Question de cours. La fraction rationnelle F_1 a deux pôles simples : π et $-\sqrt{2}$. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme suivante

$$\frac{2X+4}{(X-\pi)(X+\sqrt{2})} = F_1(X) = \frac{\alpha}{X-\pi} + \frac{\beta}{X+\sqrt{2}}.$$

Les coefficients α, β peuvent être identifiés en “cachant puis remplaçant”. On trouve

$$\alpha = \frac{2(\pi)+4}{\cancel{(X-\pi)}(\pi+\sqrt{2})} \text{ et } \beta = \frac{2(-\sqrt{2})+4}{(-\sqrt{2}-\pi)\cancel{(X+\sqrt{2})}}.$$

La fraction rationnelle F_2 a un pôle simple en 1 et un pôle double en -1. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme suivante

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}.$$

On peut identifier a en “cachant puis remplaçant”. On trouve

$$a = \frac{1}{\cancel{(X-1)}(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

On peut aussi utiliser cette méthode pour identifier le coefficient devant le terme de degré le plus négatif pour le pôle 1, ici c'est $\frac{c}{(X+1)^2}$. On trouve

$$c = \frac{1}{(-1-1)\cancel{(X+1)^2}} = \frac{-1}{2}.$$

On obtient donc que

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)^2} = \frac{1/4}{X-1} + \frac{b}{X+1} - \frac{1/2}{(X+1)^2}.$$

On peut facilement déterminer b, par exemple en évaluant cette égalité pour $X = 0$. On obtient

$$-1 = -1/4 + b - 1/2 \text{ donc } b = -1/4.$$

Autour de Rolle. Cet exercice était tiré d'un partiel de L1 de l'année dernière. Voilà la correction qui en avait été donnée.

1. Φ est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a,b]$.

$$\Phi(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(a) - f_k(a) - \lambda_k \left(g_k(a) - g_k(a)\right)\right) = 0.$$

2. On choisit les constantes λ_k telles que $\Phi(a) = \Phi(b)$. On peut choisir :

$$\lambda_k = \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}$$

En effet, avec cette expressions des constantes, on obtient pour $\Phi(b)$:

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= \sum_{k=1}^{n}\left(f_k(b)-f_k(a)-\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}\left(g_k(b)-g_k(a)\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(f_k(b)-f_k(a)-f_k(b)+f_k(a)\right)\\ &= 0\\ &= \Phi(a)\end{aligned}$$

3. Φ est dérivable sur $]a,b[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]a,b[$. Sa dérivée s'écrit :

$$\Phi'(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k'(x)-\lambda_k g_k'(x)\right)$$

4. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fontion continue, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
5. Ici, Φ est bien continue et dérivable et $\Phi(a)=\Phi(b)$. On en déduit qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $\Phi'(c)=0$. Il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(f_k'(c)-\lambda_k g_k'(c)\right)=0 \quad&\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}f_k'(c)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k'(c)\\ &\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}f_k'(c)=\sum_{k=1}^{n}g_k'(c)\frac{f_k(b)-k_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}.\end{aligned}$$

Mini Wallis

1. On a $I_0=J_0=\int_0^{\pi/2}1dx=\frac{\pi}{2}$. Calculons maintenant $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x dx$. Une primitive de sin est donnée par $-\cos$, on a donc

$$I_1=[-\cos]_0^{\pi/2}=(-\cos(\pi/2))-(-\cos(0))=0+1=1.$$

Une primitive de cos est donnée par sin et on trouve de même

$$J_1=[\sin]_0^{\pi/2}=\sin(\pi/2)-\sin(0)=1.$$

2. On peut remarquer que

$$I_2+J_2=\int_0^{\pi/2}(\sin^2(x)+\cos^2(x))dx=\int_0^{\pi_2}1dx=\pi/2,$$

en utilisant l'identité classique $\sin^2+\cos^2=1$. On cherche maintenant à montrer que $I_2=J_2$. Réalisons le changement de variable $u=\pi/2-x$ dans J_2. On trouve

$$J_2=\int_{\pi/2}0\cos^2(\pi/2-u)(-du)=\int_0^{\pi/2}\cos^2(\pi/2-u)du.$$

Une formule de trigonométrie classique indique que $\cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$, on a donc bien

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)du = I_2.$$

Note : il y a d'autres façons de faire, par exemple en intégrant par parties.

3. On intègre par parties avec $f = \sin^{n-1}$ et $g' = \sin$. On a $f'(x) = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)$ et $g = -\cos$, et la formule d'intégrations par parties donne alors

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)dx = -\int_0^{\pi/2} f'(x)g(x) + [fg]_0^{\pi/2}$$

On peut calculer

$$[fg]_0^{\pi/2} = -(n-1)\sin^{n-2}(\pi/2)\cos^2(\pi/2) + (n-1)\sin^{n-2}(0)\cos^2(0)$$

Le premier terme du membre de droite est nul car $\cos^2(\pi/2) = 0$, et comme $n > 2$ on a $\sin^{n-2}(0) = 0$ donc $[fg]_0^{\pi/2} = 0$. Il reste

$$I_n = -\int_0^{\pi/2} f'(x)g(x) = -(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx.$$

On utilise encore l'égalité $\cos^2 + \sin^2 = 1$, en écrivant que $-\cos^2(x) = \sin^2(x) - 1$. On en déduit que

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)(\sin^2(x) - 1) = (n-1)I_n - (n-1)I_{n-2},$$

si bien que $I_n = \frac{n-1}{n-2}I_n$, ce qui est l'égalité désirée.

