

### TD 7 : Équations différentielles linéaires

**Exercice 1** Résoudre, sur un intervalle que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

1.  $y' = y$
2.  $y' + 2y = 0$
3.  $y' + \frac{2y}{x} = 0$
4.  $(1 + x^2)y' = y$
5.  $y' = y + 1$
6.  $y' - y = xe^x$
7.  $y' + y = \cos x + \sin x$
8.  $xy' + 2y = x^3$
9.  $(x^2 - 1)y' + xy = 1$
10.  $y' + y = 2e^x$

**Exercice 2** Trouver la solution de l'équation différentielle  $y' \tan x = y$  qui prend la valeur 1 pour  $x = \frac{\pi}{6}$ .

**Exercice 3** Soit  $g, h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = \ln(\ln(x))$  et  $h(x) = \frac{-1}{\ln x}$ .

1. Calculer la dérivée de  $g$  et  $h$
2. Résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle suivante :

$$y'x \ln(x) - (x^2 \ln(x) + 1)y = \exp(x^2/2).$$

**Exercice 4** On considère l'équation différentielle  $y' = 3y + \cos$ .

1. Déterminer une solution particulière sous la forme  $a \cos + b \sin$
2. Déterminer toutes les solutions. Donner celle qui vaut 1 en 0.

**Exercice 5** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  dont toutes les dérivées sont bornées. On considère l'application de  $E$  dans  $E$  donnée par

$$f \mapsto f + f'.$$

Justifier que cette application est bien définie. Est-elle injective ? Surjective ?