LM201 UPMC, 25 novembre 2014.

Révisions 1

Exercice 1 Rappeler la définition d'un polynôme scindé à racines simples. Montrer qu'un polynôme (réel) scindé à racines simples ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs non nuls. Pour cela on pourra d'une part montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que si P est scindé à racines simples alors P' l'est aussi, ainsi que toutes ses dérivées successives. Ensuite il faut observer qu'un polynôme ayant ses deux premiers coefficients nuls n'est pas à racines simples.

Exercice 2[Examen 2013]
- Montrer que $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
- Soit a, b, c, d des entiers. Montrer que

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^3 + X^2 + X + 1 + (X^4 - 1)Q(X)$$

  pour un certain polynôme Q.
- En déduire que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 3 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes : $\frac{1}{X^2-2}$ sur $\mathbb{R}$, $\frac{1}{X^2+2}$ sur $\mathbb{C}$, $\frac{1}{X^2+2}$ sur $\mathbb{R}$, $\frac{2X+3}{(X^2-2X+1)(X+i)}$ sur $\mathbb{C}$, $\frac{X^2}{(X^4+X^2+1)^2}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto e^x(\cos x + \sin x) - 1$

1. Calculer f', f'', f'''.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange montrer que

$$|f(x) - (2x + x^2)| \leq |x^3|$$

   pour tout $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Exercice 5 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs (formellement) l'assertion "f garde un signe constant sur I", puis écrire sa négation. Écrire de même l'assertion "f monotone" puis écrire sa négation.

Exercice 6 Soit E un ensemble fini et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Y a-t-il plus d'applications de E vers $\mathcal{P}(E)$ ou de $\mathcal{P}(E)$ vers E.

Exercice 7 Montrer que l'ensemble des nombres réels x tels que $(x - \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ est dénombrable. De même pour $\{x \in \mathbb{R}, (x - \sqrt{2})^2 \in \mathbb{Q}\}$. Plus généralement soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour un certain $M > 0$ on a $\mathrm{Card}(f^{-1}(y)) \leq M$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, montrer que $f^{-1}(\mathbb{Q})$ est dénombrable.