Uniforme continuité.

1. Cf. Cours
2. Montrer que f est continue sur I signifie montrer que f est continue en tout point de I. Soit $x_0 \in I$ quelconque, montrons que f est continue au point x_0. Pour cela donnons nous $\epsilon > 0$ quelconque. En appliquant l'hypothèse d'uniforme continuité pour ϵ, on trouve $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, (|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon).$$

En particulier, pour $x_0 = x$ et pour tout $y \in I$ on a trouvé $\eta > 0$ tel que $(|x_0 - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x_0) - f(y)| \leq \epsilon)$, donc f est continue en x_0.

3. On dit que f est Lipschitz sur I s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{1}$$

Soit f Lipschitz sur I et soit $K > 0$ une constante telle que (1) soit vérifiée. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $\eta = \frac{\epsilon}{K}$, et il est alors facile de vérifier que, quels que soient $x, y \in I$, on a

$$|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

En effet en utilisant (1) on obtient $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \leq K\frac{\epsilon}{K} \leq \epsilon$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a donc déterminé un $\eta > 0$ (qui dépend bien sûr de ϵ) tel que $|x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, on a donc bien montré que f est uniformément continue.

4. Pour $f(x) = x^2$, en appliquant une identité remarquable on obtient

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \tag{2}$$

et si $0 < x < y$ on a $x + y \geq 2x$, donc finalement on a bien $|f(x) - f(y)| \geq 2x|x - y|$. On veut en déduire que f n'est **pas** uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde, supposons que f soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et appliquons la définition de l'uniforme continuité avec $\epsilon = 1$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout x, y réels, si $|x - y| \leq \eta$ alors $|x^2 - y^2| \leq 1$. Prenons par exemple $x_n = n$ et $y_n = n + \eta$ pour un entier $n \geq 1$ quelconque. On aurait $|x_n^2 - y_n^2| \leq 1$, or on sait d'après (2) que $|x_n^2 - y_n^2| \geq 2n\eta$. On aurait donc $2n\eta \leq 1$ pour tout entier n, ce qui est absurde. Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Une équation fonctionnelle. Appelons P la propriété recherchée

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. On peut penser à la fonction nulle. En cherchant un peu plus, on se rend compte que n'importe quelle fonction linéaire (de la forme $f(x) = \alpha x$) vérifie la propriété (P).
2. (a) On utilise (P) avec $x = y = 0$, on trouve $f(0 + 0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$.

   (b) On a $f(0) = 0$ (d'après la question précédente) et $f(1)$ est inconnu. On a $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ (en utilisant la propriété). De même $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$. On montre facilement par récurrence que $f(n) = nf(1)$.

   (c) On utilise (P) avec x quelconque et $y = -x$, on trouve que $f(0) = f(x) + f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout x réel. En particulier pour tout entier n, on trouve $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$. On en déduit que $f(x) = f(1)x$ pour tout x **entier relatif**.

   (d) Un rationnel s'écrit p/q avec p entier relatif et q entier naturel non nul. On peut observer que p s'écrit toujours $p = p/q + \cdots + p/q$ avec q termes égaux à p/q. Il est alors facile de déduire de (P) que

   $$f(p/q + \cdots + p/q) = qf(p/q), \text{ donc } f(p) = qf(p/q),$$

   si bien que $f(p/q) = \frac{f(p)}{q}$. Comme on sait que $f(p) = pf(1)$ on en déduit que $f(p/q) = \frac{p}{q}f(1)$. On a donc $f(x) = f(1)x$ **pour tout x rationnel**.
3. Si on suppose de plus que f est continue, on va montrer que $f(x) = f(1)x$ pour tout x réel. Pour cela, fixons $x \in \mathbb{R}$ et donnons-nous, comme le suggère l'énoncé, une suite $\{x_n\}_n$ de nombres rationnels qui converge vers x. D'après les questions précédentes on a, pour tout entier n

   $$f(x_n) = f(1)x_n.$$

   Comme x_n converge vers x, la suite de terme général $f(1)x_n$ converge vers $f(1)x$. Par ailleurs, comme f est continue, la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. On a donc $f(x) = f(1)x$, ce qui montre bien que $f(x) = f(1)x$ pour tout x **réel**.

Remarque : si f n'est plus supposée continue, le résultat est faux : il est possible de construire des fonctions très bizarres qui vérifient (P) mais ne sont pas des fonctions linéaires.