

Exercices. Feuille 4

Exercice 1. Soit P un polynôme sur \mathbb{R} . Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine simple de P , alors P change de signe au voisinage de α .

Exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \in \mathbb{R}$ et m un entier non nul.

1. Montrer que x est racine de P de multiplicité au moins m si et seulement si $P(x) = P'(x) = \dots = P^{(m)}(x) = 0$.
2. Comment caractériser le fait que x est racine de P de multiplicité exactement m ?
3. Montrer que tout polynôme réel de degré d est égal au développement de Taylor d'ordre d de P (en tout point).

Exercice 3. (Subtil) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. Montrer que si P est scindé (sur \mathbb{R}), alors P' est aussi scindé (sur \mathbb{R}) et de plus toutes les racines de P' sont comprises (au sens large) entre la plus petite et la plus grande des racines de P .

Exercice 4. Montrer qu'un polynôme scindé simple sur \mathbb{R} ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 5. Montrer que les fonctions trigonométriques ne sont pas des fonctions polynomiales (et ce, sur aucun intervalle de \mathbb{R}). Idem pour exp.

Exercice 6. Examen 2013

1. Montrer que $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Soit a, b, c, d des entiers. Montrer que

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^3 + X^2 + X + 1 + (X^4 - 1)Q(X)$$

pour un certain polynôme Q .

3. En déduire que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 7. Théorème de Stone-Weierstrass Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On pose, pour $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$: $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Puis on définit, pour $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}$: $g_n(x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Il s'agit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{\infty} = 0$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif M tel que : $\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + M(x - y)^2$.
2. Montrer que pour tous $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:
 - $P_{n,k}(x) \geq 0$
 - $\sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) = 1$
 - $\sum_{k=0}^n P_{n,k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{4n}$.
3. Démontrer le théorème.