1. Notons i_1 l'application d'inclusion de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'application $i_1 : u \mapsto u$ qui à une suite $u = (u_n)_n$ d'élements de $\{0,1\}$ associe cette même suite u vue comme suite de rationnels. Il est clair que i_1 est injective. Notons par ailleurs $\varphi : \mathbb{R} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une bijection. L'application $I_1 := i_1 \circ \varphi$ est la composée d'une injection et d'une bijection, c'est donc une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.
2. Notons i_2 l'application d'inclusion de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'application $i_2 : u \mapsto u$ qui à une suite $u = (u_n)_n$ d'entiers naturels associe cette même suite u vue comme suite de nombres réels. Il est clair que i_2 est injective. On sait par ailleurs qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{R}$ vers $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On peut alors construire l'application $\widetilde{\varphi}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante : à une suite $u = (u_n)_n$ de réels on associe la suite $(\varphi(u_n))_n$ d'élements de $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$. L'application $\widetilde{\varphi}$ est la composée d'une bijection et d'une injection, c'est donc une injection. Finalement, l'application
$$\widetilde{\varphi} \circ i_2 : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$$
est la composée de deux injections, c'est donc une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$.
3. L'application $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G)) \to \mathcal{F}(E \times F, G)$
$$(x \mapsto f_x) \mapsto ((x,y) \mapsto f_x(y))$$
est une bijection, ce qui est facile à vérifier.
4. C'est une application immédiate de la question précédente (avec $E = F = \mathbb{N}$ et $G = \{0,1\}$). Notons γ une telle bijection.
5. D'après le cours on sait qu'il existe une bijection $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On en déduit l'existence d'une bijection de $\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\})$ vers $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$, par exemple l'application $\widetilde{\psi}$ qui à une fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\}$ associe la fonction $f \circ \psi$. Il est facile de vérifier que c'est une bijection (attention, ce n'est pas un cas particulier du paragraphe 0. !!).
6. Finalement, on a montré que :
   (a) Il existe une injection $\widetilde{\varphi} \circ i_2$ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}$, et ce dernier ensemble n'est autre que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}))$.
   (b) Il existe une bijection $\gamma : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})) \to \mathcal{F}(\mathbb{N} \times N, \{0,1\})$.
   (c) Il existe une bijection $\widetilde{\psi}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\})$ vers $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$.
   (d) On sait par ailleurs qu'il existe une bijection Λ de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ (qui n'est autre que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) vers $\mathbb{R}$.

   La composée $\widetilde{\psi} \circ \gamma \circ \widetilde{\varphi}$ est alors une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et la composée
$$\Gamma := \Lambda \circ \widetilde{\psi} \circ \gamma \circ \widetilde{\varphi}$$
   est alors une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.
7. Soit ν une bijection de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{N}$. L'application
$$\tilde{\nu} : u = (u_n)_n \mapsto (\nu(u_n))_n$$
est une bijection de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. L'application $\Gamma \circ \tilde{\nu}$ est donc une injection de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.
8. D'après la question 2. il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et d'après la question 8. il existe une injection de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cantor-Bernstein il existe alors une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

2. Analyse

1. Soit $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ deux suites bornées. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty$ donc $||u+v||_\infty = \sup_n |u_n + v_n| \leq ||u||_\infty + ||v||_\infty$. (Notons qu'en général l'inégalité inverse est fausse). Par ailleurs on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leq |\lambda|||u||_\infty$, si bien que $||\lambda u||_\infty \leq |\lambda|||u||_\infty$.
2. En procédant comme à la question précédente, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq ||u||_\infty ||v||_\infty$ donc $||uv||_\infty \leq ||u||_\infty ||v||_\infty$.

1. Soit $u \in l^\infty(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $v_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|u_n - v_n| \leq \epsilon$. La suite $v := (v_n)_n$ est alors une suite bornée (il est facile de voir que $||v||_\infty \leq ||u||_\infty + \epsilon$) et on a bien $||v - u||_\infty \leq \epsilon$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. En appliquant la définition donnée dans l'énoncé, et comme on a toujours $|u_n^{(k)} - u_n^{(l)}| \leq ||u^{(k)} - u^{(l)}||_\infty$, on voit que la suite $(u_n^{(k)})_k$ (attention c'est la suite sur k !) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc admet une limite que l'on note v_n.
3. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, comme $(u^{(k)})_k$ est de Cauchy, on sait qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k, l \geq K$:
$$||u^{(k)} - u^{(l)}||_\infty \leq \epsilon.$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on voit que pour tout $k, l \geq K$ on a :
$$|u_n^{(k)} - u_n^{(l)}| \leq \epsilon.$$
Or $u_n^{(l)}$ tend vers v_n quand l tend vers $+\infty$. En envoyant $l \to \infty$ on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq K$ on a :
$$|u_n^{(k)} - v_n| \leq \epsilon,$$
ce qui implique que $||u^{(k)} - v||_\infty \leq \epsilon$ dès que $k \geq K$, ce qui est bien la conclusion voulue.
4. Soit $(u_n)_n$ une suite de rationnels qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Définissons la suite de suites $v^{(k)}$ par
$$(v^{(k)})_0 = u_k \text{ et } (v^{(k)})_n = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$
Il est facile de vérifier que cette suite (de suites) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ au sens précédent, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$.