2M004 UPMC, 30 septembre 2015

TD 2 bis : Dérivabilité, convexité

1 Convexité

On admettra (dans un premier temps) la chose suivante. Soit f une fonction convexe. Alors pour tout entier n, pour tout $x_1, \dots, x_n$ dans I et tout $t_1, \dots, t_n$ dans $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Exercice 1 Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer les inégalités suivantes

1. $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ pour tout $x, y > 0$.
2. $1 + x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq (1+x)^{\frac{1}{p}} (1+y)^{\frac{1}{q}}$ pour tout $x, y > 0$.
3. En déduire que si $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$ alors $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$ (on suppose les x_i, y_i tous strictement positifs).
4. Montrer l'inégalité de Hölder
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$
5. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique
$$\frac{x_1 + \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Exercice 2 Soit $n \geq 3$ et $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1. Parmi tous les polygones à n côtés inscrits dans $\mathcal{C}$, déterminer ceux de périmètre maximal.

Exercice 3 Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f''(x) \geq \lambda$.

1. Montrer que pour $t \in [0,1]$ on a
$$(1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) \geq \lambda\, t(1-t)(b-a)^2/2.$$
On pourra faire deux développements de Taylor entre des points bien choisis.
2. Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, quel λ peut-on prendre et que devient la formule ci-dessus ?
3. Comment s'interprète le résultat du 1. lorsque $\lambda = 0$? Montrer que le cas général peut se déduire du cas $\lambda = 0$.

Exercice 4 Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si elle est majorée alors elle est constante.

Exercice 5 Montrer le résultat admis au début de cette section.

2 Encore un peu de dérivabilité

Exercice 6 Soit h_3 définie par $h_3(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \geq 0$ et $h_3(x) = 0$ si $x < 0$. Montrer que h_3 est de classe C^∞.

Exercice 7 Soit f dérivable en 0. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$$

Exercice 8 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, pour tout réel a, la valeur de $\lim_{x\to a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

Exercice 9 Montrer qu'une fonction C^1 est Lispschitz sur tout intervalle. Montrer que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ ne sont pas Lipschitz sur $\mathbb{R}$. Est-ce que tout fonction Lipschitz est forcément C^1 ?

Exercice 10 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
2. On suppose $\lim_{x\to\infty} f'(x) = l$ pour un certain $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Exercice 11 Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Plus précisément, si l'on suppose que $|f| \leq M_0$ et $|f''| \leq M_2$ montrer que $|f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

3 Variation autour de Rolle

Soient $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $g_k(a) \neq g_k(b)$ pour tout entier k compris entre 1 et n. Considérons la fonction Φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k(x) - f_k(a) - \lambda_k \left(g_k(x) - g_k(a)\right)\right).$$

1. Φ est-elle continue sur $[a, b]$? Calculez $\Phi(a)$.
2. Déterminer des constantes λ_k (k compris entre 1 et n), telles que $\Phi(b) = \Phi(a)$.
3. Φ est-elle dérivable sur $]a, b[$? Si oui, quelle est sa dérivée ?
4. Énoncez le théorème de Rolle.
5. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(c) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(c) \frac{f_k(b) - f_k(a)}{g_k(b) - g_k(a)}.$$