

TD 5 : \mathbb{R} et complétude

Exercice 1. Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < y - x$.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} \leq x\}$ admet un plus grand élément, noté q .
3. Conclure en remarquant que $x < \frac{q+1}{n} < y$.

Exercice 2. Une application Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(n)$ en fonction de n et de $a = f(1)$.
3. Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(p)$ en fonction de $f(\frac{p}{q})$. En déduire $f(\frac{p}{q})$.
4. On suppose que f est continue, montrer que f coïncide avec $x \mapsto ax$.

Exercice 3. Approximation d'un réel Pour tout réel a , on notera $\{a\} = a - [a] \in [0, 1[$ la *partie fractionnaire* de a , à savoir la différence entre a et sa partie entière.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et N un entier non-nul. Montrer qu'il existe un entier $r \in [0, N - 1]$ et des entiers k, ℓ entre 0 et N tel que $\{kx\}$ et $\{\ell x\}$ appartiennent tous deux à $[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N}[$.
2. En déduire le *Théorème de Dirichlet* : pour tout réel x et pour tout entier non nul N , il existe des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{q}.$$

Exercice 4. Une seconde application Déterminer les morphismes de corps de \mathbb{R} , i.e. les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifient $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout x, y dans \mathbb{R} . On pourra commencer par les déterminer sur \mathbb{Q} , puis montrer qu'ils sont croissants, et conclure par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 5. Suites adjacentes Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles. On suppose que

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont de Cauchy. En déduire le théorème des suites adjacentes : (u_n) et (v_n) convergent dans \mathbb{R} , vers la même limite.

Exercice 6. Critère de Cauchy et séries

1. Soit (u_n) une suite réelle décroissante, à termes positifs, qui tend vers 0. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ est de Cauchy, donc converge dans \mathbb{R} .
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy. En déduire qu'elle ne converge pas.

Exercice 7. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

1. Montrer qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ (dans ce cas, on dit que le sous-groupe est discret).
2. Donner des exemples de sous-groupes denses.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et α (i.e. le sous-groupe $\{n + m\alpha : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$) ? Plus généralement, que dire du sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par deux réels x et y ? Et d'un sous-groupe engendré par un nombre fini d'éléments x_1, \dots, x_n ?
4. Existe-t-il des sous-groupes de \mathbb{R} qui ne sont pas engendrés par un nombre fini d'éléments ? Si oui, donner des exemples.

Exercice 8. S oit $k \geq 0$ et $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tout x, y dans $[0, 1[$. On dit que f est k -Lipschitz sur $[0, 1[$.

1. Montrer que f est continue. Montrer qu'on a même la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in [0, 1[, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

On dit alors que f est **uniformément** continue sur $[0, 1[$.

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 1[$ qui tend vers 1. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. On définit une fonction \tilde{f} sur $[0, 1]$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in [0, 1[$ et $\tilde{f}(1) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.
3. Montrer que \tilde{f} est continue. Montrer qu'elle l'est même uniformément.

Exercice 9. Autres exemples d'espaces complets Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On dit que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur E lorsque $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, pour tout u, v dans E et λ dans \mathbb{R} . La définition de suite convergente ou de suite de Cauchy sur E est la même que sur \mathbb{R} en remplaçant la valeur absolue $|\cdot|$ par la norme $\|\cdot\|$. Montrer que les espaces suivants, munis d'une norme, sont complets :

1. \mathbb{C} muni du module $|\cdot|$.
2. L'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
3. L'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.