LM201 UPMC, 3 novembre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

DM2 : Autour de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

On note $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de nombres rationnels (l'ensembles des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$) et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles (l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). On note aussi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'entiers. Si E, F sont deux ensembles on note parfois $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On a ainsi, avec cette notation $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ etc.

0. Injection, surjection, bijection Donner la définition d'une injection, d'une surjection, d'une bijection. Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective, que la composition de deux fonctions surjectives est surjective, que la composée de deux fonctions bijectives est bijective.

1. Cardinalité On veut montrer que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$. Dans la suite, il ne faut pas hésiter à donner des noms aux injections, surjections, bijections que l'on rencontre, même si on ne les connaît pas explicitement. Il ne faut pas hésiter à les composer lorsque la composée a un sens, et à utiliser les résultats du paragraphe 0.

1. Revoir son cours sur la cardinalité.
2. On rappelle que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (on pourra commencer par chercher une injection très simple de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$).
3. Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En déduire qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).
4. Soit E, F, G trois ensembles. Expliciter une bijection entre
$$\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \text{ et } \mathcal{F}(E \times F, G).$$
Cette identité est connue en informatique sous le nom de Curryfication.
5. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}))$ est en bijection avec $\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\})$.
6. Rappel : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. En déduire que
$$\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \text{ est en bijection avec } \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}).$$
7. En déduire finalement qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$. Conclure qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle une fois encore que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ sont en bijection).
8. En déduire qu'il existe en fait une injection de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection).
9. En déduire que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection (on pourra utiliser le théorème de Cantor-Bernstein).

2. Analyse Soit $u = (u_n)_n$ une suite réelle bornée. Justifier que $\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$ possède une borne supérieure. On note $l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées et on définit l'application $||.|| : l^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

1. Montrer que $l^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On pourra en particulier montrer que $||u+v||_\infty \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty$ et $||\lambda u||_\infty = |\lambda| \times ||u||_\infty$ pour tout u, v dans $l^\infty(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $||uv||_\infty \leq ||u||_\infty \times ||v||_\infty$ pour tout u, v dans $l^\infty(\mathbb{R})$.

Cela fait de $l^\infty(\mathbb{R})$ une "algèbre de Banach".

1. Soit $u \in l^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une suite $v \in \mathbb{Q}^\mathbb{N} \cap l^\infty(\mathbb{R})$ telle que

   $$||u - v||_\infty \leq \epsilon.$$

   Il est fortement recommandé de penser à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et ce "plusieurs" fois.. Cela montre que "$l^\infty(\mathbb{Q})$ est dense dans $l^\infty(\mathbb{R})$".
2. Soit $(u^{(k)})_k$ une suite d'élements de $l^\infty(\mathbb{R})$, c'est à dire une suite de suites bornées ! On dit que $(u^{(k)})_k$ est de Cauchy lorsque :

   $$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N}, \forall k, l \geq K, ||u^{(k)} - u^{(l)}||_\infty \leq \epsilon.$$

   Montrer que si $(u^{(k)})_k$ est une suite de Cauchy dans $l^\infty(\mathbb{R})$ (au sens de la définition précédente) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(u_n^{(k)})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (c'est la suite du n-ième coefficient de $u^{(k)}$, quand n est fixé et k varie). En déduire qu'elle admet une limite dans $\mathbb{R}$. On note v_n cette limite.
3. On définit ainsi une suite $v = (v_n)_n$. Montrer que la suite (de suites !) $(u^{(k)})_k$ converge vers v c'est à dire que :

   $$\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geq K, ||u^{(k)} - v||_\infty \leq \epsilon.$$

   Cela montre que "$l^\infty(\mathbb{R})$ est complet".
4. Montrer qu'en revanche $l^\infty(\mathbb{Q})$ n'est pas complet (avec la notion définie précédemment de suite de Cauchy et de convergence).