LM201 UPMC, 16 septembre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 1 : Quelques principes de raisonnement

Exercice 1 Rappeler la définition d'un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{2}$ sont irrationnels. Soit m, n deux entiers naturels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ soit rationnel.

Exercice 3 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ montrer que $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.

Exercice 4 Soit $n \geq 1$ un entier et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si il existe $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_i = \lambda_i z$ pour tout $i = 1 \ldots n$.

Exercice 5 Pour tout $n \geq 1$ montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 6 Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrer qu'elle s'écrit aussi de manière unique comme la différence de deux fonctions positives. Montrer que toute matrice carrée réelle s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 7 Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites : Les suites croissantes ? Les suites positives ? Les suites arithmétiques ? Les suites dont tous les termes sont des nombres entiers pairs ? Les suites dont tous les termes sont des nombres entiers impairs ? Les suites géométriques ?

Exercice 8 Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-Lipschitzienne lorsque $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout x, y dans I. On dit que f est Lipschitzienne lorsqu'elle est k-Lipschitzienne pour un certain $k > 0$.

1. Écrire les définitions avec des quantificateurs. Écrire leur négation.
2. Montrer qu'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est Lipschitzienne sur tout segment.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp(x)$ ne sont pas Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Rappeler la définition d'un polynôme scindé à racines simples. Montrer qu'un polynôme (réel) scindé à racines simples ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs non nuls.