^N \delta_{N^{1/d}(x_i - \bar{x})}$ l'observable microscopique “système vu de \bar{x} ” telle que définie en (3.1.2). Si \bar{x} est à l'intérieur du support K_0 , alors $\mathcal{C}_{N,\bar{x}}$ converge en loi vers un processus ponctuel stationnaire qui est universel à dilatation des points près (l'intensité du processus limite doit être égal à $\mu_0(\bar{x})$). On note Sine_β le processus ayant une intensité 1.*

Ce résultat n'est, à l'heure actuelle, pas accessible avec des techniques purement “physique statistique”. La preuve repose sur une analyse du modèle matriciel tridiagonal associé. Notons que l'existence même de valeurs d'adhérence pour la loi de $\mathcal{C}_{N,\bar{x}}$ n'est pas évidente, car il n'y a pas de compacité “gratuite”. La description du processus limite est donnée en comptant le nombre d'explosions d'un certain système d'équations différentielles stochastiques couplées, voir aussi [VV17b, VV17a] pour une relecture en termes de spectre d'un opérateur aléatoire en dimension infinie. Si ce point de vue est naturel vu l'origine “matrices aléatoires” du log-gas, il est cependant naturel de chercher à caractériser le processus Sine_β sous un angle plus “physique”, voir par exemple [DHLM19]. On va étudier ici le lien entre Sine_β et la fonctionnelle d'énergie libre \mathcal{F}_β .

En rapprochant le principe de grandes déviations énoncé au Théorème 3 et le résultat de convergence du Théorème 6 cité plus haut, il est facile d'obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3. *Pour tout $\beta > 0$, le processus Sine_β minimise \mathcal{F}_β .*

Cette propriété variationnelle implique par exemple, au vu de la section 6.1

Corollaire 4 ([Leb16]). *Quand $\beta \rightarrow 0$, le processus Sine_β converge vers un processus de Poisson d'intensité 1,*

ce qui était déjà connu, par des méthodes d'analyse stochastique, voir [AD14]. Il se trouve que \mathcal{F}_β possède en fait *un unique minimiseur*, qui est donc Sine_β , ce qui offre une caractérisation variationnelle du processus limite en dimension 1.

Théorème 7 ([EHL18]). *La fonctionnelle d'énergie libre \mathcal{F}_β du log-gas en dimension 1 possède un unique minimiseur.*

Le reste de la section est dévolu à la preuve de ce théorème.

7. CONVEXITÉ PAR DÉPLACEMENT

Une méthode usuelle pour montrer l'unicité des minimiseurs d'une fonctionnelle consiste à établir que cette fonctionnelle est (strictement) convexe sur l'espace considéré. L'unicité découle alors d'un simple argument de contradiction : s'il y avait deux minimiseurs distincts, par stricte convexité n'importe quel barycentre non trivial donnerait un meilleur candidat, ce qui est absurde. Malheureusement, \mathcal{F}_β est *affine* sur l'espace des processus ponctuels stationnaires, elle est donc bien convexe mais pas strictement, et l'argument précédent ne s'applique pas.

Il existe cependant une deuxième notion de convexité pour les mesures de probabilité définies sur certains espaces, par exemple \mathbb{R}^n : c'est la convexité dite “par déplacement” (*displacement convexity*), définie au sein de la théorie du transport de mesures.

7.0.1. *Transport de mesures.* Soit μ_0, μ_1 deux mesures de probabilité sur \mathbb{R}^n . On dit que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une *application de transport* de μ_0 vers μ_1 si le poussé-en-avant de μ_0 par T est égal à μ_1 . Le *coût quadratique* de T est alors défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x - T(x)\|^2 d\mu_0(x).$$

Plus généralement, on dit que Π est un *plan de transport* entre μ_0 et μ_1 si Π est une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dont les marginales coïncident avec μ_0 et μ_1 . Le coût quadratique de Π est alors défini par

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|x - y\|^2 d\Pi(x, y).$$

Si T est une application de transport de μ_0 vers μ_1 , alors le poussé-en-avant de μ_0 par $x \mapsto (x, T(x))$ est un plan de transport entre μ_0 et μ_1 . L'existence de plans de transport est triviale, et un argument relativement élémentaire montre qu'on peut trouver des plans de transport à coût quadratique

minimal. Le fait que ces plans de transports sont en fait, sous certaines hypothèses de régularité sur μ_0 et μ_1 , donnés par des *applications de transport* est un résultat majeur de la théorie. Une application de transport à coût quadratique minimal est appelée *transport optimal*. On appelle *distance de 2-Wasserstein* et on note $\text{Wass}_2(\mu_0, \mu_1)$ la racine du coût quadratique optimal.

À chaque application de transport T entre μ_0 et μ_1 , on peut associer une famille de mesures qui interpolent entre μ_0 et μ_1 en définissant, pour $t \in [0, 1]$, la mesure μ_t comme un certain poussé-en-avant de μ_0 :

$$\mu_t := ((1-t)\text{Id} + tT) \# \mu_0.$$

Si F est une fonctionnelle définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on dit que F est (strictement) *convexe par déplacement* si $t \mapsto F(\mu_t)$ est (strictement) convexe. Cette notion est introduite par McCann dans [McC97].

- Une fonctionnelle du type $\mu \mapsto \int V d\mu$ est toujours linéaire pour l'interpolation usuelle. Si V est (strictement) convexe, elle est (strictement) convexe par déplacement.
- Une fonctionnelle du type $F(\mu) := \mu \mapsto \iint W(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$ n'est pas convexe en général pour l'interpolation usuelle, même si W est convexe. En revanche si W est convexe, elle est convexe par déplacement. Pour la stricte convexité, il y a une obstruction technique liée à l'invariance par translation.
- L'entropie relative est strictement convexe au sens usuel, et McCann prouve qu'elle est encore convexe par déplacement, *le long d'un déplacement "optimal"*.

