TD 4 : Logique, ensembles

Exercice 1. Montrez les équivalences suivantes (les deux premières sont utiles) :
- P et (Q et R) $\equiv$ (P et Q) et R
- P ou (Q ou R) $\equiv$ (P ou Q) ou R
- $[(R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow Q] \equiv R$
- $[P$ ou $(\neg P$ et $Q)] \equiv (P$ ou $Q)$

Exercice 2. (Injection, surjection). Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 3. (Ensembles). Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
1. Pour A et B des parties de E montrer que
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$
Donner un contre-exemple à l'égalité dans la deuxième inclusion ci-dessus.
2. Pour A et B des parties de F montrer que
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Exercice 4. (Ensembles/injectivité) Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. Montrer les équivalences suivantes :
1. f est injective.
2. $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$.
3. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
4. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), (X \cap Y = \emptyset) \Rightarrow (f(X) \cap f(Y) = \emptyset)$.
5. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Exercice 5. Soit $f : X \to Y$ une application. On note $P(f, X)$ l'ensemble des $x \in X$ qui ne sont pas les seuls antécédents de leur image par f (P comme perte). Que signifie $P(f, X) = \emptyset$? Peut-on avoir $P(f, X) = X$? Comparer $P(f, X)$ et $P(g \circ f, X)$ et exprimer le cas d'égalité.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$. Montrer que f est bijective. Expliquer ensuite comment construire une bijection de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{N}$.