Contrôle final
durée : 2h

Aucun document, ni appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application non nulle telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$, que $f(1) = 1$, puis montrer que f est impaire.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(n)$ en fonction de n.
3. Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(p)$ en fonction de $f(\frac{p}{q})$. En déduire $f(\frac{p}{q})$.
4. Montrer que si l'on suppose en outre que f est continue, alors $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. On ne suppose plus f continue.
   (a) Soient $x \leq y$ deux réels. En écrivant $y - x$ comme un carré, montrer que f est une fonction croissante.
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \leq x \leq b$. Montrer que $a \leq f(x) \leq b$.
   (c) Montrer que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On note $\alpha := \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

1. Calculer le module de α.
2. Montrer que α est un nombre algébrique.
3. On suppose que α est racine d'un polynôme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{Q}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3. Montrer que $c - a + d\sqrt{2} = 0$ et $b + d - c\sqrt{2} = 0$. En déduire que $a = b = c = d = 0$.
4. Déterminer un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré minimal annulant α et montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si β est racine simple de P, alors P change de signe au voisinage de β.
2. Montrer que si β est racine double de P, alors P est de signe constant au voisinage de β.
3. On suppose que β est racine de P de multiplicité exactement $k \geq 1$. Que peut-on dire du signe de P au voisinage de β ?

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right| \leq \frac{x^6}{720}\,.$$
2. En déduire une valeur approchée de $\cos(\frac{1}{2})$ dont on indiquera la précision.