Le dernier point (convexité par déplacement de l'entropie relative) est le seul endroit où l'on fait l'hypothèse d'optimalité. Les deux premiers résultats sont en fait tout à fait élémentaires. Soit μ_0, μ_1 et T un transport de μ_0 vers μ_1 , posons $\mu_{1/2}$ la mesure "milieu" $\mu_t := \frac{1}{2}(\text{Id} + T) \# \mu_0$. On a

$$\int V d\mu_{1/2} - \frac{1}{2} \left(\int V d\mu_0 + \int V d\mu_1 \right) = \int V \left(\frac{1}{2}(x + T(x)) - \frac{1}{2}(V(x) + V(T(x))) \right) d\mu_0(x),$$

qui est bien ≤ 0 si V est convexe. Supposons par exemple que V soit c -convexe c'est-à-dire que la dérivée seconde de V est minorée par $c > 0$. On peut alors utiliser une inégalité de convexité quantitative pour V et écrire que

$$\begin{aligned} \int V \left(\frac{1}{2}(x + T(x)) - \frac{1}{2}(V(x) + V(T(x))) \right) d\mu_0(x) &\leq -\frac{1}{8}c \int (x - T(x))^2 d\mu_0(x) \\ &\leq -\frac{1}{8}c \text{Wass}_2(\mu_0, \mu_1)^2. \end{aligned}$$

C'est une forme élémentaire *d'inégalité fonctionnelle*, faisant intervenir la distance de Wasserstein. Pour les fonctionnelles de type "interaction", on peut écrire de la même façon

$$\begin{aligned} &\iint W(x-y) d\mu_{1/2}(x) d\mu_{1/2}(y) - \frac{1}{2} \left(\iint W(x-y) d\mu_0(x) d\mu_0(y) + \iint W(x-y) d\mu_1(x) d\mu_1(y) \right) \\ &= \iint W \left(\frac{T(x)+x}{2} - \frac{T(y)+y}{2} \right) - \frac{1}{2} (W(x-y) + W(T(x)-T(y))) d\mu_0(x) d\mu_0(y) \\ &= \iint W \left(\frac{x-y}{2} + \frac{T(x)-T(y)}{2} \right) - \frac{1}{2} (W(x-y) + W(T(x)-T(y))) d\mu_0(x) d\mu_0(y), \end{aligned}$$

qui est bien ≤ 0 si W est convexe. Supposons encore une fois que W est c -convexe, l'inégalité de convexité quantitative s'écrit

$$\begin{aligned} &\iint W \left(\frac{x-y}{2} + \frac{T(x)-T(y)}{2} \right) - \frac{1}{2} (W(x-y) + W(T(x)-T(y))) d\mu_0(x) d\mu_0(y) \\ &\leq -\frac{1}{8}c \iint [(x-y) - (T(x)-T(y))]^2 d\mu_0(x) d\mu_0(y). \end{aligned}$$

Le gain quantitatif ne fait pas intervenir la distance de Wasserstein entre μ_0 et μ_1 , mais mesure la différence entre $x-y$ et $T(x)-T(y)$ pour x, y distribués selon μ_0 . En particulier, si ce terme est nul, c'est que $\mu_0 \otimes \mu_0$ presque partout on a $x-y = T(x)-T(y)$, donc T est une translation sur le support de μ_0 . On peut introduire une quantité qui représente à quel point μ_0 et μ_1 sont loin l'une de l'autre à translation près :

$$\widetilde{\text{Wass}}_2(\mu_0, \mu_1) = \inf_{T \text{ application de transport}} \iint [(x-y) - (T(x)-T(y))]^2 d\mu_0(x) d\mu_0(y)$$

et écrire alors une seconde inégalité fonctionnelle

$$\iint W\left(\frac{x-y}{2} + \frac{T(x)-T(y)}{2}\right) - \frac{1}{2}(W(x-y) + W(T(x)-T(y))) \, d\mu_0(x)d\mu_0(y) \leq -\frac{1}{8}c\widetilde{\text{Wass}}_2(\mu_0, \mu_1).$$

On peut vérifier, par exemple si μ_0 et μ_1 sont à support compact, et si μ_0 et μ_1 ne sont pas égales à translation près, que $\widetilde{\text{Wass}}_2(\mu_0, \mu_1) > 0$.

8. IDÉE DE LA PREUVE

L'idée centrale de la preuve du Théorème 7, qui nous a été suggérée par Alice Guionnet, est de vérifier que \mathcal{F}_β est une fonctionnelle "convexe par déplacement". C'est une intuition raisonnable, au vu de la discussion précédente, puisque \mathcal{F}_β est la somme d'une fonctionnelle d'interaction \mathcal{W} avec un noyau $-\log$ convexe sur $(0, +\infty)$ et d'un terme d'entropie relative. Cependant, la théorie du transport (optimal), bien développée en dimension finie - c'est-à-dire pour des mesures sur \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$ - est encore balbutiante dans le contexte des processus ponctuels, qui sur la droite réelle peuvent être vus comme des mesures sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. On va procéder en se restreignant à de grands intervalles de \mathbb{R} , où les processus redeviennent des objets de dimension finie.

8.1. Une distance sur l'espace des processus ponctuels stationnaires.

8.1.1. *Points et trous comptés depuis l'origine.* Si \mathcal{C} est une configuration de points sur \mathbb{R} , on note énumère les points de \mathcal{C} dans l'ordre naturel avec la convention que x_0 est le premier point d'abscisse positive (ou nulle) (x_{-1} est donc le dernier point d'abscisse négative etc.). On énumère également les trous (*gaps*) de la configuration dans l'ordre naturel en posant $\Gamma_1 = x_1 - x_0$ (et $\Gamma_0 = x_0 - x_{-1}$ etc.).

