1M001 UPMC, 19 septembre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 1 : $\mathbb{R}$ et limites

Exercice 1 Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes au point indiqué : i) $x \mapsto x\ln(x)$ en 0 ii) $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ en 0 iii) $x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^{4x+1}}$ en $+\infty$ iv) $x \mapsto \frac{2e^x+5x^2}{2e^x-100x^4}$ en $+\infty$

Exercice 2 Les sous-ensembles suivants sont-il minorés/majorés ? Déterminer leur borne inférieure/supérieure quand elle existe. Déterminer leur minimum/maximum quand il existe. i) $\{1+\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ ii) $\{1-\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ iii) $\{(-1)^n+\frac{1}{n}, n \geq 1\}$ iv) L'ensemble des réels qui s'écrivent 0.333333 avec n chiffres "3" après la virgule.

Exercice 3 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$ on a $a \leq b$. Montrer que A est majorée, B est minorée, et que $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 4 Soit A et B deux ensembles finis et $F : A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction. Justifier que F est bornée. Montrer que

$$\max_{a\in A}\min_{b\in B} F(a,b) \leq \min_{a\in A}\max_{b\in B} F(a,b).$$

L'inégalité peut-elle être stricte ?

Exercice 5 Montrer que l'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est un intervalle. Qu'en est-il de l'union d'une famille quelconque d'intervalles ? Soit $(I_k)_{k\geq 1}$ une famille d'intervalles telle que pour tout $k \geq 1$ on a $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$, montrer que l'union des I_k $(k \geq 1)$ est un intervalle.

Exercice 6 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- Toute suite positive non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
- Si une suite admet une limite $l > 0$ alors tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
- Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 7 Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers 0. Que dire de la suite uv ?

Exercice 8 Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que la suite $v = \left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)_{n\geq 0}$ tende vers 0. Montrer que u tend vers 0.