

### Dernier TD (10 ?) : Polynômes

**Exercice 1** Calculer les divisions euclidiennes suivantes :

1.  $X^3 - 1$  par  $X - 1$  puis  $X^4 + X^2 + 1$  par  $X^2 + X + 1$
2.  $X^5 - 1$  par  $X - 1$  puis  $X^8 + X^6 + X^4 + X^2 + 1$  par  $X^4 + X^2 + X + 1$

**Exercice 2**

1. Combien le polynôme  $R = X^2 + X - 6$  a-t-il de racines réelles ? Les calculer.
2. Quelles sont les racines du polynôme  $Q = X^4 + X^2 - 6$  dans  $\mathbb{C}$  ? Dans  $\mathbb{R}$  ?
3. Factoriser  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$  comme produit de polynômes irréductibles.
4. Factoriser  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  comme produit de polynômes irréductibles.
5. Montrer que  $-1$  est racine du polynôme

$$P = X^6 + 2X^5 + 2X^4 + 2X^3 - 5X^2 - 12X - 6$$

et déterminer sa multiplicité.

6. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  comme produit de polynômes irréductibles.

**Exercice 3** Déterminer les racines complexes des polynômes suivants, puis factoriser :

1.  $z^2 - 3 - 4i$
2.  $z^2 + 4z + 8$
3.  $z^4 - 4iz^2 - 4$
4.  $z^4 - 16$

**Exercice 4** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $n$  possédant  $n$  racines réelles distinctes. Montrer que son polynôme dérivé possède  $n - 1$  racines réelles distinctes.

**Exercice 5** Montrer qu'un polynôme de degré  $d$  coïncide avec son développement limité d'ordre  $d$  en tout point.