On va mesurer la distance entre deux processus ponctuels stationnaires en comparant la distribution des trous pour chacun : soit P^0, P^1 deux processus ponctuels sur \mathbb{R} , on pose

$$d_{\text{Gaps}}(P^0, P^1) := \liminf_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{R} \inf \left\{ \mathbf{E}_\Pi \left[\sum_{i=-R}^R \frac{|\Gamma_i(\mathcal{C}^0) - \Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2}{|\Gamma_i(\mathcal{C}^0)|^2 + |\Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2} \right], \Pi \text{ plan de transport de } P^0 \text{ à } P^1 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 9 ([EHL18]). *Sur l'espace des processus ponctuels stationnaires d'énergie \mathcal{W} finie, d_{Gaps} est une distance.*

Le point vraiment délicat à vérifier est la non-dégénérescence, qui revient à affirmer que si P^0 et P^1 sont deux processus ponctuels stationnaires d'énergie finie tels que $P^0 \neq P^1$, on a

$$\mathfrak{g} := \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \inf \left\{ \mathbf{E}_\Pi \left[\sum_{i=-R}^R \frac{|\Gamma_i(\mathcal{C}^0) - \Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2}{|\Gamma_i(\mathcal{C}^0)|^2 + |\Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2} \right], \Pi \text{ plan de transport de } P^0 \text{ à } P^1 \right\} > 0.$$

L'expression du dénominateur $\frac{1}{|\Gamma_i(\mathcal{C}^0)|^2 + |\Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2}$ est lié à la dérivée seconde du logarithme (toute inégalité de convexité quantitative pour $-\log|x|$ faisant apparaître des termes en $1/x^2$). Moralement, ce dénominateur est d'ordre 1. On peut commencer par se poser la question de savoir si

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \inf \left\{ \mathbf{E}_\Pi \left[\sum_{i=-R}^R |\Gamma_i(\mathcal{C}^0) - \Gamma_i(\mathcal{C}^1)|^2 \right], \Pi \text{ plan de transport de } P^0 \text{ à } P^1 \right\} > 0.$$

On va esquisser la preuve de ce résultat. L'idée est de faire valoir que si les *gaps* sont distribués de façon presque identique, alors les *configurations* elles-mêmes sont distribuées de façon presque identique.

8.1.2. *"Distinct stationary processes have distinct gap distributions."* On commence par le lemme suivant :

Lemme 8. *Il existe $\mathfrak{g} > 0$, un entier $r \geq 1$ et une fonction $H : \mathbb{R}_+^{2r+1} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée par 1 et 1-Lipschitz, à support compact, tels que*

$$(8.1.1) \quad \mathbf{E}_{P^0} [H(\Gamma_{-r}, \dots, \Gamma_r)] - \mathbf{E}_{P^1} [H(\Gamma_{-r}, \dots, \Gamma_r)] \geq c.$$

Démonstration. Comme P^0, P^1 sont distincts, on peut trouver une fonction continue $F : \text{Config} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$c := \mathbf{E}_{P^0}[F] - \mathbf{E}_{P^1}[F] > 0.$$

On peut supposer que F est bornée par 1. Par densité, on peut supposer que F est locale, c'est-à-dire ne dépend des configurations que dans \square_N pour un certain $N > 0$.

Pour $M > 0$, on pose $F_M := \frac{1}{2M} \int_{-M}^M F(\mathcal{C} + t) dt$, qui est une version "moyennée" de F . Par stationnarité de P^0, P^1 on a encore

$$\mathbf{E}_{P^0}[F_M] - \mathbf{E}_{P^1}[F_M] = c > 0.$$

De plus F_M est $(M + N)$ -locale au sens où $F_M(\mathcal{C}) = F_M(\mathcal{C} \cap \square_{M+N})$. L'avantage de F_M est d'être moins sensible aux petites translations qu'on va effectuer sur \mathcal{C} .

Comme P^0, P^1 sont d'énergie finie, les discrèpances sont contrôlées, et par conséquent la probabilité d'avoir des *gaps* très longs est petite. En particulier, on a pour T assez grand

$$P^0(x_0(\mathcal{C}) > T) + P^1(x_0(\mathcal{C}) > T) \leq \frac{c}{100},$$

où l'on rappelle que x_0 désigne le premier point d'une configuration à droite de l'origine. Si ce point est très éloigné de l'origine, c'est qu'il y a un large *gap* à droite de l'origine, ce qui est coûteux énergétiquement, et donc peu probable. On choisit maintenant $M \geq \max(N, \frac{100T}{c})$. On peut alors vérifier que si \mathcal{C} est une configuration telle que le premier point $x_0(\mathcal{C})$ vérifie $x_0(\mathcal{C}) \leq T$, on a

$$|F_M(\mathcal{C}) - F_M(\mathcal{C} - x_0(\mathcal{C}))| \leq \frac{c}{100},$$

où l'on met à profit le fait d'avoir moyenné F par translations sur une assez grande boîte. Par construction, comme $M > N$, F_M est $2M$ -locale au sens où $F_M(\mathcal{C}) = F_M(\mathcal{C} \cap \square_{2M})$.

Dans la boîte \square_{8M} on s'attend à trouver un nombre borné de points, donc de *gaps*. On fixe $r \geq 1$ assez grand de sorte que

$$P^0(|\mathcal{C} \cap \square_{8M}| \geq r) + P^1(|\mathcal{C} \cap \square_{8M}| \geq r) \leq \frac{c}{100},$$

en utilisant une fois de plus les estimées de discrèpances conséquences du fait que P^0, P^1 sont d'énergie finie. On définit alors une fonction H sur \mathbb{R}^{2r+1} par

$$H(a_{-r}, \dots, a_0, \dots, a_r) := F_M \left(\delta_0 + \sum_{i=1}^r (\delta_{p_i} + \delta_{p_{-i}}) \right)$$

