1M001 UPMC, 8 octobre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 4 : Fonctions usuelles

Exercice 1 Si f est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est concave (resp. convexe) sur I lorsque $f'' \leq 0$ (resp. $f'' \geq 0$) sur I.

1. Montrer que ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et que exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est une fonction convexe sur I, montrer que pour tout x_1, x_2 dans I et tout $t \in [0,1]$ on a
$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$
3. Montrer plus généralement que pour tout entier n, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans I et tout $t_1, \ldots, t_n$ dans $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ on a :
$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$
4. Quelle est l'inégalité correspondante pour les fonctions concaves ?
5. En déduire l'inégalité suivantes pour $x_1, \ldots, x_n > 0$:
$$\frac{x_1 + \ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x) = (x^2+1)\sin x$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Montrer de deux façons que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x \sin x$ admet une solution dans $[0, \pi]$.
   (a) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.
   (b) En appliquant le théorème des fonctions intermédiaires à une fonction bien choisie.

Exercice 3 Combien y a-t-il de points d'intersections entre les courbes $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto (\sqrt{x})^x$? Situer ces courbes (ainsi que celle de $x \mapsto x$) à l'infini et en zéro.

Exercice 4 Une fonction f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est dite "logarithmiquement convexe" lorsque $\ln f$ est convexe. Montrer qu'une fonction logarithmiquement convexe est convexe et étudier la réciproque.