2M004 UPMC, 1er Octobre 2015

TD 3 : Intégration

Exercice 1 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \ln t$
2. $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$
3. $t \mapsto t\cos(t)$
4. $t \mapsto t^2 e^t$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables

1. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
2. $\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}$

Exercice 3 Soit f une fonction **convexe** de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a
$$\frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n f(t)dt \geq 0$$
2. Montrer que pour tout entier k de $\{1, \ldots, n-1\}$ on a
$$\int_k^{k+1/2} f(t)dt \geq \frac{f(k)}{2} + \frac{1}{8}f'(k), \int_{k+1/2}^{k+1} f(t)dt \geq \frac{f(k)}{2} - \frac{1}{8}f'(k+1),$$
3. En déduire que
$$\frac{f(1)}{2} + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n f(t)dt \leq \frac{f'(n) - f'(1)}{8}.$$

Sommes de Riemann Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2+3n^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$ où $E(x)$ est la partie entière de x.