où $p_i = \sum_{k=1}^i a_k$ pour $i \geq 1$ et $p_i = \sum_{k=1}^i a_{-k}$ pour $i \leq -1$. En d'autres termes, H est la fonction F_M appliquée à la configuration obtenue en plaçant un point en 0 et en respectant ensuite les *gaps* indiqués par les quantités a_i . On vérifie alors que, sous réserve que les deux conditions $x_0(\mathcal{C}) \leq T$ et $|\mathcal{C} \cap \square_{8M}| \leq r$ soient vérifiées, on a

$$H(\Gamma_{-r}, \dots, \Gamma_r) = F_M(\mathcal{C} - x_0(\mathcal{C})),$$

or $F_M(\mathcal{C} - x_0(\mathcal{C}))$ et $F_M(\mathcal{C})$ sont proches. Comme les deux conditions sus-mentionnées sont vérifiées avec grande probabilité, on obtient après un petit calcul :

$$\mathbf{E}_{P^0} [H(\Gamma_{-r}, \dots, \Gamma_r)] - \mathbf{E}_{P^1} [H(\Gamma_{-r}, \dots, \Gamma_r)] > 0,$$

avec H mesurable bornée par 1. Par densité on peut supposer que H est 1-Lipschitz sur \mathbb{R}^{2r+1} et à support compact. \square

On s'est donc ramené, d'une fonction F qui détectait la différence entre P^0 et P^1 au niveau des configurations globales à une fonction H qui détecte la différence entre P^0 et P^1 au niveau des r premiers *gaps*. On pose \tilde{H} la fonction $\text{Config} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{H}(\mathcal{C}) := H(\Gamma_{-r}(\mathcal{C}), \dots, \Gamma_r(\mathcal{C})),$$

et on lui associe, pour $R > 0$, la fonction $\hat{H}_R : \text{Config} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{H}_R : \mathcal{C} \mapsto \int_0^{R/10} \tilde{H}(\mathcal{C} - t) dt.$$

Par stationnarité, on a bien sûr :

$$\mathbf{E}_{P^0}[\hat{H}_R] - \mathbf{E}_{P^1}[\hat{H}_R] \geq \frac{cR}{10},$$

et donc si Π est un couplage quelconque entre P^0 et P^1 , on a

$$\mathbf{E}_{\Pi} \left[\int_0^{R/10} \tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) dt - \int_0^{R/10} \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t) dt \right] \geq \frac{\mathbf{g}R}{10}.$$

Le but est maintenant de majorer le terme de gauche par une quantité faisant intervenir la moyenne sous Π des différences entre les *gaps* de \mathcal{C}^0 et de \mathcal{C}^1 . Pour cela, simplifions la situation en supposant que \tilde{H} est seulement fonction du *premier gap*, celui à droite de l'origine (noté Γ_0 et situé entre x_0 et x_1 avec nos conventions). Par construction, on a une borne Lipschitz de la forme :

$$|\tilde{H}(\mathcal{C}) - \tilde{H}(\mathcal{C}')| \leq |\Gamma_0(\mathcal{C}) - \Gamma_0(\mathcal{C}')|,$$

en particulier pour n'importe quel t on peut écrire

$$|\tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) - \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t)| \leq |\Gamma_0(\mathcal{C}^0 - t) - \Gamma_0(\mathcal{C}^1 - t)|.$$

Pour $t = 0$, on obtient $|\tilde{H}(\mathcal{C}^0) - \tilde{H}(\mathcal{C}^1)| \leq |\Gamma_0(\mathcal{C}^0) - \Gamma_0(\mathcal{C}^1)|$, et en fait pour t assez petit on a encore

$$|\tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) - \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t)| \leq |\Gamma_0(\mathcal{C}^0 - t) - \Gamma_0(\mathcal{C}^1 - t)| = |\Gamma_0(\mathcal{C}^0) - \Gamma_0(\mathcal{C}^1)|.$$

Si les *gaps* de $\mathcal{C}^0 - t$ et $\mathcal{C}^1 - t$ étaient toujours "alignés", quand t varie de 0 à $R/10$ on rencontrerait successivement le *gap* Γ_0 , puis au bout d'un temps $\Delta t \approx 1$ on passerait à Γ_1 etc. jusqu'à un *gap* d'ordre environ $R/10$, et on pourrait écrire en utilisant à chaque fois la borne Lipschitz :

$$\left| \int_0^{R/10} \tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) dt - \int_0^{R/10} \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t) dt \right| \leq \int_0^{R/10} |\tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) - \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t)| dt \\ \leq \sum_{i=0}^{R/10} |\Gamma_i(\mathcal{C}^0) - \Gamma_i(\mathcal{C}^1)| \times 1.$$

qui montrerait ce que l'on veut, puisque l'espérance de la quantité de gauche est minorée par quelque chose d'ordre R . Le problème est que, évidemment, les points de deux configurations n'ont aucune raison d'être alignés. Ainsi, quand $t = \min(x_1(\mathcal{C}^0), x_1(\mathcal{C}^1))$, le premier *gap* de $\mathcal{C}^0 - t$ et le premier *gap* de $\mathcal{C}^1 - t$ ne correspondent pas à des *gaps* d'indices identiques dans les configurations initiales $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1$. Par exemple si $x_1(\mathcal{C}^1) < x_1(\mathcal{C}^0)$, c'est-à-dire qu'on rencontre le point d'indice 1 de \mathcal{C}^1 (le deuxième à droite de 0) avant celui de \mathcal{C}^0 , on a pour t dans $[x_1(\mathcal{C}^1), x_1(\mathcal{C}^0))$ l'identité

$$\Gamma_0(\mathcal{C}^1 - t) = \Gamma_1(\mathcal{C}^1), \quad \Gamma_0(\mathcal{C}^0 - t) = \Gamma_0(\mathcal{C}^0),$$

et utiliser la borne Lipschitz de manière naïve nous pousserait à écrire

$$\int_{x_1(\mathcal{C}^1)}^{x_1(\mathcal{C}^0)} |\tilde{H}(\mathcal{C}^0 - t) - \tilde{H}(\mathcal{C}^1 - t)| dt \leq |x_1(\mathcal{C}^1) - x_1(\mathcal{C}^0)| \times |\Gamma_1(\mathcal{C}^1) - \Gamma_0(\mathcal{C}^0)|,$$

