LM201 UPMC, 23 septembre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 2 : Raisonnement, analyse.

Exercice 1 Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrer qu'elle s'écrit aussi comme la différence de deux fonctions positives (est-ce unique ?). Montrer que toute matrice carrée réelle s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 2 L'ensemble des suites géométriques forme-t-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites ?

Exercice 3[Examen 2012] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 1$ et dérivable en zéro. Donner un développement limité de f en 0 et en déduire que $f(x)^{\frac{1}{x}}$ a un sens pour $x > 0$ proche de 0. Justifier l'existence de $\lim_{x \to 0^+} f(x)^{\frac{1}{x}}$ et calculer cette limite.

Exercice 4[Examen 2012] Une fonction qui admet en un point un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ est-elle n fois dérivable en ce point ? Qu'en est-il, sans justification, du cas $n = 1$?

Exercice 5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $k > 0$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-Lipschitz lorsque $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout x, y dans I. On dit que f est Lipschitz lorsqu'elle est k-Lipschitz pour un certain $k > 0$.

1. Écrire les définitions avec des quantificateurs. Écrire leur négation.
2. Montrer qu'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est Lipschitz sur tout segment.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp(x)$ ne sont pas Lipschitz sur $\mathbb{R}$.
4. La somme de deux fonctions Lipschitz est-elle Lipschitz ? Le produit de deux fonctions Lipschitz est-il Lipschitz ?