Une introduction à la comparaison séries-intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on cherche à comparer la série de terme général $f(k)$ et l'intégrale de f. On donne la définition suivante :

Définition 0.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge si la limite suivante existe et est finie*

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)dt,$$

et dans ce cas on note $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$.

On dit que l'intégrale est absolument convergente si l'intégrale de $|f|$ converge. Cela implique en particulier que l'intégrale de f est convergente.

Si f est une fonction, on appellera $S(f)$ la série de terme général $f(k)$ et on note $S_n(f)$ sa somme partielle $S_n(f) := \sum_{k=0}^n f(k)$.

Quelques cas intéressants

1. Soit f continue et **positive** sur $\mathbb{R}$.
   (a) Si f est croissante, montrer que pour tout $n \geq 1$ on a
   $$\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t)dt$$
   (b) En déduire que si l'intégrale de f converge, alors la série $S(f)$ converge.
   (c) Montrer la réciproque. On a donc f converge $\iff$ $S(f)$ converge.
   (d) Montrer que l'équivalence est vraie aussi quand f est décroissante.
2. On suppose maintenant que f est C^1 (mais pas forcément positive).
   (a) Montrer que
   $$\left| S_n(f) - \int_1^{n+1} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^n \max_{[k,k+1]} |f'|.$$
   (b) En déduire que si $f'(x) = o(1/x^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, alors la série $S(f)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Application 1 : Série harmonique

1. Montrer que
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}dt$$
2. En déduire que $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right|$ est borné.
3. En particulier, en déduire que la série harmonique diverge.
4. On note $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On veut montrer que $\{v_n\}_n$ est monotone au moins à partir d'un certain rang.
   (a) Calculer $v_{n+1} - v_n$
   (b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ et en déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $|u| \leq \epsilon$ on a
   $$\ln(1+u) \geq u - \frac{3}{2}u^2.$$
   (c) En conclure que $\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$ est négatif à partir d'un certain rang.
   (d) En conclure que $\{v_n\}_n$ est monotone à partir d'un certain rang et en déduire qu'elle converge.
   (e) En déduire qu'on a
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1),$$
   pour une certaine constante γ (appelée constante d'Euler-Mascheroni, et qui vaut $\gamma \approx 0,577$).

Application 2 On cherche à calculer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}}$.

1. Justifier que
$$\left|\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} - \int_1^{10^9+1} \frac{1}{t^{2/3}}\right| \leq \sum_{k=1}^{10^9} \frac{2}{3}\frac{1}{k^{5/3}}.$$
2. Justifier que
$$\sum_{k=1}^{10^9} \frac{2}{3}\frac{1}{k^{5/3}} \leq \int_1^{10^9+1} \frac{2}{3}\frac{1}{t^{5/3}}dt$$
3. Montrer que
$$\int_1^{10^9+1} \frac{2}{3}\frac{1}{t^{5/3}}dt \leq \frac{2}{5}.$$
4. En déduire que
$$\left|\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} - \int_1^{10^9+1} \frac{1}{t^{2/3}}\right| \leq \frac{2}{5}.$$
5. En déduire la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}}$.