LM201 UPMC, 6 octobre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

DM1 : Relations

1. Préliminaire Si E est un ensemble on note $P(E)$ l'ensemble des parties de E. Expliciter une injection de E dans $P(E)$. On veut montrer qu'il n'existe pas de bijection de E vers $P(E)$. Si $f : E \to P(E)$ est une fonction on note B_f l'ensemble suivant

$$B_f := \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

Montrer que B_f ne peut pas appartenir à l'image de f. Conclure qu'aucune application de E vers $P(E)$ ne peut être surjective.

Définitions Soit E un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est une partie de $E \times E$. Pour x, y dans E, si $\mathcal{R}$ contient le couple (x, y) on dit que x est en relation avec y par $\mathcal{R}$ et on note $x\mathcal{R}y$.

Réflexivité. On dit que $\mathcal{R}$ est réfléxive lorsque $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$.

Symétrie. On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique lorsque pour tout x, y on a : $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Antisymétrique On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique lorsque pour tout x, y on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R} \Longrightarrow x = y$.

Transitivité. On dit que $\mathcal{R}$ est transitive lorsque pour tout x, y, z on a :

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

2. Relations d'équivalence On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E lorsqu'elle est *réflexive*, *symétrique* et *transitive*.

1. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence : l'égalité $(=)$ sur $\mathbb{R}$, l'égalité modulo 5 $(\equiv_5)$ sur $\mathbb{Z}$, le parallélisme $(//)$ sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$.
2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E et $x \in E$ on appelle "classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$" l'ensemble
$$C_x := \{y \in E, x\mathcal{R}y\}.$$
Montrer que l'ensemble des différentes classes d'équivalences forment une partition de E (c'est à dire que tout élément de E appartient à une et une seule classe d'équivalence).

(*) L'ensemble $C_{\mathcal{R}}$ des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ est une partie de $P(E)$ appelée "ensemble quotient". Soit $f : E \to F$ une fonction telle que pour tout x, y, si $x\mathcal{R}y$ alors $f(x) = f(y)$. Montrer qu'il existe une application $\tilde{f} : C_{\mathcal{R}} \to F$ telle que

$$\tilde{f}(C_x) = f(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

On dit que f "passe au quotient" en $\tilde{f}$.

3. Relations d'ordre On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Par commodité si $x\mathcal{R}y$ pour cette relation on dira que x est "plus petit" que y.

1. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre : "x inférieur ou égal à y" ($x \leq y$) sur $\mathbb{R}$, "a divise b" ($a|b$) sur $\mathbb{N}$, "A inclus dans B" ($A \subset B$) sur $\mathcal{P}(F)$ (pour un ensemble F quelconque).
2. On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est un ordre *total* lorsque pour tout x, y on a soit $x\mathcal{R}y$ soit $y\mathcal{R}x$. Parmi les relations précédentes, dire s'il s'agit d'un ordre total ou non.
3. (*) Quel est la relation d'ordre "la moins totale" que l'on puisse imaginer ?
4. On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est un "bon ordre" sur E si toute partie non vide contient un plus petit élément. Montrer qu'un bon ordre est toujours un ordre total. En considérant le cas $(\mathbb{R}, \leq)$ montrer que la réciproque est fausse.
5. Montrer qu'il existe un plus petit élément sur $\mathbb{N}$ pour la relation $|$ de divisibilité ? (*) Si l'on retire ce plus petit élément, montrer qu'il n'y a pas de "second" plus petit élement mais qu'il existe une infinité éléments minimaux (un élément est minimal si personne n'est plus petit que lui) : quels sont ces éléments ?

Indications

- Pour le préliminaire, raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe un antécedent y. En distinguant selon que y appartient ou non à B_f, aboutir à une contradiction.
- Q.2.1. Il est facile de vérifier que tout élément appartient à au moins une classe, il s'agit simplement qu'il ne peut pas appartenir à deux classes distinctes.
- Q.2.2. Il suffit de montrer que l'application $\tilde{f}(C_x) = f(x)$ est bien définie (a priori on peut avoir $C_x = C_y$ pour $x \neq y$. Mais qu'est-ce que cela implique sur x, y ?)
- Q.2.2. Oui, non, non.
- Q.2.3 Exhiber une partie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de plus petit élément.