Séance 6 : Cardinaux et nombres algébriques

Exercice 1.

Montrer que les nombres suivants sont algébriques :

1. $1+\sqrt{2}$
2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
3. $j+1$
4. $j-1$

Exercice 2.

1. Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable .
2. Montrer que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable .
3. Existe-t-il un ensemble infini dont l'ensemble des parties dénombrables est dénombrable ?

Exercice 3. (Théorème de d'Alembert-Gauss) L'objectif de cet exercice est de montrer que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$ un polynôme non constant (avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$).

1. Montrer que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Montrer qu'il existe $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, avec $b_0 = P(z_0)$ et $b_n \neq 0$, tels que
$$P(z_0 + X) = b_nX^n + \cdots + b_0\,.$$
3. On suppose $b_0 \neq 0$. On note k le plus petit entier ≥ 1 tel que $b_k \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$ une racine k-ième de $-\frac{b_0}{b_k}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour réel ϵ suffisamment petit, on a
$$|P(z_0 + \omega\epsilon)| < |b_0|\,.$$
4. Conclure.

Exercice 4. Divers

1. Soit X et Y deux ensembles finis. Montrer que l'un des ensembles Inj(X,Y) ou Surj(X,Y) est non vide. Que dire si les deux sont non vides ?
2. Soit X un ensemble fini. Montrer que X et $P(X)$ n'ont pas même cardinal.
3. Soit X fini. Y a-t-il plus d'applications de X vers $P(X)$ ou de $P(X)$ vers X ?
4. Soit X un ensemble. Montrer qu'il est infini si et seulement si quelle que soit la fonction f de X dans X, il existe une partie A de X non vide et distincte de X stable par f.
5. Soit X un ensemble dont toutes les parties sont soit finies soit cofinies (i.e. de complémentaire fini). Montrer que X est fini.