2M004 UPMC, 17 septembre 2015

TD 1 : Continuité, dérivabilité

1 Continuité

Exercice 1 Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. La fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.
2. La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ si $x \notin \{0, 1, -1\}$ et $g(x) = 0$ si $x = 0, 1$ ou -1.
3. La fonction h définie par $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.
4. La fonction ψ définie par $\psi(x) = E(x) + |x - E(x)|^4$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue au point x_0 et que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ et un intervalle I contenant x_0 tel que $f(x) \geq c$ sur I.

Exercice 3 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et 1 telles que $f(x) = f(x^2)$ pour tout x réel.

2 Dérivabilité

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\sin x \leq x$.
2. Montrer que pour $x > -1$ on a $\ln(1 + x) \leq x$.
3. Montrer que pour tout x réel on a $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 5 On pose $h_1(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que h_1 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 0$, donner l'expression de sa dérivée n-ième.

Exercice 6 Soit h_2 définie par $h_3(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h_2(0) = 0$. Montrer que h_2 est de classe C^1. Est-elle C^2 ? Est-elle C^3 ?

Exercice 7 Soit h_3 définie par $h_3(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \geq 0$ et $h_3(x) = 0$ si $x < 0$. Montrer que h_3 est de classe C^∞.

Exercice 8 Soit f dérivable en 0. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

Exercice 9 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, pour tout réel a, la valeur de $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 10 Montrer qu'une fonction C^1 est Lispschitz sur tout intervalle. Montrer que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ ne sont pas Lipschitz sur $\mathbb{R}$. Est-ce que tout fonction Lipschitz est forcément C^1 ?