2M004 UPMC, 15 Octobre 2015

Question de cours. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$F_1(X) = \frac{2X+4}{(X-\pi)(X+\sqrt{2})} \text{ et } F_2(X) = \frac{1}{(X-1)(X+1)^2}.$$

Exercice autour de Rolle Soient $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $g_k(a) \neq g_k(b)$ pour tout entier k compris entre 1 et n. Considérons la fonction Φ définie sur $[a,b]$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_k(a) - \lambda_k \left(g_k(x) - g_k(a)\right)\right).$$

1. Φ est-elle continue sur $[a,b]$? Calculez $\Phi(a)$.
2. Déterminer des constantes λ_k (k compris entre 1 et n), telles que $\Phi(b) = \Phi(a)$.
3. Φ est-elle dérivable sur $]a,b[$? Si oui, quelle est sa dérivée ?
4. Énoncez le théorème de Rolle.
5. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(c) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(c)\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}.$$

Exercice 3 (mini Wallis). Pour tout entier n on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

1. Calculer I_0, I_1 et J_0, J_1.
2. Montrer que $I_2 + J_2 = \frac{\pi}{2}$ et que $I_2 = J_2$, en déduire la valeur de I_2, J_2.
3. En intégrant deux fois par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$ on a

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Uniforme continuité. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ On dit que f est **uniformément continue** sur I lorsque l'assertion suivante est vérifiée

$$(1) \qquad \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, \left(|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon\right).$$

1. Rappeler la définition de "f est continue sur I".
2. Montrer que si f est uniformément continue sur I, alors elle est continue sur I.

3. Rappeler la définition de "f est Lipschitz sur I". Montrer que si f est Lipschitz sur I, alors f est uniformément continue.
4. Prenons $f(x) = x^2$. Montrer qu'on a, pour tout x, y tels que $0 < x < y$

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \times (2x).$$

   En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : en revanche, le résultat suivant est vrai.

Théorème 0.1 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.*

Une équation fonctionnelle On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Donner un exemple de fonction f vérifiant (2). En donner un autre !
2. Soit f une fonction vérifiant (2).
   (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f(n)$ en fonction de $f(1)$.
   (c) Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(n)$ en fonction de $f(1)$.
   (d) Pour tout couple d'entiers p, q avec $q \neq 0$, exprimer $f(p/q)$ en fonction de $f(p)$.
   (e) En déduire l'expression de f sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.
3. Soit f une fonction vérifiant (2). On suppose que f est continue. En déduire l'expression de f. On utilisera le résultat suivant (qui est admis) :

   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $\{x_n\}_n$ de nombre **rationnels** qui converge vers x.