

TD 8 : Nombres complexes

Exercice 1 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3 + 6i}{3 - 4i}, z_2 = \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2, z_3 = \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$$

Exercice 2 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants : $1, 3 + 3i, -1 - \sqrt{3}i, (1 - i)^9, (\sqrt{5} - i)(\sqrt{5} + i)$.

Exercice 3 Déterminer les nombres complexes z tels que :

1. $|\bar{z} - i| = 1$
2. $z\bar{z} = z^3$
3. $i\Re(z^2) - \Im(z^2) = z$

Exercice 4 Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

Exercice 5 Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

Exercice 6 Soit $w = 1 + i$.

1. Déterminer les racines carrées de w sous la forme $a + ib$ avec a, b réels.
2. Calculer le module et l'argument de w .
3. En déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 7 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$,
3. $4z^2 - 2z + 1 = 0$

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des points du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que $\frac{z-2}{z-i} \in \mathbb{R}$, $|\frac{z-1}{z-2i}| = 1$, puis $\Re(\bar{z}) \leq 3$.

Exercice 9 Écrire les nombres suivants sous forme cartésienne : $\frac{1+i}{1-i}, \frac{2-i}{3i}, \frac{1-i}{3+2i}$

Exercice 10 Écrire les nombres suivants sous forme polaire : $\sqrt{2}(1+i), \frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2$.

Exercice 11 Calculer l'inverse de : $\sqrt{2}(1+i), 3 - 2i$.