

TD 6 : Développements limités !

Exercice 1

1. Donner le D.L. à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Même question pour $x \mapsto \ln(1-x)$.
2. En déduire le D.L. à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction

$$f(x) = x\sqrt{1+x} + \ln(1-x)$$

3. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x^3}$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 2

1. Donner le D.L. à l'ordre 5 en $x = 0$ des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \ln(1+x^4)$.
2. Soit f définie par

$$f(x) = \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{\ln(1+x^4)}$$

Montrer que f admet une limite quand $x \rightarrow 0$ et la calculer.

3. Montrer que f ainsi prolongée par continuité en 0 est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto e^x(\cos x + \sin x) - 1$

1. Calculer f' , f'' , f''' .
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que

$$|f(x) - (2x + x^2)| \leq |x^3|$$

pour tout $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Exercice 4 Calculer les DL suivants :

1. $e^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0
2. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 en 0
3. $\exp(\sin x \ln(\cos x))$ à l'ordre 5 en 0
4. $\tan(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 4 en 0
5. $\ln(\cos^2 x - \sin^2 x)$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} + e^{-x/2} - 2}{x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$ pour α réel.