1M001 UPMC, 3 octobre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 3 : Dérivabilité

Exercice 1Étudier la continuité, la dérivabilité, et la continuité de la dérivée des fonctions suivantes : $f_1 : x \mapsto x|x|$, $f_2 : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f_2(0) = 1$, $f_3 : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f_3(0) = 0$.

Exercice 2 Montrer que si f est une fonction dérivable en un point x_0 alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Étudier la réciproque.

Exercice 3 Soit f une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire. Montrer que si f est périodique de période T alors f' l'est aussi.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) = (x^2 + 1) \sin x$.
- Calculer la dérivée de f.
- Montrer de deux façons que l'équation $(x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x$ admet une solution dans $[0, \pi]$.
  - En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.
  - En appliquant le théorème des fonctions intermédiaires à une fonction bien choisie.

Exercice 5 En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que
1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |e^x - e^y| \geq e^{\min(x,y)}|x - y|$

Exercice 6 Soit f une fonction dérivable qui admet la même limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim_{x+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim_{x+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Montrer que si $\lim_{x+\infty} f'(x) = l$ alors $\lim_{x+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 8 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-Lipschitz lorsque $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout x, y dans I. On dit que f est Lipschitz lorsqu'elle est k-Lipschitz pour un certain $k > 0$.
1. Écrire les définitions avec des quantificateurs. Écrire leur négation.
2. Montrer qu'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est Lipschitz sur tout segment.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp(x)$ ne sont pas Lipschitz sur $\mathbb{R}$.
4. La somme de deux fonctions Lipschitz est-elle Lipschitz ? Le produit de deux fonctions Lipschitz est-il Lipschitz ?