ce qui est inutilisable. Pour remédier à ce non-alignement, on introduit deux temps propres, un pour chaque configuration, et une série de décalages temporels à chaque fois que deux *gaps* ne sont pas alignés pour \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^1 . Chaque fois que l'on rencontre un "*k*-ième point", peu importe s'il est pour \mathcal{C}^0 ou \mathcal{C}^1 , on doit opérer un décalage sur le temps propre de l'autre configuration afin d'aligner les *gaps*. On ne parcourt alors plus les deux intégrales sur $t \in [0, R/10]$ de façon identique, mais chacune avec son temps propre - et en jetant les intervalles de temps qui correspondent aux décalages temporels pour l'une ou l'autre. Ce faisant, on perd des morceaux de l'intervalle $[0, R/10]$ sur lequel on intègre, ce qui risque de déprécier la minoration d'ordre R . En fait, cette perte elle-même s'exprime comme une différence de *gaps*, ce qui permet de conclure.

Remarque 6. *Ce raisonnement montre en fait que la convergence au sens de d_{Gaps} entraîne la convergence faible.*

8.2. Schéma de la preuve d'unicité. Supposons, par l'absurde, que P^0 et P^1 soient deux minimiseurs distincts. Afin d'importer les outils classiques de convexité par déplacement, on va travailler dans une "grande boîte" \square_R . Un problème apparaît immédiatement : rien ne garantit que les configurations dans \square_R aient toutes le même nombre de points, or on veut appliquer des techniques de transport de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n ... On va s'appuyer une fois de plus sur la procédure d'écrantage.

Lemme 9 (Approximation dans une grande boîte). *Soit P un processus ponctuel d'énergie libre finie. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un "bon événement" GE_R tel que pour R assez grand on a $P(\text{GE}_R) \geq 1 - \varepsilon$, et il existe une mesure de probabilité \tilde{P}_R sur $\text{Config}(\square_R)$ telle que*

- Les configurations ont exactement $|\square_R|$ points dans \square_R .
- La restriction à $\square_{(1-\varepsilon)R}$ de $\tilde{\mathbb{P}}_R$ coïncide avec celle de \mathbb{P} conditionné à $\mathbb{G}E_R$.
- L'entropie et l'énergie de $\tilde{\mathbb{P}}_R$ sont comparables à celles de \mathbb{P} , plus précisément :

$$(1) \frac{1}{|\square_R|} \text{Ent}[\tilde{\mathbb{P}}_R | \Pi_{\square_R}] \leq \mathcal{E}(\mathbb{P}) + \varepsilon$$

$$(2) \frac{1}{|\square_R|} \mathbf{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_R} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log|x-y|(d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy) \right] \leq \mathcal{W}(\mathbb{P}) + \varepsilon.$$

Démonstration. L'idée est de former un événement $\mathbb{G}E_R$ sur lequel les conditions pour appliquer la procédure d'écrantage sont réunies, et de vérifier que $\mathbb{G}E_R$ est très probable pour un processus d'énergie finie. On applique ensuite la procédure d'écrantage pour les configurations dans cet événement, ce qui permet de garantir d'une part le bon nombre de points, d'autre part qu'on n'a que très peu changé les configurations - en particulier elle sont préservées dans $\square_{R(1-\varepsilon)}$.

On sait que l'écrantage ne fait pas trop augmenter l'énergie électrique. On sait par ailleurs que l'énergie d'interaction

$$\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log|x-y|(d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy)$$

d'une configuration neutre est inférieure à l'énergie d'un champ écranté, c'est le lemme de "minimalité de l'énergie locale". Pour voir cela, on introduit le champ local $E^{\text{loc},R}$ comme en (6.0.5), on a en intégrant par parties (et en utilisant la neutralité globale)

$$\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log|x-y|(d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy) \stackrel{??}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |E^{\text{loc},R}|^2.$$

On veut ensuite comparer $\int_{\mathbb{R}^2} |E^{\text{loc},R}|^2$ et $\int_{\mathbb{R}^2} |E_R^{\text{scr}}|^2 = \int_{\square_R} |E_R^{\text{scr}}|^2$. Pour cela, on remarque que $E^{\text{loc},R}$ et E_R^{scr} , étant compatibles avec la même configuration, ont la même divergence, mais $E^{\text{loc},R}$ est à rotationnel nul car c'est un gradient. Un argument de projection L^2 assure alors que E_R^{scr} a une norme L^2 plus grande que celle de $E^{\text{loc},R}$. Par conséquent, on a

$$\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log|x-y|(d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |E_R^{\text{scr}}|^2 \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\square_R} |E|^2 + \varepsilon R \right),$$

en utilisant les propriétés de la procédure d'écrantage. On peut donc borner l'énergie d'interaction moyenne par l'énergie électrique de \mathbb{P} à une petite erreur près.

Il reste à vérifier que la procédure d'écrantage ne fait pas trop augmenter l'entropie, ce qui se montre à la main en utilisant le fait que l'écrantage n'a que peu modifié les configurations. \square

On applique le lemme "d'approximation dans une grande boîte" à \mathbb{P}^0 et \mathbb{P}^1 . On obtient $\tilde{\mathbb{P}}^0, \tilde{\mathbb{P}}^1$ des processus à $|\square_R|$ points dans \square_R , que l'on peut voir comme des mesures sur l'espace produit $(\square_R)^{|\square_R|}$ via l'énumération croissante des points en partant de celui le plus à gauche. On rentre alors dans le cadre de la théorie classique du transport de masse, et on peut considérer une application de transport T_R qui soit optimal pour le coût quadratique. On définit $\tilde{\mathbb{P}}_R^{\frac{1}{2}}$ comme le poussé en avant de $\tilde{\mathbb{P}}^0$ par $\frac{1}{2}(\text{Id} + T_R)$, on obtient encore un processus à $|\square_R|$ points dans \square_R . Que peut-on en dire ?

