

TD 4

Sommes de Riemann. Calculer les limites suivantes

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + 3n^2}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$ où $E(x)$ est la partie entière de x .

Notation de Landau

- On considère les fonctions suivantes, définies au voisinage de 0 :

$$f(x) = x^2, g(x) = \frac{\sin(x^4)}{x}, h(x) = \frac{1}{\exp(1/x^2)}, i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

Dire lesquelles sont un $o(1)$, puis lesquelles sont un $o(x^2)$ (en 0).

- Soient $k, k' \in \mathbb{N}$, montrer que

- $o(x^k) = x^k o(1)$
- $x^k o(x^{k'}) = o(x^{k+k'})$
- $o(x^k) o(x^{k'}) = o(x^{k+k'})$
- $o(x^k) \pm o(x^{k'}) = o(x^{\min(k, k')})$

Quelques applications

- Étudier la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.
- Étudier, en fonction de la valeur de α , la limite quand $x \rightarrow \infty$ de

$$f(x) = \left(x \sin(1/x)\right)^{x^\alpha}$$

et de la fonction $x^2 f(x)$.

Exercice 1

- Donner le D.L. à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Même question pour $x \mapsto \ln(1-x)$.
- En déduire le D.L. à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction

$$f(x) = x\sqrt{1+x} + \ln(1-x)$$

- Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x^3}$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 2

- Donner le D.L. à l'ordre 5 en $x = 0$ des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \ln(1+x^4)$.

2. Soit f définie par

$$f(x) = \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{\ln(1 + x^4)}$$

Montrer que f admet une limite quand $x \rightarrow 0$ et la calculer.

3. Montrer que f ainsi prolongée par continuité en 0 est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto e^x(\cos x + \sin x) - 1$

1. Calculer f' , f'' , f''' .

2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que

$$|f(x) - (2x + x^2)| \leq |x^3|$$

pour tout $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Calculs. Calculer les DL suivants :

1. $e^{\sin x}$ à l'ordre 2 en 0
2. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 en 0
3. $\exp(\sin x \ln(\cos x))$ à l'ordre 2 en 0
4. $\tan(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 2 en 0
5. $\ln(\cos^2 x - \sin^2 x)$ à l'ordre 2 en 0
6. $\frac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 2

Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} + e^{-x/2} - 2}{x^3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x$ pour α réel.

Pour s'amuser. Trouver une fonction f telle que, quand $x \rightarrow \infty$, on a $f(x) = o(x^\alpha)$ et $(\ln x)^\alpha = o(f(x))$ pour tout $\alpha > 0$.