LM201 UPMC, 30 septembre 2014.
T. Leblé, *leble@ann.jussieu.fr*

TD 3 : Divers algèbre

Exercice 1[Examen 2013] Notons $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et $P = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 0\}$. Pour tout $z \in D$ on pose

$$f(z) := \frac{z+i}{z-i}.$$

1. Montrer que f est bien définie et que son image est contenue dans P.
2. Montrer que f est une bijection de D dans P.
3. Calculer sa bijection réciproque.

Exercice 2[Examen 2013] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$.
2. u et v sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 3[Examen 2013]

– Montrer que $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
– Soit a, b, c, d des entiers. Montrer que

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^3 + X^2 + X + 1 + (X^4 - 1)Q(X)$$

pour un certain polynôme Q.
– En déduire que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 4 Déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$$P(1) = 1, P'(1) = 2, P''(1) = 3, P'''(1) = 4.$$

Exercice 5 Calculer

$$\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)}.$$

En déduire une identité vérifiée par π.