- L'entropie relative étant convexe par déplacement, on peut garantir que

$$\frac{1}{|\square_R|} \text{Ent}[\tilde{\mathbb{P}}_R^{\frac{1}{2}} | \Pi_{\square_R}] \leq \frac{1}{2} (\mathcal{E}(\mathbb{P}^0) + \mathcal{E}(\mathbb{P}^1)) + \varepsilon.$$

- En appliquant une inégalité de convexité quantitative à l'interaction logarithmique, on trouve que la quantité

$$\frac{1}{|\square_R|} \mathbf{E}_{\tilde{\mathbb{P}}_R^{\frac{1}{2}}} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log|x-y|(d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy) \right]$$

fait mieux que la moyenne de ces quantités pour $\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^1$ avec un *gain quantitatif* d'ordre R , lié à la distance $d_{\text{Gaps}}(\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^1)$.

Plus exactement, en se concentrant sur les interactions entre charges, on voit que

$$\iint_{\square_R \times \square_R, x < y} -\log|x-y|d\mathcal{C}(x)d\mathcal{C}(y) = \sum_{k=0}^{2R-1} \sum_{i=0}^{2R-k} -\log\gamma_{k,i},$$

où $\gamma_{k,i}$ est le i -ème *gap* entre deux particules k -voisines, avec une numérotation naturelle *partant du bord gauche de la boîte* \square_R (en particulier, cette numérotation va généralement différer de la précédente, ce qui revient à ajouter un shift temporel initial au sens des "temps propres" discutés

plus haut, ce qui n'est pas trop gênant). Si $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1$ sont deux configurations, et $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}$ la configuration située au milieu (au sens du transport ordonné pour deux configurations à $2R$ points sur la droite réelle) on a par convexité de $-\log$ sur \mathbb{R}_+^*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{2R-1} \sum_{i=0}^{2R-k} -\log \gamma_{k,i}^0 + \sum_{k=0}^{2R-1} \sum_{i=0}^{2R-k} -\log \gamma_{k,i}^1 \right) - \sum_{k=0}^{2R-1} \sum_{i=0}^{2R-k} -\log \gamma_{k,i}^{\frac{1}{2}} \\ \geq c \sum_{k=0}^{2R-1} \sum_{i=0}^{2R-k} \frac{(\gamma_{k,i}^0 - \gamma_{k,i}^1)^2}{(\gamma_{k,i}^0)^2 + (\gamma_{k,i}^1)^2} \geq \sum_{i=0}^{2R-1} \frac{(\gamma_{0,i}^0 - \gamma_{0,i}^1)^2}{(\gamma_{0,i}^0)^2 + (\gamma_{0,i}^1)^2}, \end{aligned}$$

si bien que, en prenant l'espérance (et si l'on admet que l'on peut changer de numérotation)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}^0} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x < y} -\log |x - y| d\mathcal{C}(x) d\mathcal{C}(y) \right] + \mathbf{E}_{\mathbf{P}^1} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x < y} -\log |x - y| d\mathcal{C}(x) d\mathcal{C}(y) \right] \right) \\ \geq \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{P}}_R^{\frac{1}{2}}} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x < y} -\log |x - y| d\mathcal{C}(x) d\mathcal{C}(y) \right] - cR d_{\text{Gaps}}^2(\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1) + o(R). \end{aligned}$$

Le processus $\tilde{\mathbf{P}}_R^{\frac{1}{2}}$ semble donc faire *mieux* que $\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1$ au niveau local de \square_R . Pour produire un candidat global, on partitionne la droite réelle par des translatsés de \square_R et on place une copie indépendante de $\tilde{\mathbf{P}}_R^{\frac{1}{2}}$ dans chaque, puis on rend le processus stationnaire en moyennant sur un choix de l'origine uniforme dans \square_R . Soit $\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}$ le processus global ainsi construit. L'entropie relative spécifique de $\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}$ est relativement simple à estimer, en utilisant l'indépendance des copies, on trouve

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{E}(\mathbf{P}^0) + \mathcal{E}(\mathbf{P}^1)) + 2\varepsilon.$$

La formulation de l'énergie qui se prête le mieux au calcul est ici l'énergie *intrinsèque*, puisqu'on dispose d'estimées sur les interactions logarithmiques dans des boîtes. On peut montrer que

$$\mathcal{W}^{\text{int}}(\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{|\square_R|} \mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{P}}_R^{\frac{1}{2}}} \left[\iint_{\square_R \times \square_R, x \neq y} -\log |x - y| (d\mathcal{C} - dx)(d\mathcal{C} - dy) \right]$$

à une erreur arbitrairement petite près (quitte à prendre R très grand). On applique enfin l'inégalité électrique-intrinsèque pour conclure que

$$\mathcal{W}(\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}) < \frac{1}{2}(\mathcal{W}(\mathbf{P}^0) + \mathcal{W}(\mathbf{P}^1)),$$

et finalement on a construit un processus $\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}$ tel que $\mathcal{F}_\beta(\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}) < \min \mathcal{F}_\beta$ ce qui est absurde.

9. RÉGULARITÉ DU PROCESSUS ET DE L'ÉNERGIE LIBRE EN LA TEMPÉRATURE

On a en fait montré la chose suivante :

Proposition 10. *Soit $\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1$ deux processus ponctuels stationnaires d'énergie libre \mathcal{F}_β finie, il existe un processus ponctuel $\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}$ tel que*

$$\mathcal{F}_\beta(\tilde{\mathbf{P}}^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{F}_\beta(\mathbf{P}^0) + \mathcal{F}_\beta(\mathbf{P}^1)) - c\beta d_{\text{Gaps}}(\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1)^2,$$

avec $c > 0$ universelle.

On en déduit un résultat de régularité de Sine_β par rapport à la température, au sens de la distance d_{Gaps} .

