2M004 UPMC, 1er Octobre 2015

TD 3 bis : Intégration 2

Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$
2. $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$
3. $\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t) dt$

Calculs de primitives. Déterminer les primitives suivantes

1. $\int (x-1)\sqrt{x} dx$
2. $\int x\sqrt{1+x} dx$
3. $\int t^2 \ln t dt$
4. $\int t^3 e^{2t} dt$
5. $\int e^{2x} \sin(3x) dx$
6. $\int \ln^2(x) dx$
7. $\int \frac{tdt}{1+t^4}$
8. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Décomposition en éléments simples. Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes

1. $\frac{1}{X^2-3X+2}$
2. $\frac{1}{X^2-4X+4}$
3. $\frac{1}{(X-5)^2(X+1)}$
4. $\frac{3X^2+4X+3}{(X-3)(X+4)}$
5. $\frac{1}{X^4+1}$
6. $\frac{1}{(X^2+1)(X-3)}$

Sommes de Riemann. On introduit et on utilise la notion de "somme de Riemann".
Aspect théorique. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$R_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que $R_n(t)$ converge vers $\int_0^1 f(t)dt$ quand $n \to \infty$. Comment généraliser ce résultat pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec a, b quelconque ?

Aspect pratique. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+3n^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$ où $E(x)$ est la partie entière de x.