1 Correction du DM1

1.1 Préliminaire

Raisonnons par l'absurde et supposons que B_f appartient à l'image de f. Il existe alors un antécédent $x \in E$ tel que $f(x) = B_f$. On distingue deux cas :

- Soit x appartient à B_f. Comme $f(x) = B_f$ cela signifie que x appartient à $f(x)$ mais par définition B_f est l'ensemble $\{x \in E, x \notin f(x)\}$, donc x ne peut pas appartenir à $f(x)$, contradiction.
- Soit x n'appartient pas à B_f. Comme $f(x) = B_f$ cela signifie que x n'appartient pas à $f(x)$ mais par définition B_f est l'ensemble $\{x \in E, x \notin f(x)\}$, donc x appartient à B_f, contradiction.

1.2 Relations d'équivalences

1. Le fait que $=$ soit une relation d'équivalence est immédiat à vérifier. Pour le parallélisme des droites, il faut citer des propriétés géométriques, par exemple que deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles (ce qui montre la transitivité). Pour la relation d'égalité modulo 5, il est bon de revenir à la définition : on a $m \equiv_5 n$ lorsque $m = n + 5k$ pour un certain entier k. Il est facile de voir que $\equiv_5$ est réflexive (prendre $k = 0$) et symétrique car si $m = n+5k$ on a $n = m+5(-k)$. Pour la transitivité, il faut rédiger un minimum : si $m = n + 5k$ et $m = p + 5k'$ alors $n = p + 5(k' - k)$ donc $n \equiv_5 p$.
2. Il est clair que pour tout x on a $x \in C_x$ (car une relation d'équivalence est réflexive i.e. $x\mathcal{R}x$ pour tout x). Donc tout élément appartient à au moins une classe d'équivalence. Pour montrer que les classes d'équivalences forment une partition de E il faut montrer que deux classes d'équivalences sont soit disjointes soit confondues, ou encore que chaque élément de E n'appartient qu'à une seule classe d'équivalence. Soit x, y deux éléments de E et supposons que $C_x \cap C_y$ ne soit pas vide. On veut montrer qu'alors $C_x = C_y$. Pour cela prenons $z_0 \in C_x \cap C_y$. Pour tout $x' \in C_x$ on a $x\mathcal{R}x'$ (par définition de C_x) et par ailleurs $x\mathcal{R}z_0$ (car $z_0 \in C_x$) donc par symétrie et transitivité on a $x'\mathcal{R}z_0$. Tout élément dans C_x est donc en relation avec z_0, cela montre que $C_x \subset C_{z_0}$. Il est facile de vérifier que réciproquement, tout élément en relation avec z_0 est en relation avec x si bien que $C_{z_0} \subset C_x$, ce qui permet d'affirmer que $C_x = C_{z_0}$. Mais de même on obtiendrait $C_y = C_{z_0}$. Finalement $C_x = C_y = C_{z_0}$ donc les deux classes d'équivalences sont égales. Cela montre que deux classes d'équivalences qui ne sont pas disjointes sont égales.
3. Cette question est plus délicate. Soit $\mathcal{C}$ un élément de $C_{\mathcal{R}}$, c'est à dire une classe d'équivalence. On veut attribuer une valeur $\tilde{f}(\mathcal{C})$ à la classe $\mathcal{C}$. Pour cela, on choisit n'importe quel élément x de $\mathcal{C}$ et on pose $\tilde{f}(\mathcal{C}) := f(x)$. On remarque que f est constante sur chaque classe d'équivalence, en effet par hypothèse si x et x' sont en relation par $\mathcal{R}$ on a $f(x) = f(x')$ or deux éléments d'une même classe d'équivalence sont toujours en relation par $\mathcal{R}$ par définition. Ainsi la valeur $f(x)$ ne dépend pas du choix de $x \in \mathcal{C}$. On définit bien une application $\mathcal{C} \mapsto \tilde{f}(\mathcal{C})$ et on a bien pour tout x dans E :

$$\tilde{f}(C_x) = f(x).$$

1.3 Relations d'ordre

1. Le fait que $\leq$ soit une relation d'ordre est clair. De même pour $\subset$. Pour la relation $a|b$ il est facile d'établir la réflexivité et la transitivité (si a divise b et b divise c alors a divise c). En revanche pour l'anti-symétrie il faut justifier que si $a|b$ alors $a \leq b$ si bien que ($a|b$ et $b|a$) $\Longrightarrow a \leq b$ et $b \leq a$, donc $a = b$.
2. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est bien un ordre total (c'est une propriété de $\mathbb{R}$, on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$). La divisibilité n'est pas un ordre total, en effet on a ni $3|5$ ni $5|3$. De même la relation $A \subset B$ n'est, en général, pas un ordre total, prendre par exemple les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$: aucun n'est inclus dans l'autre.
3. On peut imaginer la relation suivante : prendre n'importe quel ensemble F et définir la relation $\mathcal{R}$ comme étant la partie $\{(x, x), x \in F\}$. On obtient ainsi une relation réflexive, anti-symétrique, transitive (c'est facile à voir), qui est donc une relation d'ordre. Mais c'est l'ordre le moins total, et le moins intéressant que l'on puisse imaginer : on ne peut **jamais** comparer deux éléments distincts, tout ce qu'on peut dire c'est que $x \leq x$ pour tout x !
4. Montrons qu'un bon ordre est toujours un ordre total. Soit x, y dans E et considérons la partie $\{x, y\}$. Comme c'est un bon ordre, cette partie possède un plus petit élément. Si ce plus petit élément est x, c'est que $x \leq y$, sinon c'est que $y \leq x$, mais c'est forcément l'une des deux possibilités. L'ordre est donc bien total.
5. Il est facile de voir que 1 est le plus petit élément pour la relation de divisibilité : il divise tout le monde (il est plus petit que tout le monde). Il n'y a pas de second plus petit élément, mais tout nombre premier est un nombre "minimal" pour la relation de divisibilité (une fois qu'on a retiré le nombre 1), car il n'est divisible (i.e. "plus petit" pour la divisibilité) par aucun nombre à part lui-même (et 1, qui a été retiré du jeu).