Proposition 11. *$\beta \mapsto \mathcal{W}(\text{Sine}_\beta)$ et $\beta \mapsto \mathcal{E}(\text{Sine}_\beta)$ sont localement bornées, $\beta \mapsto \min \mathcal{F}_\beta$ est localement Lipschitz et $\beta \mapsto \text{Sine}_\beta$ est (localement) $\frac{1}{2}$ -Hölder pour la distance d_{Gaps} .*

Démonstration. Le fait que l'énergie et l'entropie des minimiseurs sont localement bornées est facile à vérifier en les comparant à des candidats arbitraires d'énergie et d'entropie finies. Par minimalité on a aussi

$$(9.0.1) \quad \min \mathcal{F}_\beta \leq \min \mathcal{F}_{\beta'} + (\beta - \beta')\mathcal{W}(\text{Sine}_{\beta'}) \quad \min \mathcal{F}_{\beta'} \leq \min \mathcal{F}_\beta + (\beta' - \beta)\mathcal{W}(\text{Sine}_\beta),$$

ce qui montre bien que $\min \mathcal{F}_\beta$ est localement Lipschitz. Notons

$$M = \limsup_{\beta' \rightarrow \beta} \frac{d_{\text{Gaps}}(\text{Sine}_\beta, \text{Sine}_{\beta'})}{|\beta - \beta'|^{\frac{1}{2}}} \in [0, +\infty].$$

Notons $\tilde{\text{P}}_{\beta, \beta'}^{\frac{1}{2}}$ le processus obtenu en interpolant $\text{Sine}_\beta, \text{Sine}_{\beta'}$. On voit que

$$\liminf_{\beta' \rightarrow \beta} \left(\mathcal{F}_\beta(\tilde{\text{P}}^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} (\mathcal{F}_\beta(\text{Sine}_\beta) + \mathcal{F}_\beta(\text{Sine}_{\beta'})) \right) \leq -\beta c |\beta' - \beta| M^2$$

or $\mathcal{F}_\beta(\text{Sine}_{\beta'}) = \mathcal{F}_{\beta'}(\text{Sine}_{\beta'}) - (\beta' - \beta) \mathcal{W}(\text{Sine}_{\beta'}) = \mathcal{F}_\beta(\text{Sine}_\beta) + O(\beta' - \beta)$, si bien que, si M dépasse une certaine valeur, on peut construire un processus $\tilde{\text{P}}_{\beta, \beta'}^{\frac{1}{2}}$ vérifiant

$$\mathcal{F}_\beta(\tilde{\text{P}}^{\frac{1}{2}}) < \mathcal{F}_\beta(\text{Sine}_\beta),$$

ce qui est absurde. \square

Pour aller plus loin, il faut montrer que \mathcal{W} dépend de façon (au moins) continue de d_{Gaps} .

Remarque 7. Notons que le transport nous offre un moyen de caractériser des niveaux de régularité supérieure pour Sine_β . Soit $\beta > 0$ fixé et $\varepsilon > 0$. Pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe un processus $\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}$ qui est le barycentre entre Sine_β et $\text{Sine}_{\beta+\varepsilon}$ avec coefficients $1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ et $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$. Si l'on sait montrer que

$$d_{\text{Gaps}}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}, \text{Sine}_{\beta+\varepsilon'}) \leq C \varepsilon^{\alpha_1} (\varepsilon')^{\alpha_2},$$

on obtient une forme de régularité.

On peut en fait aller plus loin.

Proposition 12. $\beta \mapsto \mathcal{W}(\text{Sine}_\beta)$ est (localement) $\frac{1}{2}$ -Hölder, $\beta \mapsto \min \mathcal{F}_\beta$ est (localement) $C^{1, \frac{1}{2}}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que \mathcal{W} est Lipschitz pour la distance d_{Gaps} . Combiné avec le caractère $\frac{1}{2}$ -Hölder de Sine_β dans cette distance, cela conclut le premier point, et montre en particulier que $\beta \mapsto \mathcal{W}(\text{Sine}_\beta)$ est continu. Au vu de (9.0.1) on en déduit que \mathcal{F}_β est dérivable de dérivée $\mathcal{W}(\text{Sine}_\beta)$, et est donc $C^{1, \frac{1}{2}}$. \square

Proposition 13.

$$(9.0.2) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < \varepsilon' < \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{1/4} \varepsilon'^{1/2}} d_{\text{Gaps}}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}, \text{Sine}_{\beta+\varepsilon'}) < +\infty$$

Démonstration. Introduisons encore une notation et notons $\widetilde{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}$ le processus qui interpole entre $\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}$ et $\text{Sine}_{\beta+\varepsilon'}$ (avec coefficients $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$). On sait que

$$\mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(\widetilde{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}) \leq \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(\text{Sine}_{\beta+\varepsilon'}) + \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}) \right) - c d_{\text{Gaps}}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}, \text{Sine}_{\beta+\varepsilon'})^2.$$

Notons désormais $G_\beta = \min \mathcal{F}_\beta$, $S_\beta = \text{Sine}_\beta$, $\mathcal{W}_\beta = \mathcal{W}(\text{Sine}_\beta)$. On a

$$G_{\beta+\varepsilon'} \leq \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(\widetilde{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}) \leq \frac{1}{2} \left(G_{\beta+\varepsilon'} + \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(S_\beta) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(S_{\beta+\varepsilon}) \right) - c d_{\text{Gaps}}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}, \text{Sine}_{\beta+\varepsilon'})^2.$$

En mettant un peu d'ordre, on écrit que

$$\frac{1}{2} \left(G_{\beta+\varepsilon'} + \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(S_\beta) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \mathcal{F}_{\beta+\varepsilon'}(S_{\beta+\varepsilon}) \right) \leq G_{\beta+\varepsilon'} + \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \varepsilon' (\mathcal{W}_\beta - \mathcal{W}_{\beta+\varepsilon}),$$

si bien qu'on obtient, en utilisant le caractère $\frac{1}{2}$ -Hölder de \mathcal{W}_β

$$d_{\text{Gaps}}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}, \text{Sine}_{\beta+\varepsilon'})^2 \leq \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) \varepsilon' (\mathcal{W}_\beta - \mathcal{W}_{\beta+\varepsilon}) \leq C \varepsilon' \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

ce qui conclut. \square

Par conséquent, on obtient en utilisant de nouveau le caractère Lipschitz de \mathcal{W} :

$$\mathcal{W}(S_{\beta+\varepsilon'}) = \mathcal{W}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}) + O((\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{1/4}).$$

Comme $\mathcal{W}(\widehat{\text{Sine}}_{\beta+\varepsilon'}) \leq (1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon})\mathcal{W}(S_{\beta}) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\mathcal{W}(S_{\beta+\varepsilon})$, on trouve que

$$\frac{\mathcal{W}(S_{\beta+\varepsilon'}) - \mathcal{W}(S_{\beta})}{\varepsilon'} \leq \frac{\mathcal{W}(S_{\beta+\varepsilon}) - \mathcal{W}(S_{\beta})}{\varepsilon} + O((\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{1/4}),$$

RÉFÉRENCES

- [AD14] R. Allez and L. Dumaz. From Sine kernel to Poisson statistics. *Electron. J. Probab.*, 19(114), 2014.
- [AJ81] A. Alastuey and B. Jancovici. On the classical two-dimensional one-component Coulomb plasma. *J. Physique*, 42(1) :1–12, 1981.
- [BBH⁺94] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, Frédéric Hélein, et al. *Ginzburg-landau vortices*, volume 13. Springer, 1994.
- [BdMPS95] A. Boutet de Monvel, L. Pastur, and M. Shcherbina. On the statistical mechanics approach in the random matrix theory : integrated density of states. *J. Statist. Phys.*, 79(3-4) :585–611, 1995.
- [BEY14] Paul Bourgade, László Erdős, and Horng-Tzer Yau. Universality of general β -ensembles. *Duke Math. J.*, 163(6) :1127–1190, 2014.
- [BL15] Xavier Blanc and Mathieu Lewin. The crystallization conjecture : a review. *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, 2(2) :255–306, 2015.
- [BS13] Alexei Borodin and Sylvia Serfaty. Renormalized energy concentration in random matrices. *Comm. Math. Phys.*, 320(1) :199–244, 2013.
- [CL21] Djali Chafaï and Thomas Leblé. The phase transition conjecture in the two-dimensional, one-component plasma : a survey. In preparation, 2021+.
- [DE02] Ioana Dumitriu and Alan Edelman. Matrix models for beta ensembles. *J. Math. Phys.*, 43(11) :5830–5847, 2002.
- [DHLM19] David Dereudre, Adrien Hardy, Thomas Leblé, and Mylène Maïda. Dlr equations and rigidity for the sine-beta process. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2019.
- [DVJ03] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes. Vol. I. Probability and its Applications* (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Elementary theory and methods.
- [EHL18] Matthias Erbar, Martin Huesmann, and Thomas Leblé. The one-dimensional log-gas free energy has a unique minimiser. *arXiv preprint arXiv :1812.06929*, 2018.
- [For10] P. J. Forrester. *Log-gases and random matrices*, volume 34 of *London Mathematical Society Monographs Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.
- [GP77] J Gunson and LS Panta. Two-dimensional neutral coulomb gas. *Communications in Mathematical Physics*, 52(3) :295–304, 1977.
- [GZ93] Hans-Otto Georgii and Hans Zessin. Large deviations and the maximum entropy principle for marked point random fields. *Probability theory and related fields*, 96(2) :177–204, 1993.
- [KS09] R. Killip and M. Stoiciu. Eigenvalue statistics for CMV matrices : from Poisson to clock via random matrix ensembles. *Duke Math. J.*, 146(3) :361–399, 2009.
- [Leb16] Thomas Leblé. Logarithmic, Coulomb and Riesz energy of point processes. *J. Stat. Phys.*, 162(4) :887–923, 2016.
- [LS17] Thomas Leblé and Sylvia Serfaty. Large deviation principle for empirical fields of log and riesz gases. *Inventiones mathematicae*, 210(3) :645–757, 2017.
- [LSZ17] Thomas Leblé, Sylvia Serfaty, and Ofer Zeitouni. Large deviations for the two-dimensional two-component plasma. *Comm. Math. Phys.*, 350(1) :301–360, 2017.
- [McC97] R. McCann. A Convexity Principle for Interacting Gases. *Advances in Mathematics*, 128(1) :153 – 179, 1997.
- [PS17] Mircea Petrache and Sylvia Serfaty. Next order asymptotics and renormalized energy for riesz interactions. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 16(3) :501–569, 2017.
- [RS16] Nicolas Rougerie and Sylvia Serfaty. Higher-dimensional coulomb gases and renormalized energy functionals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 69(3) :519–605, 2016.
- [Ser15] Sylvia Serfaty. *Coulomb gases and Ginzburg-Landau vortices*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.
- [SS12] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems. *Comm. Math. Phys.*, 313(3) :635–743, 2012.
- [SS15a] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. 1D log gases and the renormalized energy : crystallization at vanishing temperature. *Probab. Theory Related Fields*, 162(3-4) :795–846, 2015.
- [SS15b] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. 2D Coulomb gases and the renormalized energy. *Ann. Probab.*, 43(4) :2026–2083, 2015.
- [VV09] B. Valkó and B. Virág. Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel. *Invent. math.*, 177(3) :463–508, 2009.
- [VV17a] B. Valkó and B. Virág. The Sine $_{\beta}$ operator. *Invent. math.*, 209(1) :275–327, 2017.
- [VV17b] B. Valkó and B. Virág. Operator limit of the circular beta ensemble. *arXiv preprint arXiv :1710.06988*, 2017.